

Kwantowa kryptografia i teleportacja. Splątanie kwantowe

- a. Poplątane stany.
 - i. Eksperyment EPR.
 - ii. Eksperyment Bella
- b. Star-Trec, czyli teleportujcie mnie!
 - i. Co właściwie teleportujemy
 - ii. Ile kosztuje ubezpieczenie
- c. Kryptografia kwantowa
 - i. Czy są szyfry nie do złamania
 - ii. Klucze duże i małe
 - iii. Alice i Bob w świecie kwantów
 - iv. Ewa chce posłuchać



Dialog z przyrodą musi być prowadzony w języku matematyki, w przeciwnym razie przyroda nie odpowiada na nasze pytania.

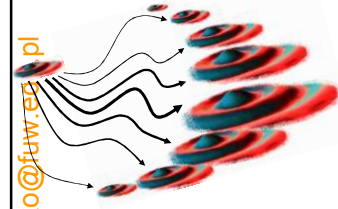
Michał Heller

Jacek Szczytko,
Wydział Fizyki UW

Świat klasyczny i kwantowy

por. WYKŁAD nr 2

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl



Stan cząstki musi być określony w CAŁEJ przestrzeni → FUNKCJA FALOWA

$$\Psi_n(\vec{r}, t)$$

n – liczby kwantowe

Uwaga 1: funkcję falową określają m.in. LICZBY KWANTOWE:

Uwaga 2: funkcja falowa jest określona w całej przestrzeni, w tym sensie jej ewolucja opisuje wszystkie możliwe historie cząstki:

Uwaga 3: liniowa kombinacja funkcji falowych też jest funkcją falową (zasada superpozycji)

Uwaga 4: ewolucja funkcji falowej jest DETERMINISTYCZNA. Jednak w momencie pomiaru „dowiadujemy” się w jakim stanie jest funkcja (tzw. *redukcja f. falowej*)

Uwaga 5: cząstki kwantowe są NIEROZRÓŻNIALNE

przestrzeń wektorowa f. falowych (Hilberta), operatory, funkcje i wartości własne, reprezentacje itp.

Splątane stany - EPR.

por. WYKŁAD nr 2

DYGRESJA

Stan pojedynczej cząstki:

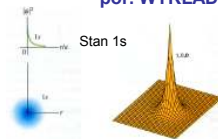
Np.: funkcja falowa atomu wodoru

$$\Psi = R_{n,l}(r)\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\frac{(n-l+1)!}{2n(n+l)!}} \left(\frac{2Z}{na_0}\right)^{3/2} e^{-\rho/2} \rho^l G_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$$

$$\Theta_{l,m}(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Phi_m(\phi) = C e^{im\phi}$$



Liczby kwantowe!

$$\Psi = R_{n,l}(r)\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\phi) = |n, l, m\rangle$$

Splątane stany - EPR.

DYGRESJA

(czyli tak naprawdę)

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

$$\Psi_{n,l,m}(\vec{r}, t) = \langle \vec{r} | n, l, m \rangle = |n, l, m\rangle$$

Reprezentacja położeniowa

Zapis skrócony

Świat klasyczny i kwantowy

Uwaga 3: liniowa kombinacja funkcji falowych też jest funkcją falową (zasada superpozycji)

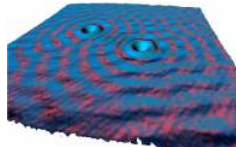
$$\Psi = A\Psi_A + B\Psi_B$$

Nie dodajemy prawdopodobieństw!

$$|\Psi|^2 = (A\Psi_A + B\Psi_B)^2 \neq A^2|\Psi_A|^2 + B^2|\Psi_B|^2$$

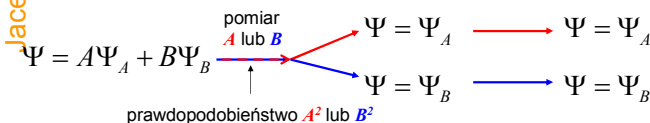
$$|\Psi|^2 = A^2|\Psi_A|^2 + B^2|\Psi_B|^2 + 2AB\Psi_A\Psi_B$$

Człon interferencyjny



por. WYKŁAD nr 2

Uwaga 4: ewolucja funkcji falowej jest DETERMINISTYCZNA. Jednak w momencie pomiaru „dowiadujemy” się w jakim stanie jest funkcja (tzw. *redukcja f. falowej*)



Świat klasyczny i kwantowy

Uwaga 4: (tzw. *redukcja f. falowej*)

tzw. **stany własne** (ortogonalne, ang. *eigen states*)

dwa poziomy atomu $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ np. $g = 1s, e = 2s$

spin elektronu $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

foton o dwóch wzajemnie ortogonalnych stanach polaryzacji $\{|\rightarrow\rangle, |\uparrow\rangle\}$

Jeśli cząstka jest w superpozycji stanów A i B , to z definicji (tzw. *ortogonalność stanów*) nie może być zaobserwowana w obu z nich na raz!

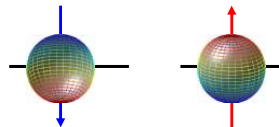
$$\Psi = A\Psi_A + B\Psi_B$$

Splątane stany - EPR.

