Wybrane aspekty nanotechnologii

Inżynieria nanostruktur

WIELKIE PODSUMOWANIE

Wydział Fizyki UW
Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Karol Nogajewski

EUROPHYSICS LETTERS 15 January 1989
Europhys. Lett., 8 (2), pp. 179-184 (1989)

Magnetoresistance Oscillations in a Two-Dimensional Electron Gas Induced by a Submicrometer Periodic Potential.

D. WEISS (*), K. v. KLITZING (*), K. PLOOG (*) and G. WEIMANN (**)
(*) *Max-Planck-Institut für Festkörperforschung, Heisenbergstraße 1 D-7000 Stuttgart 80, F.R.G.*
(**) *Walter-Schottky-Institut, TUM, D-8046 Garching, F.R.G.*

(received 29 October 1988; accepted 7 November 1988)

Abstract. – A new type of magnetoresistance oscillation periodic in $1/B$ is observed when the carrier density N_s of a two-dimensional electron gas is weakly modulated with a period smaller than the mean free path of the electrons. Experiments with high mobility AlGaAs-GaAs heterojunctions where N_s is modulated by holographic illumination at $T \leqslant 4.2$ K show that the period of the additional quantum oscillation is determined by the separation a of the interference fringes. This period corresponds to Shubnikov-de Haas oscillations where only the electrons within the first reduced Brillouin zone with $|k| < \pi/a$ contribute.

Poziomy Landaua

$N^{2D}(E) = \dfrac{m}{\pi\hbar^2}$

Poszerzenie poziomów na skutek rozproszeń $\Gamma = \hbar/\tau_i$

τ_i to jednocząstkowy (albo kwantowy) czas życia – to NIE jest ten sam czas, który omawialiśmy w modelu Drudego (transportowy)

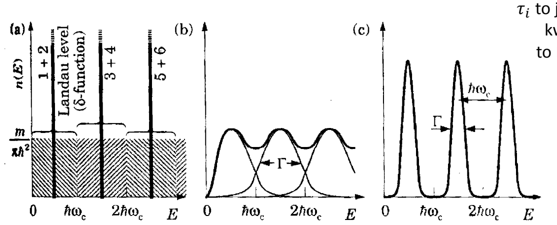


FIGURE 6.7. Density of states in a magnetic field, neglecting spin splitting. (a) The states in each range $\hbar\omega_c$ are squeezed into a δ-function Landau level. (b) Landau levels have a non-zero width Γ in a more realistic picture and overlap if $\hbar\omega_c < \Gamma$. (c) The levels become distinct when $\hbar\omega_c > \Gamma$.

Licząc 2 spiny: $2n_B = \dfrac{2eB}{h} = \dfrac{2m\omega_c}{2\pi\hbar} = \dfrac{m}{\pi\hbar^2}\,\hbar\omega_c$

Każdy ze stanów na poziome Landaua zajmuje powierzchnię $\frac{h}{eB} = 2\pi l_B^2$

$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar}{|eB|}}$

Poziomy Landaua

$n_B = \dfrac{eB}{h}$ degeneracja poziomów Landaua – ilość DOZWOLONYCH stanów na każdym z poziomów Landaua na jednostkę powierzchni – **rośnie z polem B**

Koncentracja nośników 2D: n_{2D} – na ilu poziomach Landaua zmieszczą się te nośniki?

Współczynnik wypełnienia *filling factor* ν (zwykle nie jest to liczba całkowita)

$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{hn_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$ (z uwzględnieniem degeneracji spinów)

Zwiększając pole magnetyczne kolejno zapełniamy poziomy Landaua. Można całkowicie zapełnić n-ty poziom ($\nu = n$) i wtedy $B_n = hn_{2D}/en$, aż osiągniemy $n = 1$, czyli wszystkie elektrony będą na tym samym poziomie Landaua (tzw. *limit kwantowy*).

Dla $\nu < 1$ zaczynają się dziać ciekawe rzeczy (do których zaraz wrócimy!)

Poziomy Landaua

$n_B = \frac{eB}{h}$ degeneracja poziomów Landaua – ilość DOZWOLONYCH stanów na każdym z poziomów Landaua na jednostkę powierzchni – **rośnie z polem B**

Koncentracja nośników 2D: n_{2D} – na ilu poziomach Landaua zmieszczą się te nośniki?

Współczynnik wypełnienia *filling factor* ν (zwykle nie jest to liczba całkowita)

$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{hn_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$ (z uwzględnieniem degeneracji spinów)

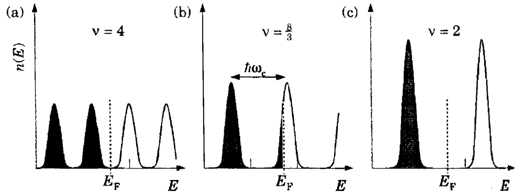


FIGURE 6.8. Occupation of Landau levels in a magnetic field neglecting the spin splitting, showing how the Fermi level moves to maintain a constant density of electrons. The fields are in the ratio 2 : 3 : 4 and give $\nu = 4, \frac{8}{3}$, and 2.

Poziomy Landaua

Poziom Fermiego leży **pomiędzy** poziomami Landaua – nie ma tam DOS, zmiana E_F nie zmienia DOS – stany *nieściśliwe* (*incompressible*)

Poziom Fermiego leży **wewnątrz** poziomu Landaua – duża DOS, zmiana E_F mocno wpływan na DOS – stany *ściśliwe* (*compressible*)

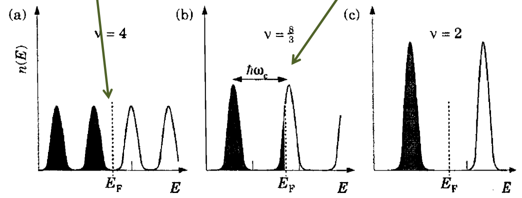


FIGURE 6.8. Occupation of Landau levels in a magnetic field neglecting the spin splitting, showing how the Fermi level moves to maintain a constant density of electrons. The fields are in the ratio 2 : 3 : 4 and give $\nu = 4, \frac{8}{3}$, and 2.

Poziomy Landaua

Poziom Fermiego w polu magnetycznym:

$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{hn_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$

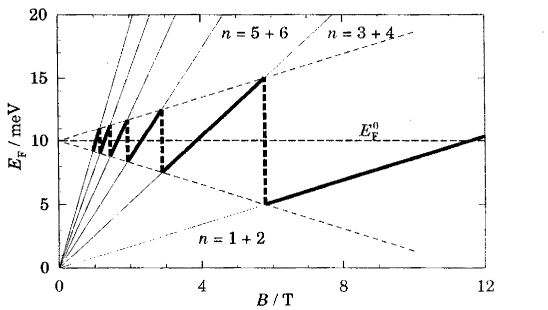


FIGURE 6.9. Variation of the Fermi level as a function of magnetic field for a two-dimensional electron gas in GaAs with $E_F^0 = 10$ meV before the field was applied. Spin splitting is neglected. The fan of thin lines shows the Landau levels, while the discontinuous thick line is E_F.

Efekt Shubnikova-de Haasa

Shubnikov-de Haas effect

9.4.1 Types of quantum oscillation

As the electronic density of states at E_F determines most of a metal's properties, virtually all properties will exhibit quantum oscillations in a magnetic field. Examples include[7]

- oscillations of the magnetisation (the de Haas–van Alphen effect);
- oscillations of the magnetoresistance (the Shubnikov–de Haas effect);
- oscillations of the sample length;
- ocillations of the sample temperature;
- oscillations in the ultrasonic attenuation;
- oscillations in the Peltier effect and thermoelectric voltage;
- oscillations in the thermal conductivity.

[6]However, open orbits do lead to a very interesting quantum phenomenon which has recently been observed in high-frequency experiments; see A. Ardavan *et al.*, *Phys. Rev. B* **60**, 15500 (1999); *Phys. Rev. Lett.* **81**, 713 (1998).
[7]Some pictures of typical data are shown in *Solid State Physics*, by N.W Ashcroft and N.D. Mermin (Holt, Rinehart and Winston, New York 1976) pages 266-268.

http://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/BandMT_09.pdf

Efekt Shubnikova-de Haasa

Shubnikov-de Haas effect

Gęstość stanów oscyluje - spada do 0 dla $\nu = n$ i jest największa dla $\nu \approx n + \frac{1}{2}$ - najprościej to zmierzyć w magnetooporze R_{xx}.

Oscylacje zależą od stodunku energii Fermiego E_F do częstości cyklotronowej $\hbar\omega_c = eB/m^*$. Oscylacje są periodyczne w funkcji $1/B$.

$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{hn_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$

Z SdH można także wyznaczyć masę efektywną m^* oraz czas kwantowy τ_q. Amplituda oscylacji jest dana przez

$$\Delta\rho_{SdH} = 4\rho_0 \delta \cos(4\pi\nu) \frac{\xi(T)}{\sinh(\xi(T))} \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_c \tau_q}\right)$$

$\xi(T) = 2\pi^2 kT/\hbar\omega_c$

Zależność temperaturowa daje m^*, tłumienie τ_q.

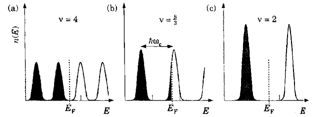
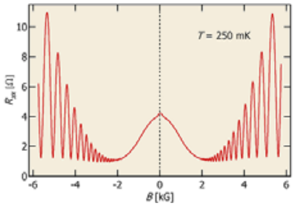


FIGURE 6.8. Occupation of Landau levels in a magnetic field neglecting the spin splitting, showing how the Fermi level moves to maintain a constant density of electrons. The fields are in the ratio 2 : 3 : 4 and give ν = 4, 8/3, and 2.



http://groups.physics.umn.edu/zudovlab/content/sdho.htm

Efekt Shubnikova-de Haasa

Shubnikov-de Haas effect

Gęstość stanów oscyluje - spada do 0 dla $\nu = n$ i jest największa dla $\nu \approx n + \frac{1}{2}$ - najprościej to zmierzyć w magnetooporze R_{xx}.

