WIDMO FOURIERA, SCHWARTZ-CHARAKTERY I INNE OPOWIEŚCI (DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO, I DO SPRAWDZENIA)

$R \int R$

Przedmiotem niniejszej krótkiej notatki jest jawna konstrukcja operatorów rzutu (ortogonalnego) na przestrzenie własne transformaty Fouriera

$$\widehat{\mathcal{F}} \;:\; \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;:\; f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}(\cdot, k)\, f(k)\,, \qquad \mathrm{e}(k, x) := \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k x}\,,$$

rozumianej jako endomorfizm przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Jak pokazano na wykładzie, ta ostatnia jest sumą prostą

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{F}}) \oplus \mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{F}}) \oplus \mathcal{V}_{+\mathrm{i}}(\widehat{\mathcal{F}}) \oplus \mathcal{V}_{-\mathrm{i}}(\widehat{\mathcal{F}})$$

przestrzeni własnych $\widehat{\mathcal{F}}$ odpowiadających elementom niezwyrodniałego widma $\mathrm{Sp}\,\widehat{\mathcal{F}} = \{+1, -1, +\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ transformaty Fouriera. Spełniona jest ponadto następująca tożsamość

$$\widehat{\mathcal{F}}^2 = \widehat{\mathcal{P}}\,, \qquad (\widehat{\mathcal{P}} f)(x) := f(-x)\,,$$

która implikuje $\widehat{\mathcal{F}}^4 = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

W świetle powyższego zachodzi naturalne pytanie: Jak rozłożyć dowolny wektor $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ na składowe z poszczególnych przestrzeni własnych $\widehat{\mathcal{F}}$,

$$f = f_{+1} + f_{-1} + f_{+\mathrm{i}} + f_{-\mathrm{i}}\,, \qquad \widehat{\mathcal{F}} f_\lambda = \lambda\, f_\lambda\,?$$

Odpowiadając na to pytanie, będziemy mieć na względzie jednoznaczność takiego rozkładu (czyli, inaczej mówiąc, jeśli uda nam się zrekonstruować taki rozkład, to możemy mieć pewność, że jest to rozkład szukany).

Zważywszy, że zachodzi relacja $[\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{P}}] = 0$, rozłożymy najpierw wektor f na składowe z przestrzeni własnych operatora $\widehat{\mathcal{P}}$, tj. względem rozkładu

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}}) \oplus \mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}})\,,$$

przy czym w konsekwencji tożsamości

$$\widehat{\mathcal{F}}^2\big|_{\mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}})} = +\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}})}\,, \qquad \widehat{\mathcal{F}}^2\big|_{\mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}})} = -\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}})} \tag{1}$$

zachodzi oczywiście

$$\mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}}) = \mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{F}}) \oplus \mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{F}})\,, \qquad \mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}}) = \mathcal{V}_{+\mathrm{i}}(\widehat{\mathcal{F}}) \oplus \mathcal{V}_{-\mathrm{i}}(\widehat{\mathcal{F}})\,.$$

Operatory rzutu na przestrzenie $\mathcal{V}_{\pm 1}(\widehat{\mathcal{P}})$ to, odpowiednio,

$$P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\pm 1}(\widehat{\mathcal{P}})} = \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \pm \widehat{\mathcal{P}}}{2}\,,$$

przy czym sensowność tej definicji wynika z tożsamości $\widehat{\mathcal{P}}^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$, która implikuje

$$P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\varepsilon}(\widehat{\mathcal{P}})} \circ P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\varepsilon'}(\widehat{\mathcal{P}})} = \delta_{\varepsilon,\varepsilon'}\, P_{\mathcal{V}_{\varepsilon}(\widehat{\mathcal{P}})}\,, \quad \varepsilon, \varepsilon' \in \mathrm{Sp}\,\widehat{\mathcal{P}} = \{+1, -1\}\,.$$

W następnym kroku wykorzystujemy tożsamości (1), aby zapostulować operatory rzutu na podprzestrzenie $\mathcal{V}_{\varepsilon}(\widehat{\mathcal{P}})$ rozpięte przez wektory własne $\widehat{\mathcal{F}}$ odpowiadające ustalonym wartościom własnym w postaci

$$P^{\mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}})}_{\mathcal{V}_{\pm 1}(\widehat{\mathcal{F}})} := \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}})} \pm \widehat{\mathcal{F}}}{2}\,, \qquad P^{\mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}})}_{\mathcal{V}_{\pm \mathrm{i}}(\widehat{\mathcal{F}})} := \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}})} \mp \mathrm{i}\,\widehat{\mathcal{F}}}{2}\,.$$

Koniec końców uzyskujemy w ten sposób pełny zestaw operatorów rzutowych

$$\begin{aligned}
P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\pm 1}(\widehat{\mathcal{F}})} &= P^{\mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}})}_{\mathcal{V}_{\pm 1}(\widehat{\mathcal{F}})} \circ P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}})} \equiv \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}})} \pm \widehat{\mathcal{F}}}{2} \circ \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} + \widehat{\mathcal{P}}}{2}\,,\\
P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\pm \mathrm{i}}(\widehat{\mathcal{F}})} &= P^{\mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}})}_{\mathcal{V}_{\pm \mathrm{i}}(\widehat{\mathcal{F}})} \circ P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}})} \equiv \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}})} \mp \mathrm{i}\,\widehat{\mathcal{F}}}{2} \circ \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} - \widehat{\mathcal{P}}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Bez trudu weryfikujemy żądane własności:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{F}} \circ P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\pm 1}(\widehat{\mathcal{F}})} &= \frac{\widehat{\mathcal{F}} \pm \widehat{\mathcal{P}}}{2} \circ \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} + \widehat{\mathcal{P}}}{2} = \frac{\widehat{\mathcal{F}} \pm \mathrm{id}_{\mathcal{V}_{+1}(\widehat{\mathcal{P}})}}{2} \circ \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} + \widehat{\mathcal{P}}}{2} = \pm P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\pm 1}(\widehat{\mathcal{F}})}\,,\\
\widehat{\mathcal{F}} \circ P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\pm \mathrm{i}}(\widehat{\mathcal{F}})} &= \frac{\widehat{\mathcal{F}} \mp \mathrm{i}\,\widehat{\mathcal{P}}}{2} \circ \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} - \widehat{\mathcal{P}}}{2} = \frac{\widehat{\mathcal{F}} \pm \mathrm{i}\,\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{-1}(\widehat{\mathcal{P}})}}{2} \circ \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} - \widehat{\mathcal{P}}}{2} = \pm \mathrm{i}\, P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\pm \mathrm{i}}(\widehat{\mathcal{F}})}\,.
\end{aligned}$$

Możemy zatem zapisać poszukiwane składowe wektora f w jawnej postaci

$$f_{\lambda} = P^{\mathcal{S}(\mathbb{R})}_{\mathcal{V}_{\lambda}(\widehat{\mathcal{F}})} f\,, \quad \lambda \in \mathrm{Sp}\,\widehat{\mathcal{F}}\,.$$

Warszawa, 11. maja 2011 r.