Układ cząstek

$$\Psi_{n_1, n_2, n_3, \dots}(r_1, r_2, r_3, \dots, t) = |n_1\rangle |n_2\rangle |n_3\rangle \dots$$

Np. spiny elektronów



Opis wielu cząstek kwantowych

Jeden elektron:

baza: $|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle$

$$|\Psi\rangle = \alpha_0|\downarrow\rangle + \alpha_1|\uparrow\rangle$$

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1$$

Dla dwóch elektronów:

baza: $|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00}|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_{01}|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_{10}|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_{11}|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$$

$$\alpha_{00}^2 + \alpha_{01}^2 + \alpha_{10}^2 + \alpha_{11}^2 = 1$$

Dla trzech elektronów:

baza: $|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$

$$|\Psi\rangle = \alpha_{000}|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_{001}|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_{010}|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_{011}|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_{100}|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_{101}|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_{110}|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_{111}|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$$

itd..

$$\alpha_{000}^2 + \alpha_{001}^2 + \alpha_{010}^2 + \alpha_{011}^2 + \alpha_{100}^2 + \alpha_{101}^2 + \alpha_{110}^2 + \alpha_{111}^2 = 1$$

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Opis wielu cząstek kwantowych

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00}|\downarrow\downarrow\rangle + \alpha_{01}|\downarrow\uparrow\rangle + \alpha_{10}|\uparrow\downarrow\rangle + \alpha_{11}|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\alpha_{00}^2 + \alpha_{01}^2 + \alpha_{10}^2 + \alpha_{11}^2 = 1$$

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Opis wielu cząstek kwantowych

Stany Bella

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle) \quad |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle) \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$$

po prostu inna baza...

np:

$$|\downarrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle)$$

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Opis wielu cząstek kwantowych

Stany Bella

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle) \quad |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle) \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$$

Ale stanów Bella nie da się przedstawić w postaci iloczynu dwóch funkcji jednocząstkowych typu: $|\Phi\rangle = |\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle$ gdzie $|\varphi_i\rangle = a_{i1}|\uparrow\rangle + a_{i2}|\downarrow\rangle$

Stany Bella są **SPLATANE**

spiny, polaryzacja fotonów, atom + foton, dwa atomy, atom w różnych stanach...

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Opis wielu cząstek kwantowych

Motto na dziś:
Stany splątane są splątane (w każdej bazie)

$$|\downarrow_\theta\rangle = \cos\theta|\downarrow\rangle + \sin\theta|\uparrow\rangle$$

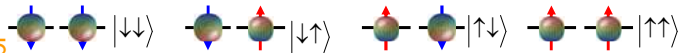
$$|\uparrow_\theta\rangle = -\sin\theta|\downarrow\rangle + \cos\theta|\uparrow\rangle$$

$$|\downarrow\rangle = \cos\theta|\downarrow_\theta\rangle - \sin\theta|\uparrow_\theta\rangle$$

$$|\uparrow\rangle = \sin\theta|\downarrow_\theta\rangle + \cos\theta|\uparrow_\theta\rangle$$

$$|\downarrow_\theta\downarrow_\theta\rangle + |\uparrow_\theta\uparrow_\theta\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle$$

Opis wielu cząstek kwantowych



Stany Bella

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle) \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle) \quad |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle) \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$$

Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon

R. A. Blinov, D. L. Moehring, L.-M. Duan & C. Monroe
NATURE | VOL 428 | 11 MARCH 2004 | www.nature.com/nature

PHYSICAL REVIEW A 69, 042316 (2004)

Atom-photon entanglement generation and distribution

B. Sun, M. S. Chapman, and L. You
School of Physics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332, USA
(Received 21 August 2003; published 21 April 2004)

spiny, polaryzacja fotonów, atom + foton, dwa atomy, atom w różnych stanach...

Splątane stany - EPR

Założmy, że przygotowaliśmy stan kwantowy w postaci

$$|\downarrow\downarrow\rangle$$

a następnie cząstki rozsunęliśmy na znaczną odległość:



Prawdopodobieństwo pomiaru wartości $|\downarrow\rangle$ jest 1,

a prawdopodobieństwo pomiaru wartości $|\uparrow\rangle$ jest 0.

Łatwo więc możemy odgadnąć jaki wynik pomiaru uzyskamy na drugiej cząstce

A co będzie jeśli stanem wyjściowym jest stan Bella?

Splątane stany - EPR

Założmy, że przygotowaliśmy stan kwantowy w postaci stanu splątanego

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$$

a następnie cząstki rozsunęliśmy na znaczną odległość:



Prawdopodobieństwo pomiaru wartości $|\downarrow\rangle$ jest 1/2,

a prawdopodobieństwo pomiaru wartości $|\uparrow\rangle$ jest 1/2.

Ale równie łatwo możemy odgadnąć jaki wynik pomiaru uzyskamy na drugiej cząstce

Jeśli dla pierwszej zmierzylimy $|\downarrow\rangle$ wtedy dla drugiej $P(|\downarrow\rangle) = 1$, $P(|\uparrow\rangle) = 0$

Jeśli dla pierwszej zmierzylimy $|\uparrow\rangle$ wtedy dla drugiej $P(|\downarrow\rangle) = 0$, $P(|\uparrow\rangle) = 1$

Splątane stany - EPR

Założmy, że przygotowaliśmy stan kwantowy w postaci stanu splątanego

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$$

a następnie cząstki rozsunęliśmy na znaczną odległość:



dla pierwszej	dla drugiej
$ \downarrow\rangle \Rightarrow P(\downarrow\rangle) = 1, P(\uparrow\rangle) = 0$	$P(\downarrow\rangle) = 1, P(\uparrow\rangle) = 0$
$ \uparrow\rangle \Rightarrow P(\downarrow\rangle) = 0, P(\uparrow\rangle) = 1$	$P(\downarrow\rangle) = 0, P(\uparrow\rangle) = 1$

niezależnie od odległości, czasu pomiędzy pomiarami, rodzaju splątanych cząstek

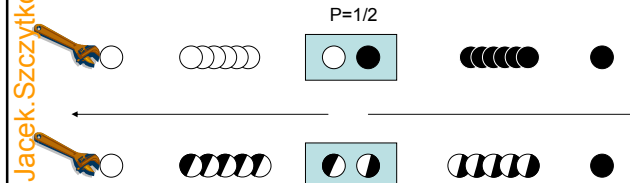
Kwantowo: w momencie pomiaru następuje redukcja funkcji falowej

Zdarzenia są ZALEŻNE

Splątane stany - EPR.