Oscylacje zależą od stodunku energii Fermiego E_F do częstości cyklotronowej $\hbar\omega_c = eB/m^*$. Oscylacje są periodyczne w funkcji $1/B$.

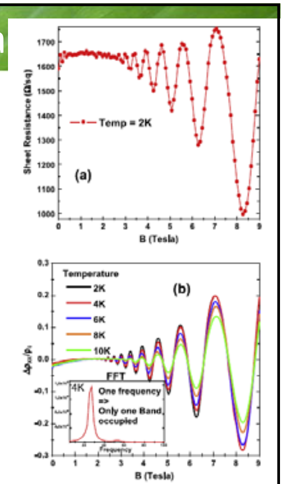
$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{hn_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$

Z SdH można także wyznaczyć masę efektywną m^* oraz czas kwantowy τ_q. Amplituda oscylacji jest dana przez

$$\Delta\rho_{SdH} = 4\rho_0 \delta \cos(4\pi\nu) \frac{\xi(T)}{\sinh(\xi(T))} \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_c \tau_q}\right)$$

$\xi(T) = 2\pi^2 kT/\hbar\omega_c$

Zależność temperaturowa daje m^*, tłumienie τ_q.



A. Nainani et al. Solid-State Electronics 62 (2011) 138–141

Efekt Shubnikova-de Haasa

Shubnikov-de Haas effect

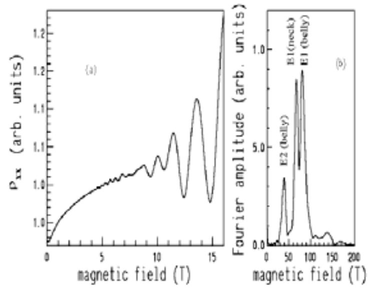


Figure 1. Shubnikov-de Haas oscillations (a) and its Fourier transform (b) measured at 4.2K for sample No.326.

Henriques et al. Brazil. J. of Phys. 29, 707 (1999)

Efekt Shubnikova-de Haasa

Shubnikov-de Haas effect

Gęstość stanów oscyluje - spada do 0 dla $\nu = n$ i jest największa dla $\nu \approx n + \frac{1}{2}$ - najprościej to zmierzyć w magnetooporze R_{xx}.

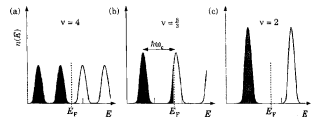
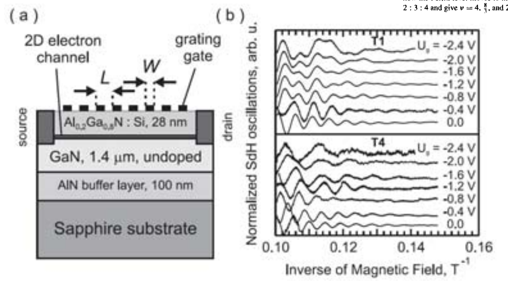


FIGURE 6.8. Occupation of Landau levels in a magnetic field neglecting the spin splitting, showing how the Fermi level moves to maintain a constant density of electrons. The fields are in the ratio 2 : 3 : 4 and give ν = 4, 8/3, and 2.



K. Nogajewski et al.,
Appl. Phys. Lett. 99, 213501 (2011)

Kropki kwantowe

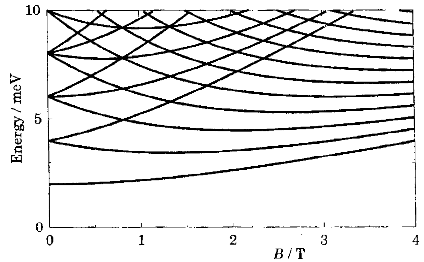


FIGURE 6.16. Energy levels in a magnetic field of a GaAs dot with a parabolic confining potential giving $\hbar\omega_0 = 2$ meV.

Kropki kwantowe

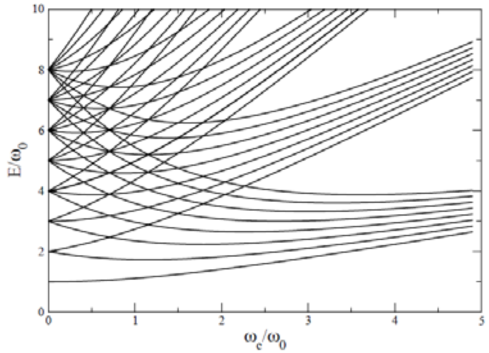


Figure 3.5: Fock-Darwin spectrum of symmetric quantum dot up to quantum number $n = 7$.

Clive Emary Theory of Nanostructures nanoskript.pdf

Potencjał harmoniczny 2D

$E_n^x = \hbar\omega_0\left(n_x + \frac{1}{2}\right)$ w kierunku x i taka sama w y

$E_n^y = \hbar\omega_0\left(n_y + \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{E_n = E_n^x + E_n^y = \hbar\omega_0(N+1)}$

Degeneracja? $N = n_x + n_y$

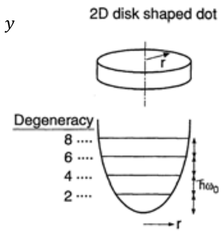


Fig. 5. Schematic model for the vertical dot with a harmonic lateral potential. The single-particle states are laterally confined into discrete equidistant 0D levels whose degeneracies are 2, 4, 6, 8, ⋯ including spin degeneracy from the lowest level.

Jpn. J. Appl. Phys. Vol. 36 (1997) pp. 3917–3923 Part 1, No. 6B, June 1997

Przypomnienie

Potencjał harmoniczny 2D

$E_n^x = \hbar\omega_0\left(n_x + \frac{1}{2}\right)$ w kierunku x i taka sama w y

$E_n^y = \hbar\omega_0\left(n_y + \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{E_n = E_n^x + E_n^y = \hbar\omega_0(N+1)}$

Degeneracja? $N = n_x + n_y$

$g_N = N + 1$

N	(n_x, n_y)
0	(0,0)
1	(1,0) (0,1)
2	(2,0) (1,1) (0,2)
3	(3,0) (2,1) (1,2) (0,3)

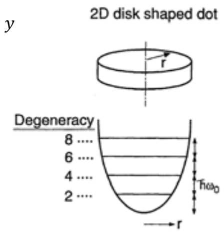
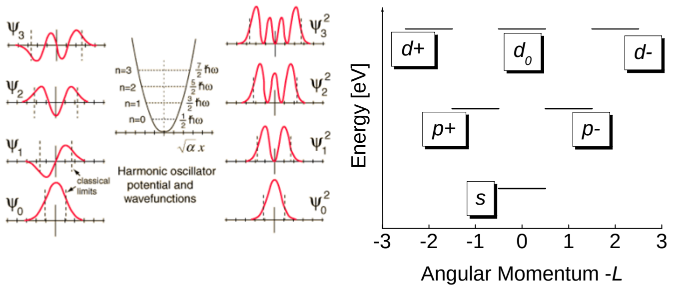


Fig. 5. Schematic model for the vertical dot with a harmonic lateral potential. The single-particle states are laterally confined into discrete equidistant 0D levels whose degeneracies are 2, 4, 6, 8, ⋯ including spin degeneracy from the lowest level.

Jpn. J. Appl. Phys. Vol. 36 (1997) pp. 3917–3923 Part 1, No. 6B, June 1997

Przypomnienie

Potencjał harmoniczny 2D



$n, m = 0,1,2...$
$L = n - m$ (elektron)

Przypomnienie

Adam Babiński

Kropki kwantowe

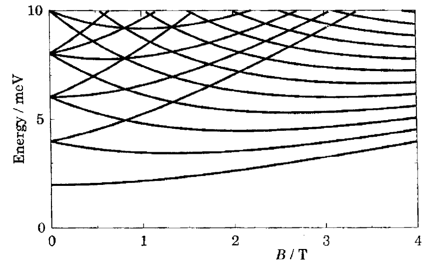


FIGURE 6.16. Energy levels in a magnetic field of a GaAs dot with a parabolic confining potential giving $\hbar\omega_0 = 2$ meV.

Kropki kwantowe

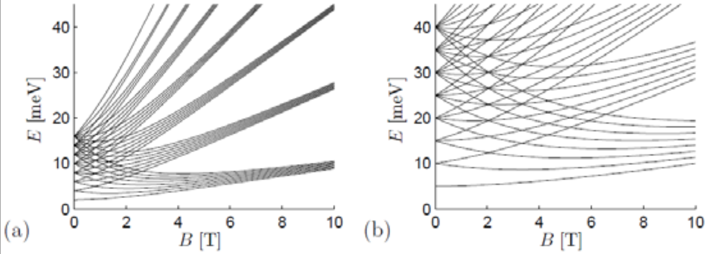


Figure 4.2: The single-particle energy levels [see Eq. (4.10)], without the Zeeman energy, as a function of the magnetic field for $m_r = 0.067$, and confinement energies $\hbar\omega_0 = 2$ meV (a) and $\hbar\omega_0 = 5$ meV (b). The states with $N_S = 2n_L + |l| \leq 7$ are drawn. The Landau-level formation with increasing B is clearly visible.