Problem:

Czy cząstki splątane mają określone cechy (takie jak spin, polaryzacja itp.) już w momencie „narodzin”, czy nabywają je dopiero w chwili pomiaru?

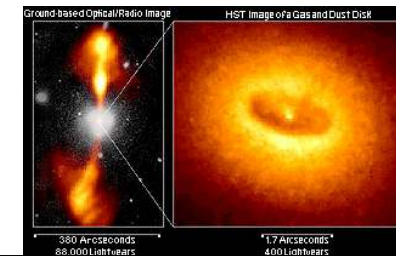


Splątane stany - EPR

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$$

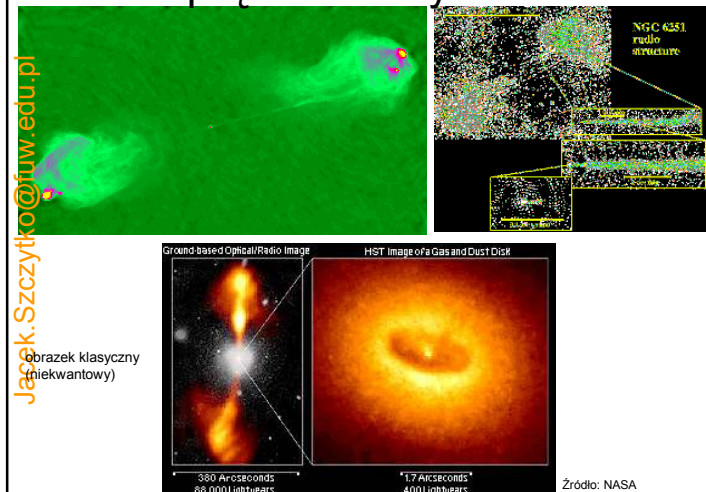
dla pierwszej	dla drugiej
$ \downarrow\rangle \Rightarrow P(\downarrow\rangle)=1, P(\uparrow\rangle)=0$	$P(\downarrow\rangle)=1, P(\uparrow\rangle)=0$
$ \uparrow\rangle \Rightarrow P(\downarrow\rangle)=0, P(\uparrow\rangle)=1$	$P(\downarrow\rangle)=0, P(\uparrow\rangle)=1$

Obrazek klasyczny (niekwantowy): funkcja falowa jest opisana przy pomocy **ukrytych parametrów**



Źródło: NASA

Splątane stany - EPR



Poplątane stany - EPR.

Einstein:

- informacja w przyrodzie nie porusza się szybciej niż światło w próżni
- nie ma absolutnej równoczesności zdarzeń

MQ: ewolucja funkcji falowej jest DETERMINISTYCZNA. Jednak w momencie pomiaru „dowiadujemy” się w jakim stanie jest funkcja (tzw. *redukcja f. falowej*)

$$\Psi = A\Psi_A + B\Psi_B \xrightarrow{\text{pomiar A lub B}} \begin{cases} \Psi = \Psi_A & \text{red arrow} \\ \Psi = \Psi_B & \text{blue arrow} \end{cases}$$

Poplątane stany - EPR.

A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen – Gedankenexperiment (eksperyment myślowy)

MAY 15, 1935

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*
(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in

quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

While we have thus shown that the wave function does not provide a complete description of the physical reality, we left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such a theory is possible.

"spooky action-at-a-distance"

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Poplątane stany - EPR.

"God does not play at dice with the universe." A. Einstein

"Quit telling God what to do!" N. Bohr

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówność Bella.

III.5 ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

JOHN S. BELL†

I. Introduction

The paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as an argument that quantum mechanics could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty. There have been attempts [3] to show that even without such a separability or locality requirement no "hidden variable" interpretation of quantum mechanics is possible. These attempts have been examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variable interpretation of elementary quantum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interpretation has indeed a grossly non-local structure. This is characteristic, according to the result to be proved here, of any such theory which reproduces exactly the quantum mechanical predictions.

Originally published in *Physics*, 1, 195-200 (1964).



Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówność Bella.

- A: mężczyźni
- B: wzrost powyżej 170
- C: oczy niebieskie

ilość obiektów, które posiadają cechę A ale nie mają B +
ilość obiektów, które posiadają cechę B ale nie mają C
jest większa bądź równa
ilość obiektów, które posiadają cechę A ale nie mają C

$$\text{ilość}(A, \text{not } B) + \text{ilość}(B, \text{not } C) \geq \text{ilość}(A, \text{not } C)$$

Nierówność Bella (*Bell's inequality*)



John Bell

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

<http://www.upscale.utoronto.ca/PVB/Harrison/BellsTheorem/BellsTheorem.html>

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówność Bella.

A: mężczyźni
B: wzrost powyżej 170
C: oczy niebieskie

ilość obiektów, które posiadają cechę A ale nie mają B +
 ilość obiektów, które posiadają cechę B ale nie mają C
jest większa bądź równa
 ilość obiektów, które posiadają cechę A ale nie mają C

$\text{ilość}(A, \text{not } B) + \text{ilość}(B, \text{not } C) \geq \text{ilość}(A, \text{not } C)$

John Bell

$\text{ilość}(A, \text{not } B, C) + \text{ilość}(\text{not } A, B, \text{not } C) \geq 0$

Dodajemy stronami $\text{ilość}(A, \text{not } B, \text{not } C) + \text{ilość}(A, B, \text{not } C)$

$\text{ilość}(A, \text{not } B, C) + \text{ilość}(\text{not } A, B, \text{not } C) + \text{ilość}(A, \text{not } B, \text{not } C) + \text{ilość}(A, B, \text{not } C) \geq$
 $0 + \text{ilość}(A, \text{not } B, \text{not } C) + \text{ilość}(A, B, \text{not } C)$
 c.b.d.o.

<http://www.upscale.utoronto.ca/PVB/Harrison/BellsTheorem/BellsTheorem.html>

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówność Bella.

A: mężczyźni
B: wzrost powyżej 170
C: oczy niebieskie

ilość obiektów, które posiadają cechę A ale nie mają B +
 ilość obiektów, które posiadają cechę B ale nie mają C
jest większa bądź równa
 ilość obiektów, które posiadają cechę A ale nie mają C

$\text{ilość}(A, \text{not } B) + \text{ilość}(B, \text{not } C) \geq \text{ilość}(A, \text{not } C)$

John Bell

Bell pokazał, że w pewnych przypadkach mechanika kwantowa daje

$\text{ilość}(A, \text{not } B) + \text{ilość}(B, \text{not } C) < \text{ilość}(A, \text{not } C)$

!

<http://www.upscale.utoronto.ca/PVB/Harrison/BellsTheorem/BellsTheorem.html>

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Poplątane stany - EPR.

Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers

Alain Aspect, Jean Dalibard,^(a) and Gérard Roger
Institut d'Optique Théorique et Appliquée, F-91406 Orsay Cédex, France
 (Received 27 September 1982)

Correlations of linear polarizations of pairs of photons have been measured with time-varying analyzers. The analyzer in each leg of the apparatus is an acousto-optical switch followed by two linear polarizers. The switches operate at incommensurate frequencies near 50 MHz. Each analyzer amounts to a polarizer which jumps between two orientations in a time short compared with the photon transit time. The results are in good agreement with quantum mechanical predictions but violate Bell's inequalities by 5 standard deviations.

PACS numbers: 03.65.Bz, 35.80.+s

Bell's inequalities apply to any correlated measurement on two correlated systems. For instance, in the optical version of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*,¹ a source emits pairs of photons (Fig. 1). Measurements of the correlations of linear polarizations are performed on two photons belonging to the same pair. For pairs emitted in suitable states, the correlations are strong. To account for these correlations, Bell² considered theories which invoke common properties of both members of the

FIG. 1. Optical version of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*. The pair of photons v_1 and v_2 is analyzed by linear polarizers I and II (in orientations $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$) and photomultipliers. The coincidence rate is monitored.

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówności Bella.

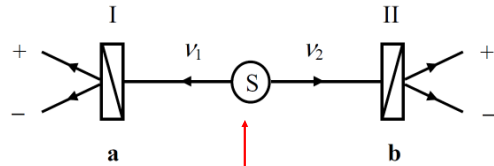
BELL'S THEOREM : THE NAIVE VIEW OF AN EXPERIMENTALIST*

Alain Aspect

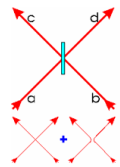
Institut d'Optique Théorique et Appliquée
 Bâtiment 503-Centre universitaire d'Orsay
 91403 ORSAY Cedex - France
 alain.aspect@iota.u-psud.fr

Figure 1. Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment* with photons. The two photons v_1 and v_2 , emitted in the state $|\Psi(1,2)\rangle$ of Equation (1), are analyzed by linear polarizers in orientations $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$. One can measure the probabilities of single or joint detections in the output channels of the polarizers.

Nierówności Bella.



Źródło splecionych fotonów

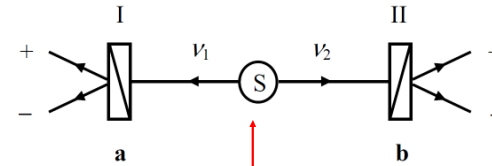


If one overlaps two particles at a beamsplitter, interference effects determine the probabilities to find the two particles incident one each from a and b either both in one of the two outputs c and d or to find one in each output.
Only if two photons are in the state

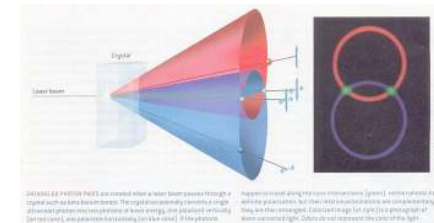
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle)$$

they will leave the beamsplitter into different output arms. If one puts detectors there, a click in each of them, i.e. a coincidence, means the projection of the two photons onto the state

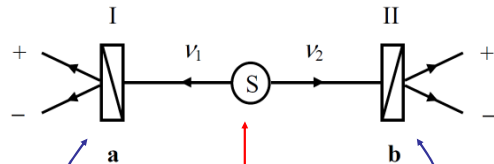
Nierówności Bella.



Źródło splecionych fotonów

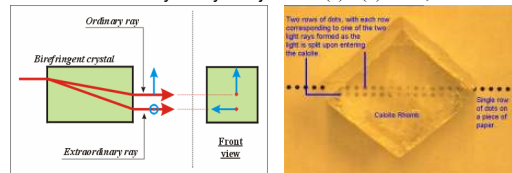


Nierówności Bella.

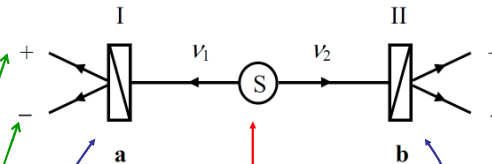


Źródło splecionych fotonów

Polaryzatory dwójłomne I(a) II(b) a, b – orientacja (kąt)



Nierówności Bella.



Źródło splecionych fotonów

Polaryzatory dwójłomne I(a) II(b) a, b – orientacja (kąt)

Detektory (+, -) – polaryzacja

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówności Bella.