Sami Siljamaki Helsinki University of Technology, dissertation 2003

Kropki kwantowe

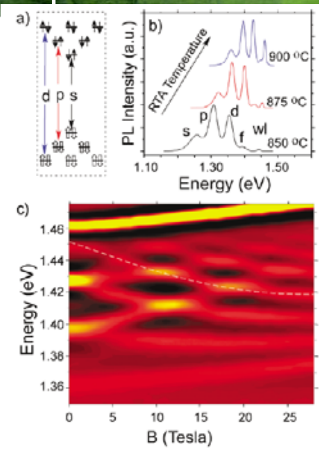
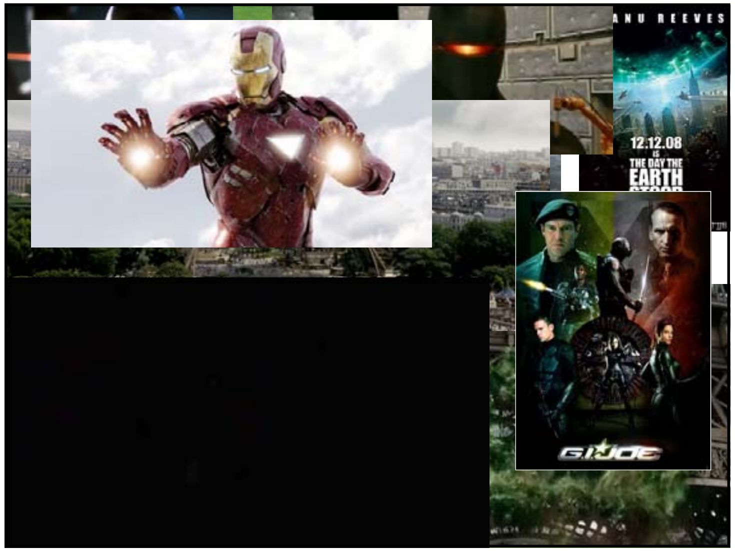


FIG. 1 (color). (a) Energy shell structure of electrons and holes for noninteracting two-dimensional harmonic oscillators (b) Emission spectra of the QD ensemble as a function of increasing annealing temperature (30 s anneals). Nominal excitation power density ~200 W/cm² (c) Surface plot describing evolution of PL (second derivative) spectrum as a function of magnetic field. Black, red, and yellow represent low, medium, and high emission intensity, respectively. Excitation power density is ~400 W/cm². All experiments performed at T = 4.2 K

Egzamin

Raymond et al. PRL 92, 187402 (2004)

Najwazniejsze wyniki



Nanotechnologia

małe > duże tylko mniejsze

ROZMIAR

Kształt

Wymiar 2D, 1D, 0D

Przejścia fazowe

Efekty powierzchniowe

Struktura energetyczna

Właściwości „fobowe" i „filowe"

Struktura krystaliczna

Reaktywność chemiczna

Ograniczenia kwantowe (quantum confinement)

Własności katalityczne

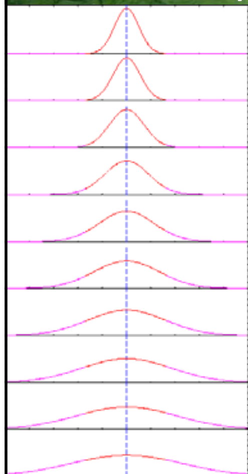
Własności optyczne

Właściwości mechanicz

Właściwości magnetyczne

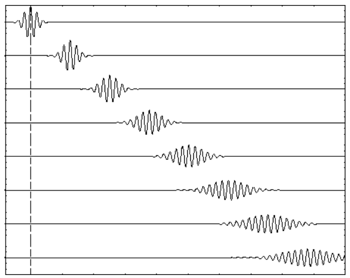
Nadprzewodnictwo

Pakiet falowy



$$\psi(x,0) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0x\right) \qquad \sigma = \frac{\hbar}{ma^2}$$

$$\boxed{\psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{1+i\sigma t}}\, e^{ik_0x - i\omega_0 t} \exp\left[-\frac{(x-v_0t)^2}{2a^2(1+i\sigma t)}\right]}$$



Pakiet falowy

$$\psi(x,0) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0x\right) \qquad \sigma = \frac{\hbar}{ma^2}$$

$$\boxed{\psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{1+i\sigma t}}\, e^{ik_0x - i\omega_0 t}\, \exp\left[-\frac{(x-v_0t)^2}{2a^2(1+i\sigma t)}\right]}$$

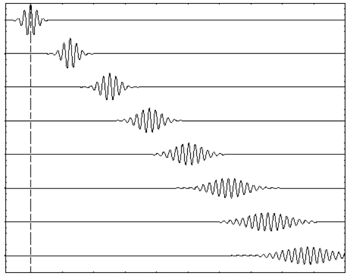
$\Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

$m_e = 9.11\ 10^{-31}$ kg

$h = 6.626\ 10^{-34}$ Js $= 4.136\ 10^{-15}$ eV s

$\hbar = 1.055\ 10^{-34}$ J s $= 6.582\ 10^{-16}$ eV s

$e = -1.602\ 10^{-19}$ C



Pasma w krysztale

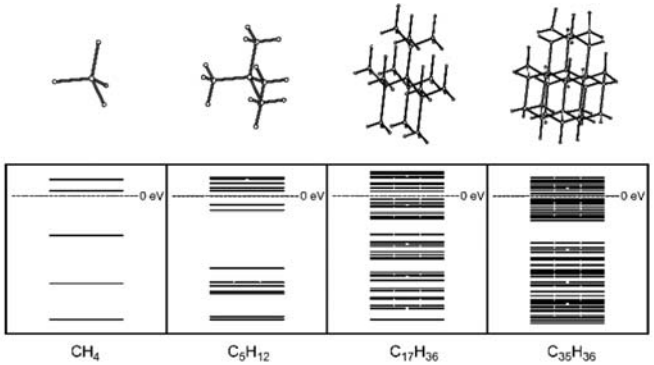


Fig. 2.3 Development of the diamond band gap

W. R. Fahrner (Editor) **Nanotechnology and Nanoelectronics**

Pasma energetyczne

Do optoelektroniki potrzebna jest przerwa prosta.

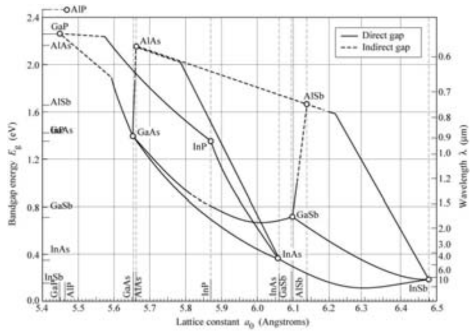


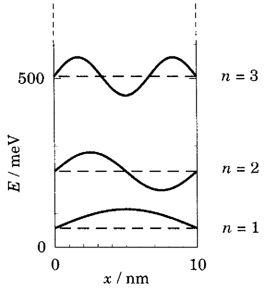
Fig. 12.6. Bandgap energy and lattice constant of various III–V semiconductors at room temperature (adopted from Tien, 1988).

Studnia nieskończona

Wewnątrz studni:

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x)\, e^{-i\omega t} \qquad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$$

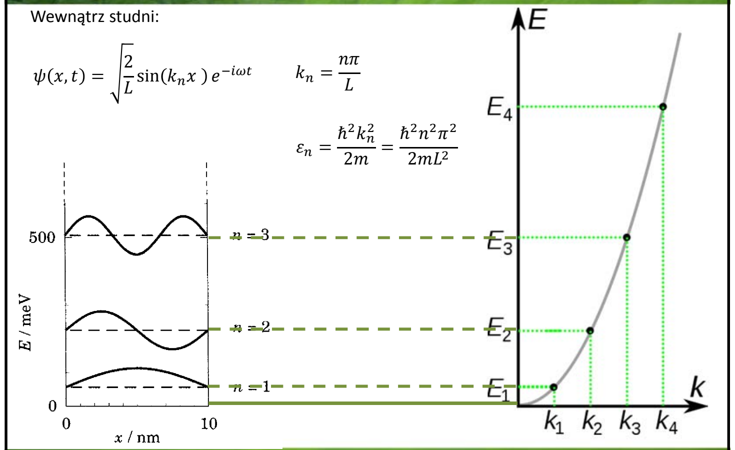


Studnia nieskończona

Wewnątrz studni:

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x)\, e^{-i\omega t} \qquad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$$

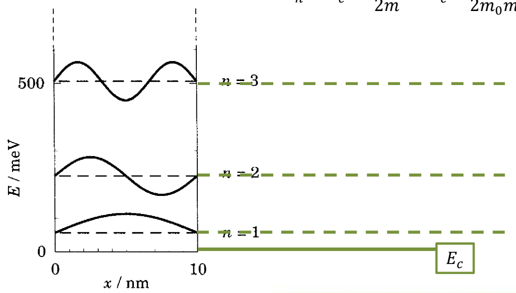


Studnia nieskończona

Wewnątrz studni:

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x)\, e^{-i\omega t} \qquad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\varepsilon_n = E_c + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = E_c + \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m_0 m^* L^2}$$



$$\varepsilon_3 = E_c + \frac{9\hbar^2\pi^2}{2m_0 m^* L^2}$$

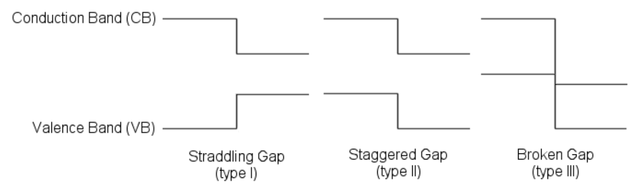
$$\varepsilon_2 = E_c + \frac{2\hbar^2\pi^2}{m_0 m^* L^2}$$

$$\varepsilon_1 = E_g + \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_0 m^* L^2}$$