$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$

Dla pojedynczych cząstek:

$$P_+(a) = P_-(a) = 1/2$$

$$P_+(b) = P_-(b) = 1/2 \quad (\text{Q.M.})$$

Dla obu cząstek:

$$P_{++}(a, b) = P_{--}(a, b) = \frac{1}{2} \cos^2(a, b)$$

$$P_{+-}(a, b) = P_{-+}(a, b) = \frac{1}{2} \sin^2(a, b) \quad (\text{Q.M.})$$

Dla polaryzatorów (a, b) = 0 ustawionych równolegle

$$P_{++}(a, a) = P_{--}(a, a) = \frac{1}{2}$$

$$P_{+-}(a, a) = P_{-+}(a, a) = 0$$

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówności Bella.

$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$

Dla pojedynczych cząstek:

$$P_+(a) = P_-(a) = \frac{1}{2}$$

$$P_+(b) = P_-(b) = \frac{1}{2} \quad (\text{Q.M.})$$

Dla obu cząstek:

$$P_{++}(a, b) = P_{--}(a, b) = \frac{1}{2} \cos^2(a, b)$$

$$P_{+-}(a, b) = P_{-+}(a, b) = \frac{1}{2} \sin^2(a, b) \quad (\text{Q.M.})$$

Dla polaryzatorów (a, b) = 0 ustawionych równolegle

$$P_{++}(a, a) = P_{--}(a, a) = \frac{1}{2}$$

$$P_{+-}(a, a) = P_{-+}(a, a) = 0$$

Pełna korelacja!
(+,+) i (-,-)

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówności Bella.

$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$

Funkcja korelacji

$$E(a, b) = P_{++}(a, b) + P_{--}(a, b) - P_{+-}(a, b) - P_{-+}(a, b)$$

$$E_{QM}(a, b) = \cos 2(a, b) \quad \text{np: } E_{QM}(0) = 1 \text{ dla } (a, b) = 0$$

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówności Bella.

$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$

Załóżmy teraz, że funkcja falowa obu fotonów jest określona przez pewne „ukryte parametry” (oznaczymy je λ) w momencie emisji. Dla danej pary fotonów i dla danego parametru λ wynik pomiaru jest dany przez funkcje

$$A(\lambda, a) = \pm 1 \quad \text{at analyzer I (in orientation a)}$$

$$B(\lambda, b) = \pm 1 \quad \text{at analyzer II (in orientation b)}$$

Rozkład parametrów λ , funkcje $A(\lambda, a)$ i $B(\lambda, b)$ określają konkretną Teorię Parametrów Ukrytych

$$P_+(a) = \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{[A(\lambda, a) + 1]}{2}$$

$$P_-(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{[A(\lambda, a) + 1]}{2} \frac{[1 - B(\lambda, b)]}{2} \quad E(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, a) B(\lambda, b) \quad \text{itd...}$$

Jacek.Szcztyko@fuw.edu.pl

Nierówności Bella.

Nierówności Bella:

Niech polaryzatory będą ustawione w czterech pozycjach a, a', b i b'

$$s = A(\lambda, a) \cdot B(\lambda, b) - A(\lambda, a) \cdot B(\lambda, b') + A(\lambda, a') \cdot B(\lambda, b) + A(\lambda, a') \cdot B(\lambda, b')$$

$$= A(\lambda, a) [B(\lambda, b) - B(\lambda, b')] + A(\lambda, a') [B(\lambda, b) + B(\lambda, b')]$$

Wtedy, z racji tego, że $A = \pm 1$ i $B = \pm 1$, dla Teorii Parametrów Ukrytych

$$s(\lambda, a, a', b, b') = \pm 2$$

Korelacje (uśrednione): $S(a, a', b, b') = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')$

$$-2 \leq S(a, a', b, b') \leq 2$$

Jacek.Szcztyko@fuw.edu.pl

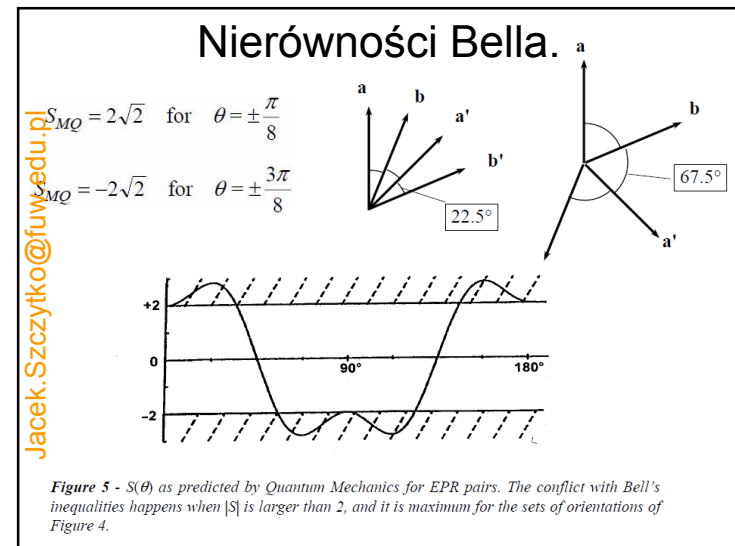
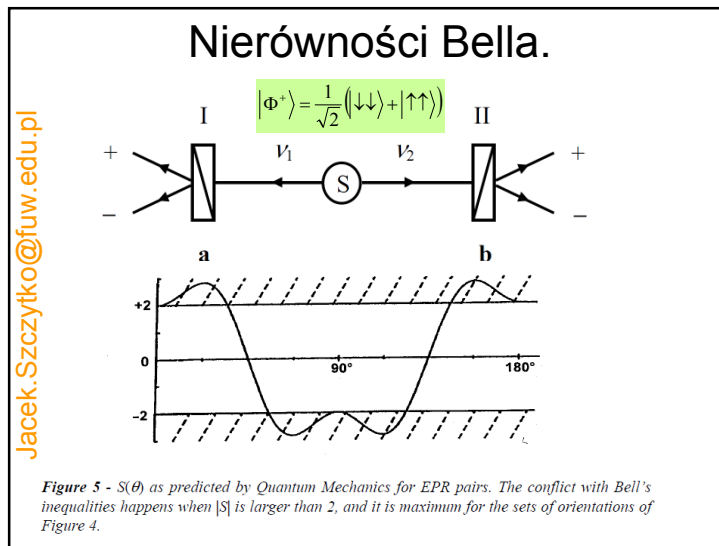
Nierówności Bella.

Nierówności Bella:

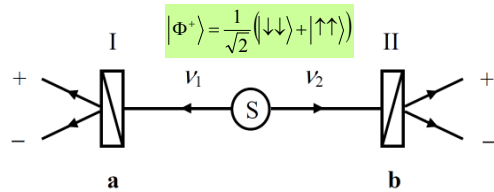
Niech polaryzatory będą ustawione w czterech pozycjach a, a', b i b'

Korelacje (uśrednione dla Teorii Parametrów Ukrytych): $-2 \leq S(a, a', b, b') \leq 2$

Okazuje się, że dla QM $S_{QM} = 2\sqrt{2}$!



Nierówności Bella.

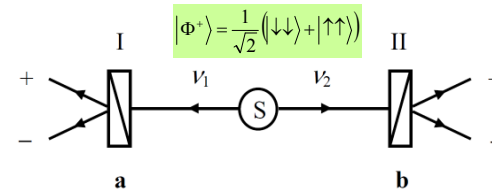


Kluczowe założenie odnośnie parametrów λ : **LOKALNOŚĆ**, czyli wynik pomiaru $A(\lambda, a)$ nie zależy od wyniku $B(\lambda, b)$ oraz rozkład prawdopodobieństwa parametru λ nie zależy od orientacji polaryzatorów a i b .

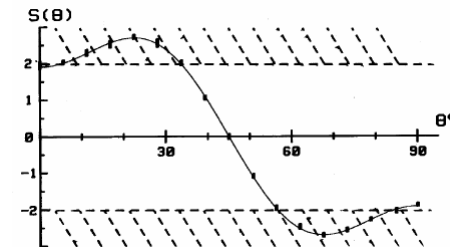
Wnioski:

1. Stan kwantowy splątanych cząstek nie jest ustalony oddzielnie dla każdej z nich.
2. Redukcja funkcji falowej następuje w momencie pomiaru.

Nierówności Bella.



Eksperyment:



Nierówności Bella.

Bez paniki, bywają cięższe prace...



Photo by Vincent Laforet / The New York Times

Nierówności Bella.

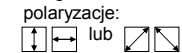
Założmy, że dysponujemy stanem

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$$

np. dwa fotony.

Wtedy $|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle$

oznaczają dwie ortogonalne polaryzacje:



Nierówności Bella.

Założmy, że dysponujemy stanem

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$$

np. dwa fotony.
Wtedy $|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle$

oznaczają dwie ortogonalne polaryzacje:

$\begin{array}{|c|} \hline \downarrow \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline \end{array}$ lub $\begin{array}{|c|} \hline \swarrow \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{|c|} \hline \searrow \\ \hline \end{array}$

Założmy, że możemy na tym stanie wykonać trzy różne pomiary:

A, B i C ,
które dają wyniki „1” lub „0” z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

np. polaryzatory w pozycji

$0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
 A, B i C

Uwaga (ale bez znaczenia)
W tym przykładzie wybraliśmy stan Bella w taki sposób, że wyniki TYCH SAMYCH pomiarów na OBU składnikach pary są w pełni skorelowane (np. pomiar A na obu daje w wyniku tylko pary „00” lub „11”). Ale mogliśmy też wybrać pełną anty-korelację („01” lub „10”) – nie ma to znaczenia.

Nierówności Bella.

Założmy, że dysponujemy stanem

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$$

np. dwa fotony.
Wtedy $|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle$

oznaczają dwie ortogonalne polaryzacje:

$\begin{array}{|c|} \hline \downarrow \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline \end{array}$ lub $\begin{array}{|c|} \hline \swarrow \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{|c|} \hline \searrow \\ \hline \end{array}$

Założmy, że możemy na tym stanie wykonać trzy różne pomiary:

A, B i C ,
które dają wyniki „1” lub „0” z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

np. polaryzatory w pozycji

$0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
 A, B i C

Możemy teraz odseparować oba składniki stanu spletanego i niezależnie wykonać na nich pomiary A, B i C ,



pierwszy



drugi

Nierówności Bella.

pierwszy



A 0°
 B 60°
 C 120°

$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)$

drugi



A 0°
 B 60°
 C 120°

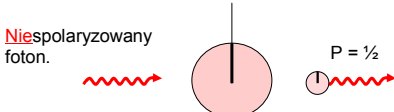
Nierówności Bella.



A 0°
 B 60°
 C 120°

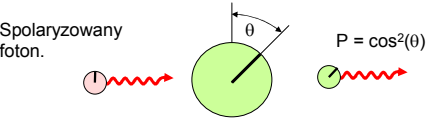
Uwaga:
Możemy wykonać na raz tylko JEDEN z pomiarów (różne polaryzacje nie są współmieralne).

Niespolaryzowany foton.



$P = \frac{1}{2}$

Spolaryzowany foton.