Bandgap engineering

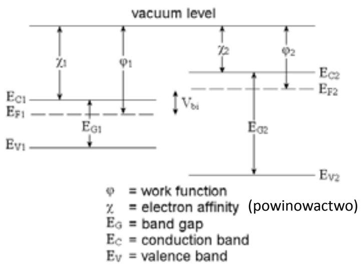
W jaki sposób możemy zmieniać strukturę pasmową heterostruktury:

- wybierając materiał
- kontrolując skład
- kontrolując naprężenie



Bandgap engineering

Valence band offset



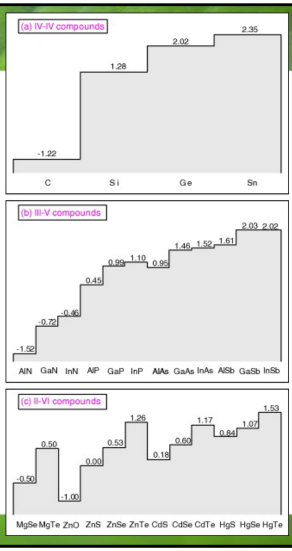
(powinowactwo)

$\Delta E_C = \chi_1 - \chi_2 = \Delta\chi$

$\Delta E_G = E_{G2} - E_{G1}$

Valence band offset: $\Delta E_V = \Delta E_G - \Delta\chi$

$\Delta E_G = \Delta E_C + \Delta E_V$



http://en.wikipedia.org/wiki/Heterojunction

Su-Huai Wei, Computational Materials Science, 30, 337–348 (2004)

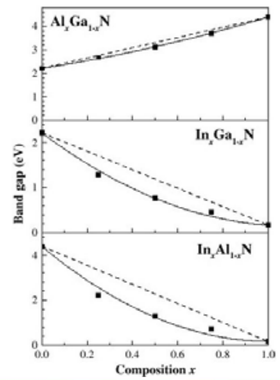
Bandgap engineering

W jaki sposób możemy zmieniać strukturę pasmową heterostruktury:
- wybierając materiał
- kontrolując skład
- kontrolując naprężenie

Prawo Vegarda:
dot. przerwy energetycznej stopu „binarnego”:

$$E = E_A(1-x) + E_B x - bx(1-x)$$

b - tzw. „bowing” przerwy energetycznej

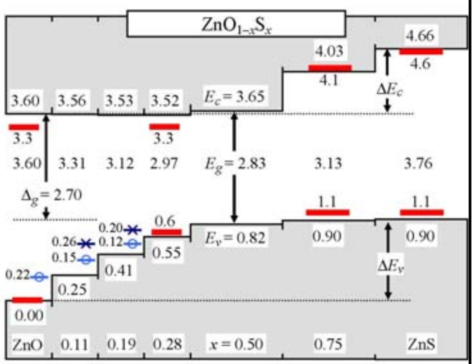


Z Dridi et al. Semicond. Sci. Technol. **18** No 9 (September 2003) 850-856

Bandgap engineering

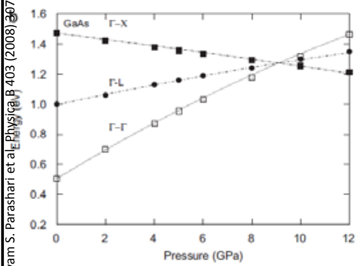
W jaki sposób możemy zmieniać strukturę pasmową heterostruktury:
- wybierając materiał
- kontrolując skład
- kontrolując naprężenie

Valence band offset



Bandgap engineering

W jaki sposób możemy zmieniać strukturę pasmową heterostruktury:
- wybierając materiał (np. GaAs/AlAs)
- kontrolując skład
- kontrolując naprężenie



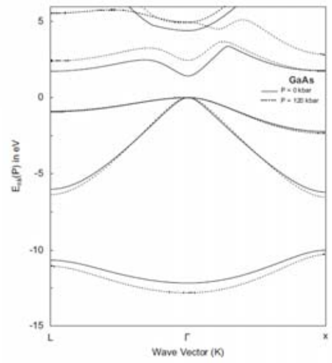


Fig. 3. Variation of the pressure dependent electronic energy band structure, $E_{nk}(P)$ for GaAs, at two different pressures, 0 kbar (solid line) and 120 kbar (dashed line).

Satyam S. Parashari et al. Physica B 403 (2008) 3077–3088

Elabsy et al. Physica B 405 (2010) 3709–3713

Bandgap engineering

W jaki sposób możemy zmieniać strukturę pasmową heterostruktury:
- wybierając materiał (np. GaAs/AlAs)
- kontrolując skład
- kontrolując naprężenie

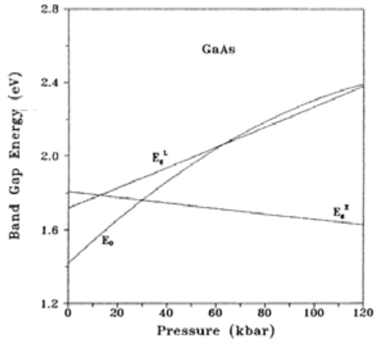
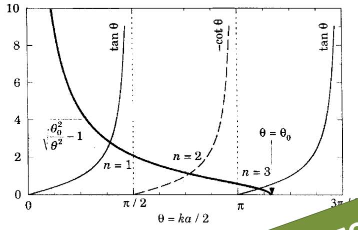


Fig. 2. Direct and indirect band gaps in GaAs as a function of pressure.

Studnia skończona

Prosty przypadek był…



Na ćwiczeniach

Studnia skończona

TA SAMA masa w barierze i studni:

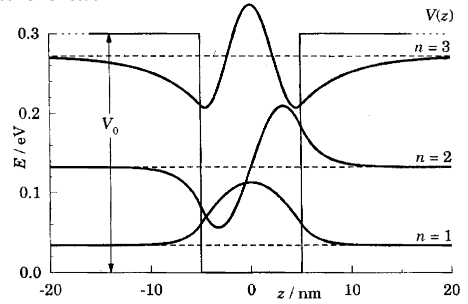


FIGURE 4.1. Finite square well in GaAs of depth $V_0 = 0.3$ eV and width $a = 10$ nm, showing three bound states.

Studnia skończona

Heterostruktury mogą mieć różne masy efektywne w różnych obszarach:

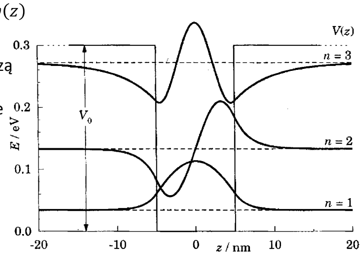
$$-\frac{\hbar^2}{2m_0 m^*}\frac{d^2}{dz^2}\psi(z)+V_0(z)\psi(z)=\varepsilon\psi(z)$$

Okazuje się, że zamiana $m^*\to m(z)$ nie jest dobrym rozwiązaniem problemu (równanie przestaje być hermitowskie). Trzeba to zrobić inaczej, np.:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{m(z)}\frac{d}{dz}\right]\psi(z)+V_0(z)\psi(z)=\varepsilon\psi(z)$$

Warunki zszycia na granicy heterostruktur muszą być zmodyfikowane (z rozważań na temat zachowania ładunku prądy płynące przez złącze $I_W=I_B$ wtedy $v_W=v_B$):

$$\frac{1}{m_B}\frac{d\psi}{dz}\bigg|_{z=\frac{a}{2}}=\frac{1}{m_W}\frac{d\psi}{dz}\bigg|_{z=\frac{a}{2}}$$



Studnia skończona

Wewnątrz studni: $-\frac{a}{2}<z<\frac{a}{2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0 m_W}\frac{d^2}{dz^2}\psi(z)=(E_n-E_W)\psi(z)$$

$$k_n=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mm_W(E_n-E_W)}$$

$$\psi(z,t)=C\begin{Bmatrix}\cos(k_n z)\\ \sin(k_n z)\end{Bmatrix}e^{-i\omega_n t}$$

$$\kappa_n=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mm_B(E_B-E_n)}$$

Bariera:

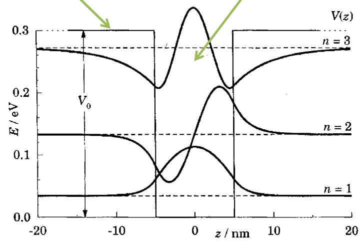
$$\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m\,m_B}=E_B-E_n=B$$

$$\psi(z)=D\exp(\pm\kappa_n z)$$

Warunki zszycia:

$$\frac{1}{m_B}\frac{d\psi}{dz}\bigg|_{z=\frac{a}{2}}=\frac{1}{m_W}\frac{d\psi}{dz}\bigg|_{z=\frac{a}{2}}$$

$$\frac{Ck}{m_W}\begin{cases}-\sin\left(k_n\frac{a}{2}\right)\\ \cos\left(k_n\frac{a}{2}\right)\end{cases}=-\frac{D\kappa}{m_B}\exp\left(k_n\frac{a}{2}\right)$$



Studnia skończona

INNA masa w barierze i studni:

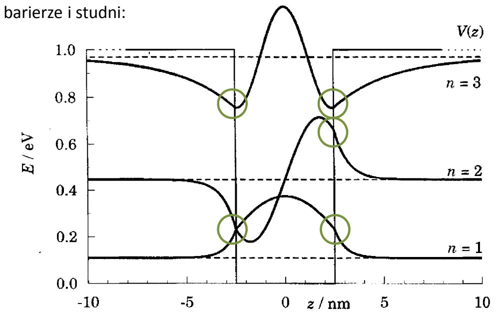


FIGURE 4.12. Finite square well of depth $V_0 = 1$ eV, width $a = 5$ nm along z, and effective masses $m_W = 0.067$ in the well and $m_B = 0.15$ in the barrier.

Struktury niskowymiarowe

$$\psi_{k_x,k_y,n}(x,y,z)=\exp(ik_x x)\exp(ik_y y)\,u_n(z)=\psi_{\boldsymbol{k},n}(\boldsymbol{r},z)=\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,u_n(z)$$

$$E_n(k_x,k_y)=\varepsilon_n+\frac{\hbar^2k_x^2}{2m}+\frac{\hbar^2k_y^2}{2m}\qquad E_n(\boldsymbol{k})=\varepsilon_n+\frac{\hbar^2\boldsymbol{k}^2}{2m}$$

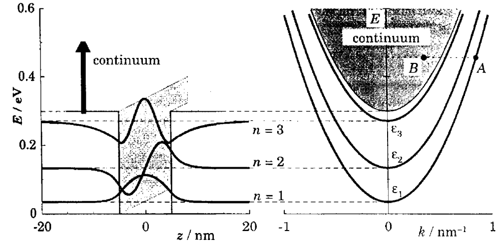
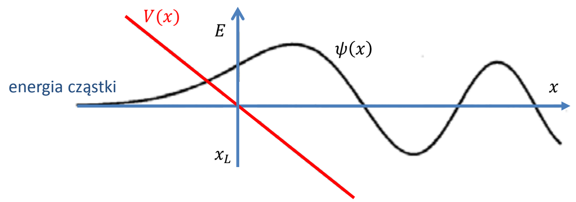


FIGURE 4.9. Quasi-two-dimensional system in a potential well of finite depth. Electrons with the same total energy can be bound in the well (A) or free (B).

Metoda WKB

Metoda przybliżona WKB (Wentzel – Krammers – Brillouin) – dla potencjału *wolnozmiennego*



$$\psi(x) \sim \frac{2}{\sqrt{k(x)}} \cos\left[\int_{x_L}^{x} k(x')dx' - \frac{\pi}{4}\right], \qquad x \gg x_L$$

$$\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp\left[-\int_{x_L}^{x} \kappa(x')dx'\right], \qquad x \ll x_L$$

Potencjał harmoniczny

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} + V(z)\right]\psi(z) = \varepsilon\psi(z) \qquad V(z) = \frac{1}{2}Kz^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 z^2 \qquad \varepsilon_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$$

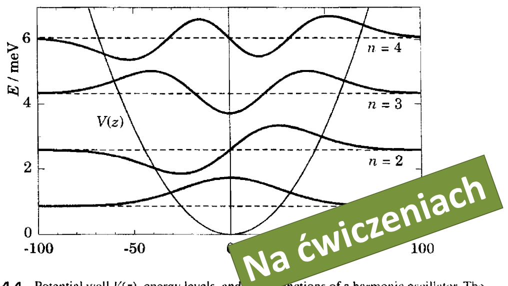


FIGURE 4.4. Potential well $V(z)$, energy levels, and ... functions of a harmonic oscillator. The potential is generated by a magnetic field of 1 T acting on electrons in GaAs.

Potencjał harmoniczny

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 z^2\right]\psi(z) = E\psi(z) \qquad \varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega_0} \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}z$$

$$\left(\frac{d}{d\xi} - \xi\right)\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\frac{\xi^2}{2}} = (-2\varepsilon_0 + 1)\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\frac{\xi^2}{2}} = 0 \qquad \Rightarrow -2\varepsilon_0 + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$$

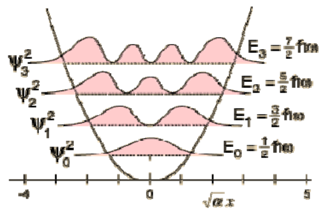
$$\varepsilon_n = n + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\psi_n(z) = A_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}z\right)\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}z^2\right)$$

H_n - wielomiany Hermite'a

$$A_n = \left(2^n n! \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}\right)^{-1/2}$$



Potencjał kulombowski 2D

NAJPIERW:
Potencjał kulombowski 3D w półprzewodniku o stałej dielektrycznej ε_r, masie efektywnej m^*:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$Ry = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m}{2\hbar^2} = \frac{\hbar^2}{2ma_B^2} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_B} = 13.6 \text{ eV}$$

$$a_B = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_0 e^2} = 0.5 \text{ Å}$$

$$E_n = -Ry\frac{1}{n^2}$$

$$E_n = -\left(\frac{m^*}{m_0}\right)\frac{1}{\varepsilon_r^2}Ry\frac{1}{n^2}$$

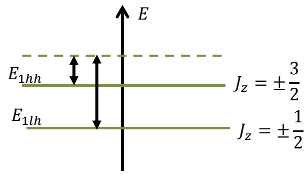
$$a_B^* = \frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0\hbar^2}{m_0 e^2}\left(\frac{m_0}{m^*}\right) = a_B\varepsilon_r\left(\frac{m_0}{m^*}\right)$$

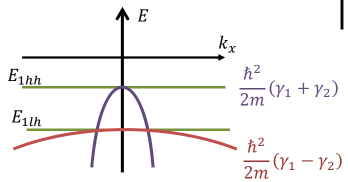
Komentarz o paśmie walencyjnym

Obecność studni zmieni a symetrię kryształu (np. studnia kwantowa na kierunku [001] odpowiada ciśnieniu jednoosiowemu przyłożonemu prostopadle do warstwy). Trzeba rozwiązać równanie $\boldsymbol{kp}$ (Chemla 1983):

$$E_{hh}(\boldsymbol{k}) = -\frac{\hbar^2}{2m}[(\gamma_1+\gamma_2)\boldsymbol{k}_\perp^2 + (\gamma_1 - 2\gamma_2)k_z^2]$$

$$E_{lh}(\boldsymbol{k}) = -\frac{\hbar^2}{2m}[(\gamma_1-\gamma_2)\boldsymbol{k}_\perp^2 + (\gamma_1 + 2\gamma_2)k_z^2]$$



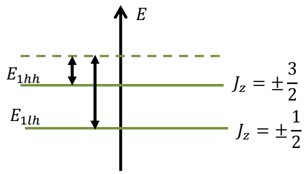


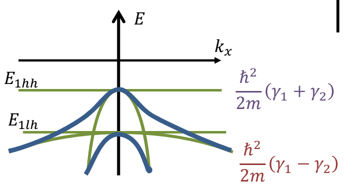
Komentarz o paśmie walencyjnym

Obecność studni zmieni a symetrię kryształu (np. studnia kwantowa na kierunku [001] odpowiada ciśnieniu jednoosiowemu przyłożonemu prostopadle do warstwy). Trzeba rozwiązać równanie $\boldsymbol{kp}$ (Chemla 1983):

$$E_{hh}(\boldsymbol{k}) = -\frac{\hbar^2}{2m}[(\gamma_1+\gamma_2)\boldsymbol{k}_\perp^2 + (\gamma_1 - 2\gamma_2)k_z^2]$$

$$E_{lh}(\boldsymbol{k}) = -\frac{\hbar^2}{2m}[(\gamma_1-\gamma_2)\boldsymbol{k}_\perp^2 + (\gamma_1 + 2\gamma_2)k_z^2]$$





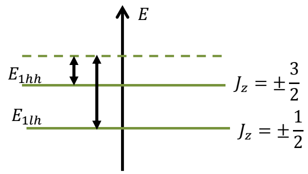
PoLDS 385

Komentarz o paśmie walencyjnym

Obecność studni zmieni a symetrię kryształu (np. studnia kwantowa na kierunku [001] odpowiada ciśnieniu jednoosiowemu przyłożonemu prostopadle do warstwy). Trzeba rozwiązać równanie $\boldsymbol{kp}$ (Chemla 1983):

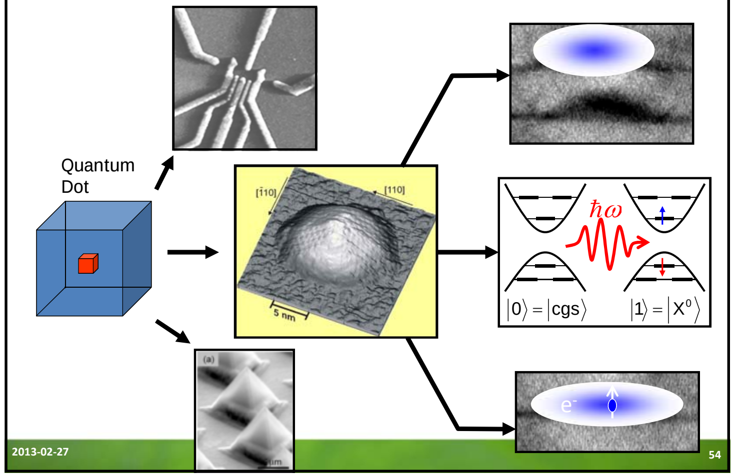
$$E_{hh}(\boldsymbol{k}) = -\frac{\hbar^2}{2m}[(\gamma_1+\gamma_2)\boldsymbol{k}_\perp^2 + (\gamma_1 - 2\gamma_2)k_z^2]$$

$$E_{lh}(\boldsymbol{k}) = -\frac{\hbar^2}{2m}[(\gamma_1-\gamma_2)\boldsymbol{k}_\perp^2 + (\gamma_1 + 2\gamma_2)k_z^2]$$



Wynika z tego, że dziury ciężkie mają „lekką” masę $\frac{m}{(\gamma_1+\gamma_2)}$ na płaszczyźnie $(x-y)$, natomiast dziury lekkie mają „ciężką” masę $\frac{m}{(\gamma_1-\gamma_2)}$