$P = \cos^2(\theta)$

Prawo Malusa

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówności Bella.

pierwszy



	A	B	C
a	0	0	0
b	0	0	1
c	0	1	0
d	0	1	1
e	1	0	0
f	1	0	1
g	1	1	0
h	1	1	1

drugi



	A	B	C
0	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1	1	1/4	1/4
1/4	1	1	1/4
1/4	1/4	1/4	1

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówności Bella.

(QM) = a+b+g+h = 1/4

(QM) = a+c+f+h = 1/4

(QM) = a+d+e+h = 1/4

(QM) = a+b+g+h = 1/4

(QM) = a+c+f+h = 1/4

(QM) = a+d+e+h = 1/4

$$\begin{aligned}
 & (QM) + (QM) + (QM) = a+b+g+h + a+c+f+h + a+d+e+h = \\
 & = 2(a+h) + (a+b+c+d+e+f+g+h) = 3/4 \\
 & 2(a+h) + \frac{(a+b+c+d+e+f+g+h)}{1} = 3/4 \\
 & a+h = -1/8 < 0
 \end{aligned}$$

Nie ma klasycznych prawdopodobieństw dla NIEZALEŻNYCH zdarzeń (QM).
 Żadna LOKALNA teoria parametrów ukrytych nie może odtworzyć wyników QM.

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Nierówność Bella.



John Bell

A: mężczyźni
 B: wzrost powyżej 170
 C: oczy niebieskie

ilość obiektów, które posiadają cechę A ale nie mają B +
 ilość obiektów, które posiadają cechę B ale nie mają C
jest większa bądź równa
 ilość obiektów, które posiadają cechę A ale nie mają C

$\text{ilość}(A, \text{not } B) + \text{ilość}(B, \text{not } C) \geq \text{ilość}(A, \text{not } C)$

Nierówność Bella (Bell's inequality)

Cechy A, B i C nie istnieją równocześnie (niezależnie od siebie) w QM.

A: polaryzacja
 B: polaryzacja
 C: polaryzacja

Za to stają się określone w momencie pomiaru (w przypadku stanów spleczanych niezależnie od dzielącej cząstki odległości)! Mechanika kwantowa jest NIELOKALNA.

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Opis wielu cząstek kwantowych

Concurrence
 V.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998)

$$C = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4})$$

λ_i — wartości własne macierzy $R = \rho \tilde{\rho}$

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$$

$$0 \leq C \leq 1$$

Negativity
 A. Peres, Phys. Rev. Lett. 77, 1413 (1996)
 P. Horodecki, Phys. Lett. A 232, 333 (1997)

$$\mathcal{N} = \max\left(0, -2 \sum_i \nu_i\right)$$

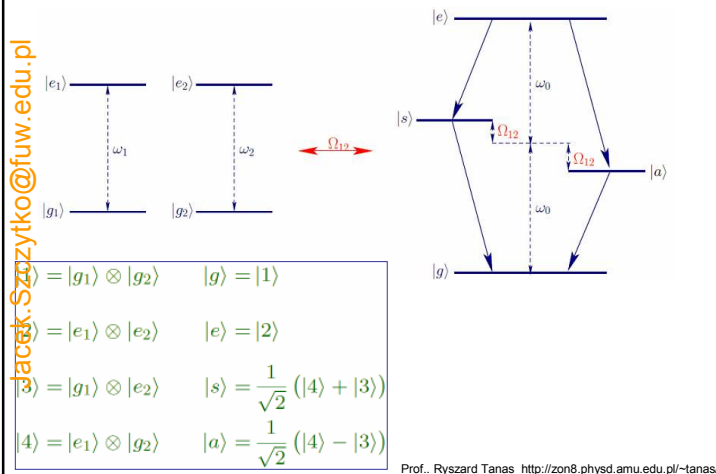
$\{\nu_i\}$ — ujemne wartości własne częściowo transponowanej macierzy gęstości ρ^{T1}

$$0 \leq \mathcal{N} \leq 1$$

Prof. Ryszard Tanas http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanar/

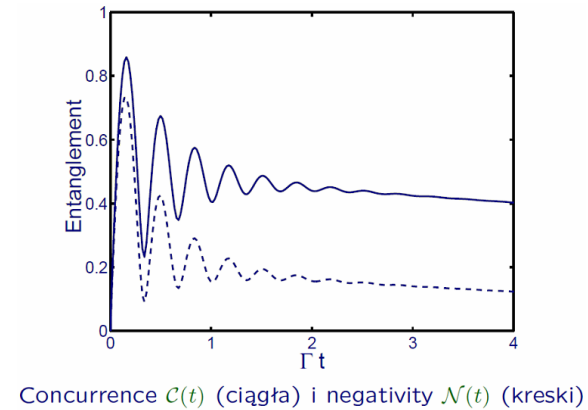
Opis wielu cząstek kwantowych

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl



Opis wielu cząstek kwantowych

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

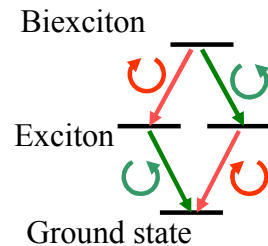


Badanie na Hożej: splecione fotony

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle) \quad \text{or} \quad |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V, V\rangle + |H, H\rangle)$$