Kropki kwantowe



Sferyczne kropki kwantowe

Przerwa energetyczna w sferycznych kropkach kwantowych [Brus, L. E. J. Phys. Chem. 1986, **90**, 2555, Brus. L. E. J. Chem. Phys. 1984, **80**, 4403]

$$E_g^*(R) = E_g^{bulk} + \frac{\hbar^2\pi^2}{2R^2m_0}\left(\frac{1}{m_e}+\frac{1}{m_h}\right) - \frac{1.8e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$$

R – średnica

Lokalizacja kwantowa (quantum localization): mniejsza cząstka – więcej wektorów k potrzebnych do opisu stanu nośnika. Czyli cząstka w studni! ZWIĘKSZA energie przerwy

Część kulombowska oddz. $e-h$ z uwzględnieniem polaryzacji (sfera) OBNIŻA energię. Potencjał obliczony dla funkcji w postaci $\Psi_n(r)$ $(n=1)$:

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$$

$$\Psi_n(r) = \frac{C_n}{r}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)$$

Sferyczne kropki kwantowe

Przerwa energetyczna w sferycznych kropkach kwantowych [Brus, L. E. J. Phys. Chem. 1986, **90**, 2555, Brus. L. E. J. Chem. Phys. 1984, **80**, 4403]

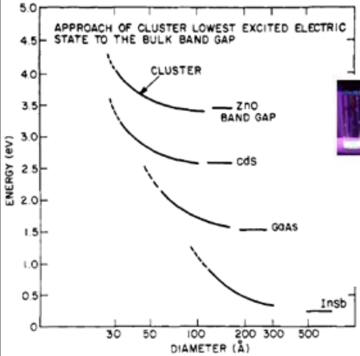
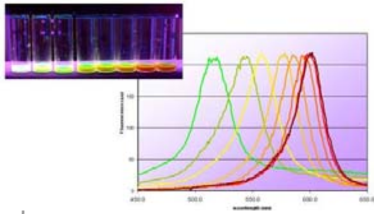


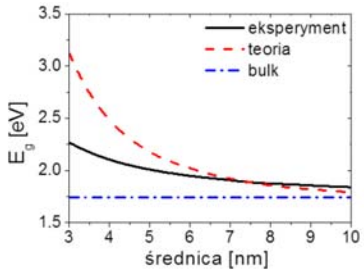
Figure 5. Calculated energy of the cluster lowest excited electronic state in relation to the bulk band gap. Adapted from ref 31.



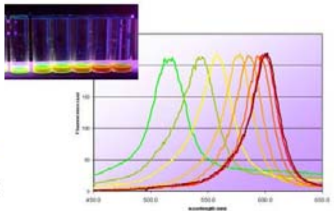
http://www.sussex.ac.uk/Users/kaf18/QDSpectra.jpg

Sferyczne kropki kwantowe

Przerwa energetyczna w sferycznych kropkach kwantowych [Brus, L. E. J. Phys. Chem. 1986, **90**, 2555, Brus. L. E. J. Chem. Phys. 1984, **80**, 4403]



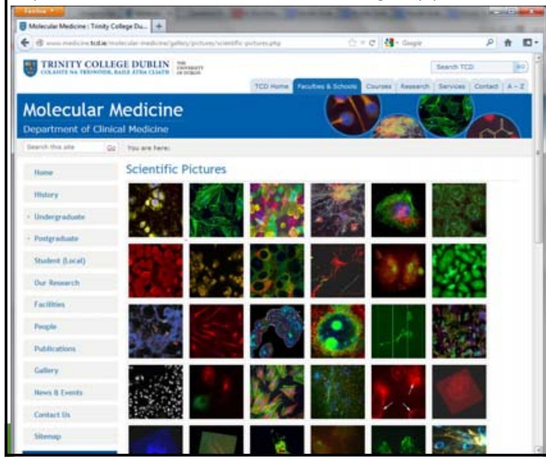
Przerwa energetyczna CdSe

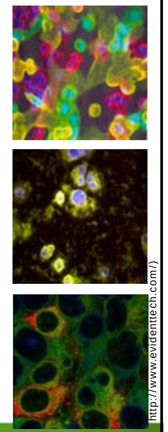


http://www.sussex.ac.uk/Users/kaf18/QDSpectra.jpg

Sferyczne kropki kwantowe

http://www.medicine.tcd.ie/molecular-medicine/gallery/pictures/scientific-pictures.php

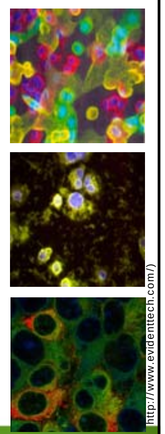




http://www.evidenttech.com/)

Sferyczne kropki kwantowe

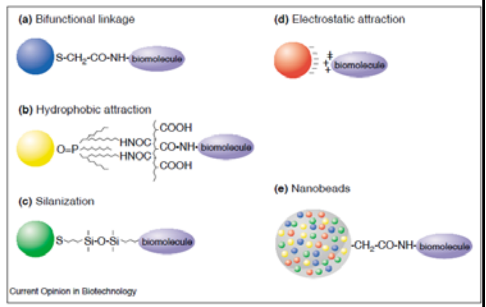
http://www.microscopyu.com/articles/fluorescence/index.html



http://www.evidenttech.com/)

Sferyczne kropki kwantowe

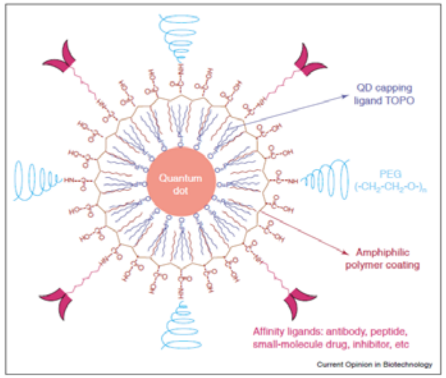
Schematic illustration of bioconjugation methods. **(a)** Use of a bifunctional ligand such as mercaptoacetic acid for linking QDs to biomolecules [8••]. **(b)** TOPO-capped QDs bound to a modified acrylic acid polymer by hydrophobic forces. **(c)** QD solubilization and bioconjugation using a mercaptosilane compound [7••]. **(d)** Positively charged biomolecules are linked to negatively charged QDs by electrostatic attraction [9]. **(e)** Incorporation of QDs in microbeads and nanobeads [20••].



Luminescent quantum dots for multiplexed biological detection and imaging
W. Chan et al. Current Opinion in Biotechnology 2002, 13:40–46

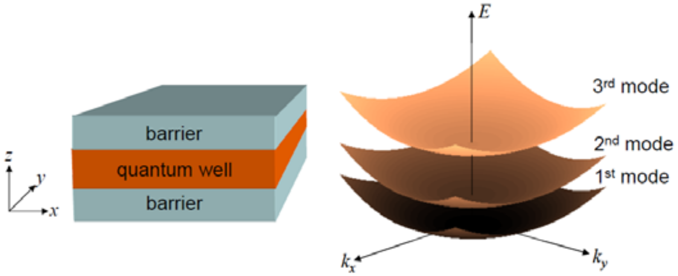
Sferyczne kropki kwantowe

In vivo molecular and cellular imaging with quantum dots Xiaohu Gao Current Opinion in Biotechnology 2005, 16:63–72



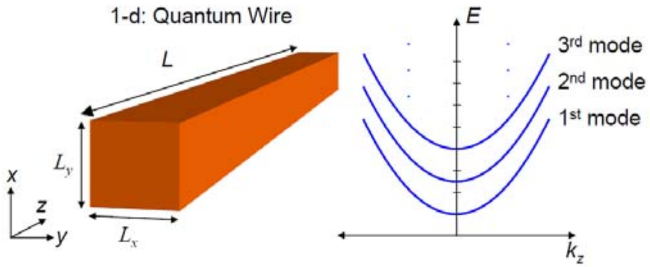
The structure of a multifunctional QD probe. Schematic illustration showing the capping ligand TOPO, an encapsulating copolymer layer, tumor-targeting ligands (such as peptides, antibodies or small-molecule inhibitors), and polyethylene glycol (PEG).

Studnie 2D i 3D



Marc Baldo MIT OpenCourseWare Publication May 2011

Druty kwantowe



Marc Baldo MIT OpenCourseWare Publication May 2011

Rachunek zaburzeń z czasem

Szczególne rozwiązania równania Schrödingera

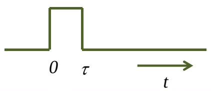
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$$

Potencjał niezależny od czasu

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \qquad \psi(x,t) = A\varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

Potencjał ~~nie~~zależny od czasu $H = H_0 + V(t)$

Najprostszy przypadek: $V(t) = \begin{cases} W(t) & \text{dla } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ i } t > \tau \end{cases}$



Potencjał harmoniczny 2D

Szkic dowodu

Funkcja Blocha nośnika w krysztale::

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{n,k} c_{n,k}u_{n,k}(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Dla elektronu:

$$\Psi_c(\vec{r}) \approx \sum_{k} c_{1,k}u_{\Gamma_6,0}(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}} = u_{\Gamma_6,0}(\vec{r})F_e(\vec{r})$$

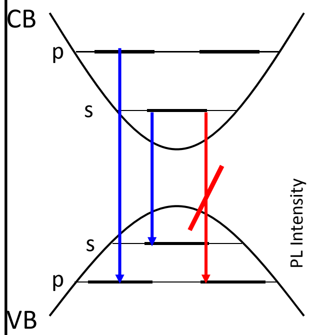
Dla dziury:

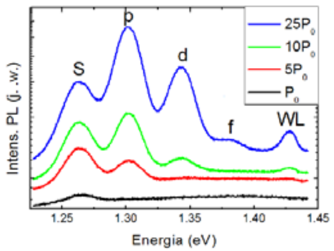
$$\Psi_v(\vec{r}) \approx \sum_{J_z=\pm 3/2,\pm 1/2,k} c_{J_z,k}u_{\Gamma_8,J_z}(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{J_z=\pm 3/2,\pm 1/2,k} u_{\Gamma_8,J_z}(\vec{r})F_{J_z}(\vec{r})$$

Dipolowe przejścia optyczne międzypasmowe:

$$\langle\Psi_c(\vec{r})|\vec{p}|\Psi_{v,J_z}(\vec{r})\rangle = \underbrace{\langle u_{\Gamma_6,0}(\vec{r})|u_{\Gamma_8,J_z}(\vec{r})\rangle}_{=0}\langle F_e(\vec{r})|\vec{p}|F_{J_z}(\vec{r})\rangle + \langle u_{\Gamma_6,0}(\vec{r})|\vec{p}|u_{\Gamma_8,J_z}(\vec{r})\rangle\langle F_e(\vec{r})|F_{J_z}(\vec{r})\rangle$$

Potencjał harmoniczny 2D





Zależność od mocy pobudzania widm fotoluminescencji otrzymanych w temperaturze bliskiej temperatury ciekłego helu (ok. 5 K) dla licznego (wielomilionowego) zbioru kropek kwantowych InAs/GaAs.

PODSUMOWANIE – złota reguła Fermiego

Prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu:

$W(t) = W$
$0 \le t \le \tau$

$$\boxed{P_{mn} = \frac{w_{mn}}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle m|W|n\rangle|^2\delta(E_m - E_n)}$$

Przejścia są możliwe tylko do stanów $E_m = E_n$

$W(t) = w^{\pm}e^{\pm i\omega t}$
$0 \le t \le \tau$

$$\boxed{P_{nm} = \frac{w_{nm}}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle n|w^{\pm}|m\rangle\right|^2\delta(E_n - E_m \pm \hbar\omega)}$$

Przejścia są możliwe tylko do stanów $E_m = E_n \pm \hbar\omega$

Zaburzenie w postaci fali elektromagnetycznej.

$$\boxed{A_{nm} = \frac{\omega_{nm}{}^3 e^2}{3\pi\varepsilon_0\hbar c^3}|\langle m|\vec{r}|n\rangle|^2 = \frac{4\alpha}{3}\frac{\omega_{nm}{}^3}{c^2}|\langle m|\vec{r}|n\rangle|^2}$$

$$\boxed{P_{nm} = A_{nm}\delta(E_n - E_m \pm \hbar\omega)}$$

PODSUMOWANIE – złota reguła Fermiego

Szybkość zmian – czyli prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu – ze stanu początkowego $|i\rangle$ do końcowego $|f\rangle$ dane jest wzorem:

$$P_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|W|i\rangle|^2 \rho(E_f)$$

W - oddziaływanie z polem

$\rho(E_f)$ - gęstość stanów końcowych

Zaburzenie W nie musi być w postaci fali elektromagnetycznej.

THE ARTICLE

Hidden symmetries in the energy levels of excitonic 'artificial atoms'

M. Bayer*, O. Stern*, P. Hawrylak*†, S. Fafard† & A. Forchel*

** Technische Physik, Universität Würzburg, Am Hubland, D-97074 Würzburg, Germany*
† Institute for Microstructural Science, National Research Council of Canada, Ottawa, K1A OR6, Canada

NATURE | VOL 405 | 22 JUNE 2000 | www.nature.com

THE ARTICLE

- jakie są to kropki, jakich energii luminescencji się spodziewamy?
- jaką metodą otrzymano te kropki? Jak je przygotowano do eksperymentu i dlaczego było to konieczne?
- dlaczego pomiary są w temperaturach helowych? Jakie są skale energii?
- w jaki sposób opisane są procesy zachodzące w kropkach? Czy umiesz przeczytać hamiltonian „słowami"?
- jakiej energii używamy do pobudzania?
- co się zmienia z mocą pobudzania?
- widmo emisyjne opisane jest „złotą regułą Fermiego" – o co chodzi?
- dlaczego niektóre linie „gasną", a inne „się pojawiają" jak świecimy coraz mocniej?
- dlaczego jest mowa o „sztucznych atomach"? Jaki jest czas życia (rozpadu?) takiego atomu? Jak wygląd „szereg promieniotwórczy" sztucznych atomów?
- o jakie ukryte symetrie chodzi w artykule?
- do czego można by wykorzystać obserwowane efekty?

THE ARTICLE

NATURE | VOL 405 | 22 JUNE 2000 | www.nature.com

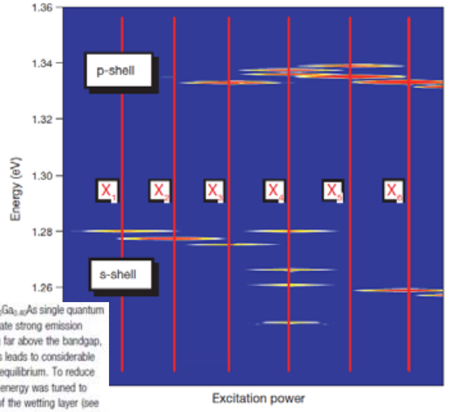
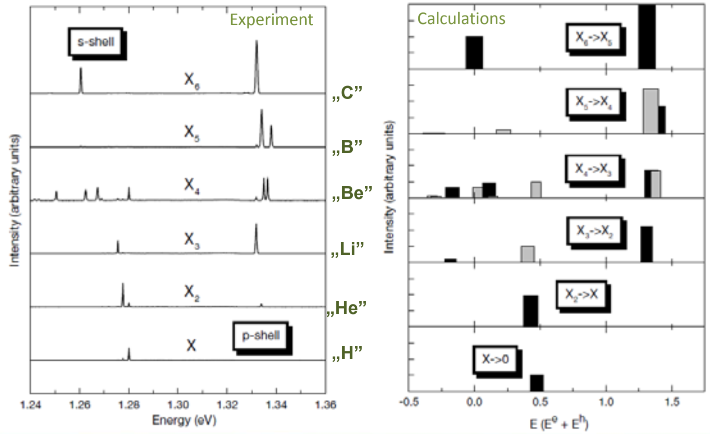


Figure 3 Contour plot of the variation of the emission of an $In_{0.60}Ga_{0.40}As$ single quantum dot with excitation power and with energy. Bright regions indicate strong emission intensities, blue regions low intensities. When optically exciting far above the bandgap, carrier relaxation involving multiple phonon emission processes leads to considerable sample heating, which causes the system to be in strong non-equilibrium. To reduce heating, a Ti-sapphire laser was used as excitation source. Its energy was tuned to $E = 1.470$ eV, corresponding to emission close to the bottom of the wetting layer (see Fig. 2). The excitation power P_{ex} was varied between 50 nW and 5 mW.

THE ARTICLE



Gęstość stanów

Gęstość stanów Ilość stanów na jednostkę energii $\rho^{nD}(E)$ (zależy od ilości wymiarów)

Gęstość stanów w przestrzeni k o wymiarach n (w jednostkowej objętości) $\rho_k^{nD} = 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n$

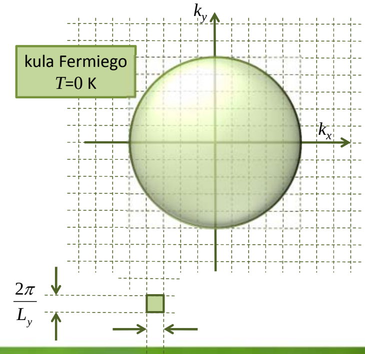
Przypadek 3D

$$\rho^{3D}(E)dE = \rho_k^{3D}d\vec{k} = 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 4\pi k^2 dk$$

Dla pasma sferycznego i parabolicznego:

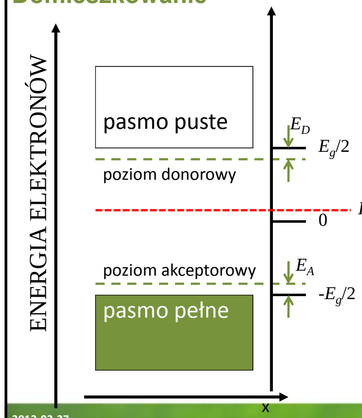
$$\rho_c^{3D}(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_0 m_c^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E - E_c}$$

$$\rho_v^{3D}(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_0 m_h^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E_v - E}$$



Domieszki i defekty

Domieszkowanie



Koncentracja nośników w półprzewodniku niesamoistnym

Rozważmy półprzewodnik, w którym:

N_A – koncentracja akceptorów

N_D – koncentracja donorów

p_A – koncentracja neutralnych akceptorów

n_D – koncentracja neutralnych donorów

n_c – koncentracja elektronów w paśmie przewodnictwa

p_v – koncentracja dziur w paśmie walencyjnym

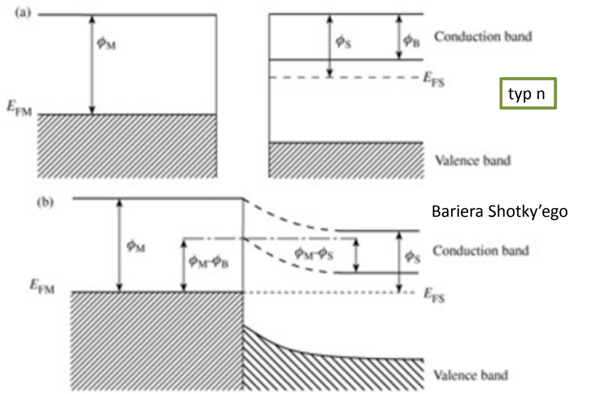
Z warunku neutralności kryształu:

$$n_c + (N_A - p_A) = p_v + (N_D - n_D)$$

$$n_c + n_D = (N_D - N_A) + p_v + p_A$$

Konstrukcja diagramów pasmowych

Złącze metal-półprzewodnik ($\phi_M > \phi_S$)