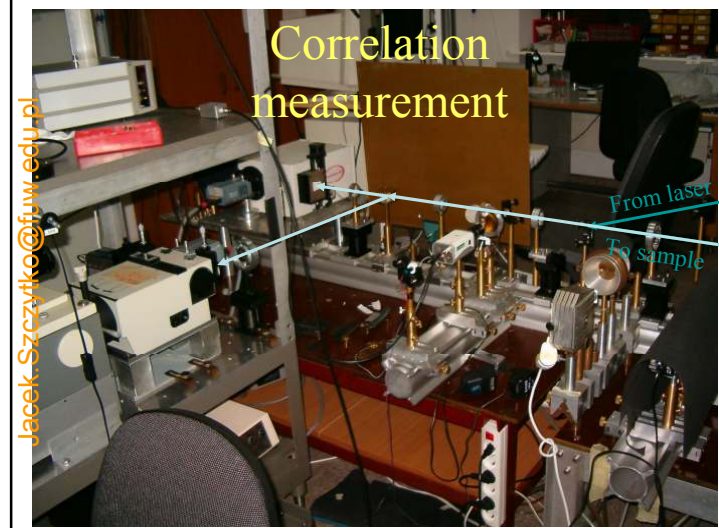
Metoda: kaskada
Biekscyton -
ekscyton w kropce
kwantowej

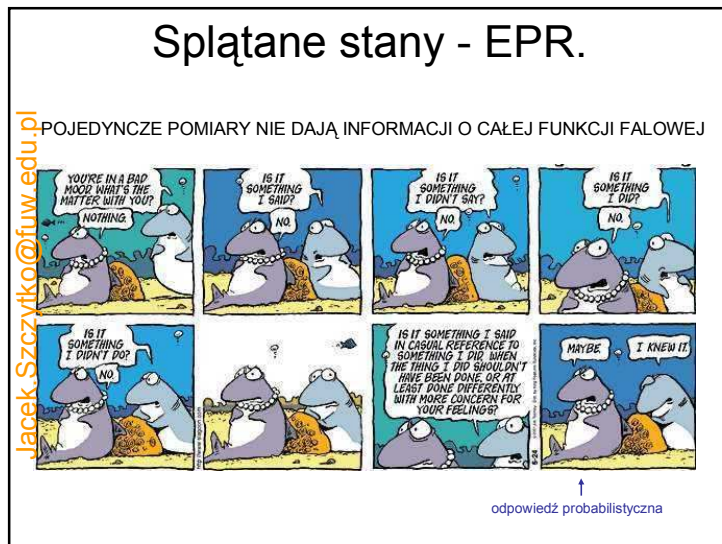
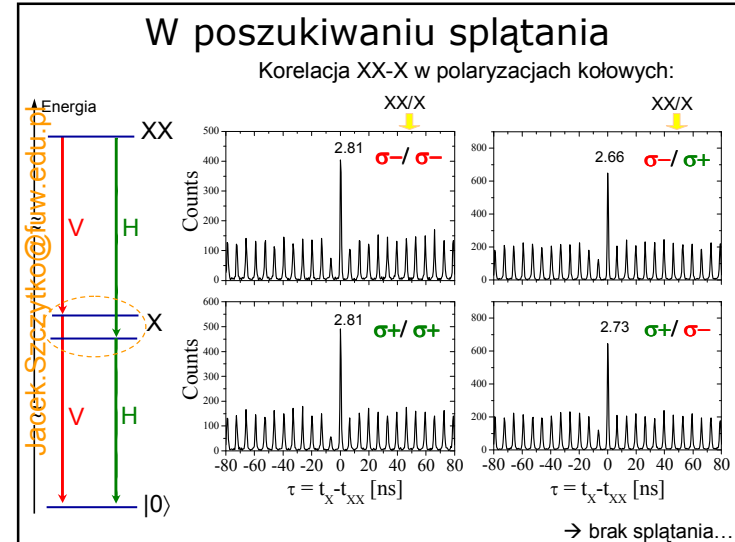
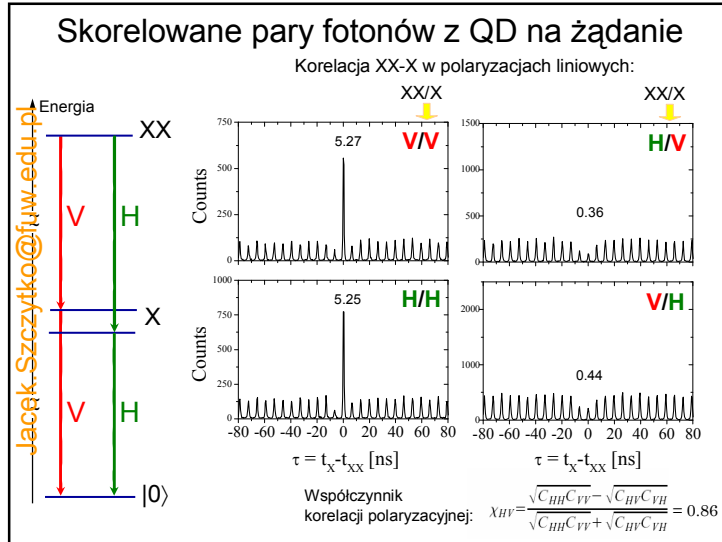


prof. J. A. Gaj mgr W. Maślana mgr A. Trajnerowicz
prof. M. Nawrocki mgr J. Suffczyński mgr B. Piechal
dr hab. A. Gołnik mgr K. Kowalik M. Goryca
dr P. Kossacki mgr W. Pacuski T. Kazimierzczuk

Correlation measurement

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl





Kwantowa kryptografia i teleportacja.

Splątanie kwantowe

- Poplątane stany.
 - Eksperyment EPR.
 - Eksperyment Bella
- Star-Trec, czyli teleportujcie mnie!
 - Co właściwie teleportujemy
 - Ile kosztuje ubezpieczenie
- Kryptografia kwantowa
 - Czy są szyfry nie do złamania
 - Klucze duże i małe
 - Alice i Bob w świecie kwantów
 - Ewa chce posłuchać

Dialog z przyrodą musi być prowadzony w języku matematyki, w przeciwnym razie przyroda nie odpowiada na nasze pytania.

Michael Heller