Electrical properties of materials Solymar, Walsh

Konstrukcja diagramów pasmowych

Złącze metal-półprzewodnik ($\phi_M > \phi_S$)

Bariera Shottky'ego

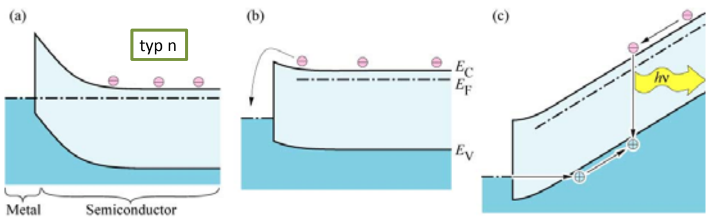
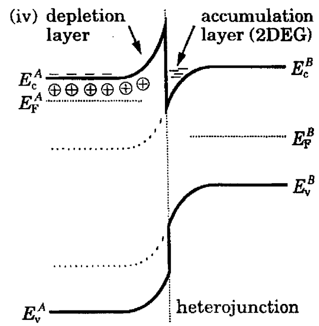


Fig. 1.2. Band diagram of a Schottky diode under (a) equilibrium conditions, (b) forward bias, and (c) strong forward bias. Under strong forward bias, minority carrier injection occurs making possible near-bandgap light emission.

E. F. Schubert
Light-Emitting Diodes (Cambridge Univ. Press)
www.LightEmittingDiodes.org

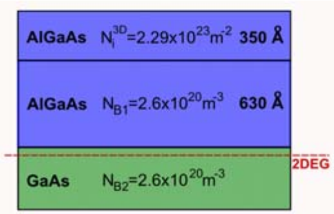
Konstrukcja diagramów pasmowych

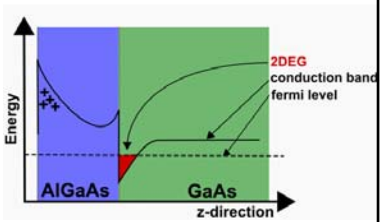


Przesuwamy tymczasowe linie $\bar{E}_c^A$ w E_c^A i $\bar{E}_v^A$ w E_v^A, a następnie łączymy ze sobą w miejscu heterozłącza. Pojawiające się nieciągłości dopełniają szkic heterozłącza.

Studnia trójkątna

Metoda przybliżona WKB (Wentzel – Krammers – Brillouin) – dla potencjału *wolnozmiennego*





http://www.phys.unsw.edu.au/QED/research/2D_scattering.htm

$$E_n = \left[\frac{3}{2}\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)\right]^{2/3}\left[\frac{(eF\hbar)^2}{2m}\right]^{1/3}$$

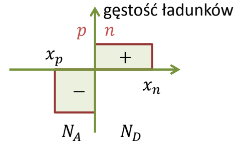
Domieszkowanie półprzewodników

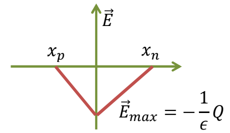
Zasada zachowania ładunku

$$eN_Ax_p = eN_Dx_n = Q$$

Szerokość złącza w

$$w = x_n - x_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon U_0}{e(N_A+N_D)}}\left(\sqrt{\frac{N_A}{N_D}}+\sqrt{\frac{N_D}{N_A}}\right)$$



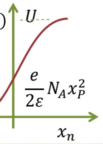


Jeśli np. $N_A \gg N_D$ (domieszkowanie na typ p) wtedy:

$w = \sqrt{\frac{2\varepsilon U_0}{eN_D}}$ i $|x_n| > |x_p|$

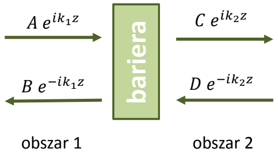
Szerokość tym większa im mniej jest donorów. (w przypadku $N_A \ll N_D$ jest odwrotnie!)

$$U_0 = \frac{e}{2\varepsilon}(N_Ax_P^2 + N_Dx_n^2)$$



Np. $N_D = 10^{15}$cm^{-3} dla typowego $U_0 = 0.3$ V mamy $w \approx 180$ nm. Jeśli uwzględnimy, że zmiana ładunku jest bardziej stopniowa $w \approx 1\ \mu m$

Tunelowanie



$$\binom{C}{D} = T^{(21)}\binom{A}{B} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12}^* & T_{11}^* \end{pmatrix}\binom{A}{B}$$

$$r = -\frac{T_{12}^*}{T_{11}^*} \qquad t = -\frac{1}{T_{11}^*}$$

$$T^{(21)}(0) = \begin{pmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix}$$

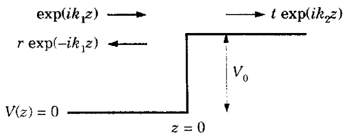
$$T^{(21)}(d) = \begin{pmatrix} e^{-ik_2d} & 0 \\ 0 & e^{ik_2d} \end{pmatrix} T^{(21)}(0) \begin{pmatrix} e^{ik_1d} & 0 \\ 0 & e^{ik_1d} \end{pmatrix} = A_2^{-1}(d)\,T(0)\,A_1(d)$$

W drugą stronę: $\binom{B}{A} = T^{(12)}\binom{D}{C}$

$$T^{(12)}(0) = \begin{pmatrix} 1/t^* & r/t \\ r^*/t^* & 1/t \end{pmatrix}$$

Tunelowanie

Przykłady:



$$T + R = 1$$

$$T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

$$R = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2$$

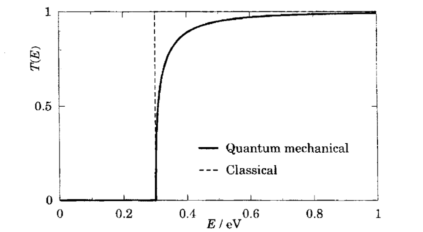


FIGURE 5.3. Transmission coefficient $T(E)$ as a function of the energy E of the incident electron for a step 0.3 eV high in GaAs. The broken line is the classical result.

Tunelowanie

Przykłady:

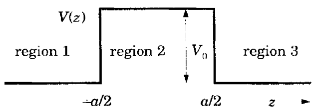


FIGURE 5.5. Potential barrier with $V(z) = V_0$ for $|z| < a/2$ and $V(z) = 0$ elsewhere.

Poziomy nieskończonej anty-studni!

$E > V_0$

$$T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 a} = \left[1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2 k_2 a\right]^{-1}$$

$E < V_0$

$$T = \frac{4k_1^2 \kappa_2^2}{4k_1^2 \kappa_2^2 + (k_1^2 + \kappa_2^2)^2 \sinh^2 \kappa_2 a} = \left[1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2 \kappa_2 a\right]^{-1}$$

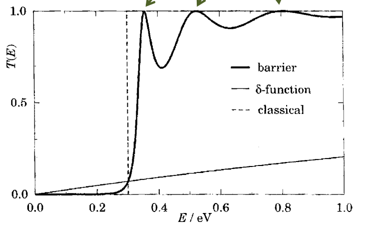


FIGURE 5.6. Transmission coefficient $T(E)$ as a function of energy E for a square potential barrier of height $V_0 = 0.3$ eV and thickness $a = 10$ nm in GaAs. The thin curve is for a δ-function barrier of the same strength $S = V_0 a$, and the broken curve is the classical result for a barrier of the same height.

Tunelowanie

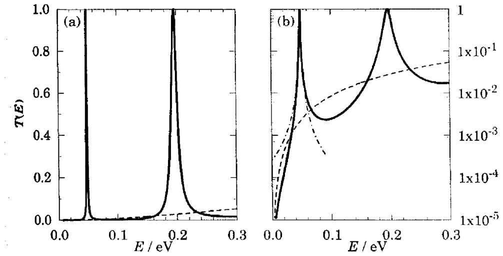


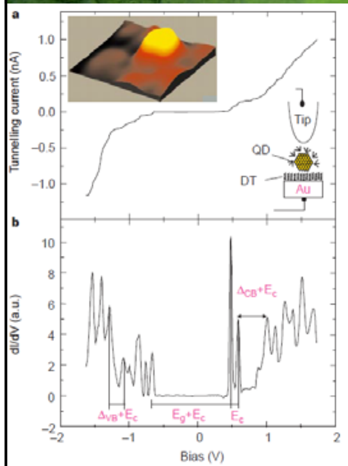
FIGURE 5.11. Transmission coefficient of a resonant-tunnelling structure on (a) linear and (b) logarithmic scales. The barriers are δ-functions of strength 0.3 eV × 5 nm separated by 10 nm. The solid curve is $T(E)$ for the whole structure, the dashed curve shows the square of $T(E)$ for a single barrier and would apply to the double-barrier structure if there were no resonance, and the chain curve is the Lorentzian approximation to the lowest resonance.

$$T \approx \frac{T_{pk}}{1 + \left(\dfrac{\delta\phi}{\frac{1}{2}\phi_0}\right)^2}$$ profil Lorentza

$$\phi_0 = T_L + T_R$$

$$T_{pk} = \frac{T_L T_R}{\left(1 - \sqrt{R_L R_R}\right)^2} \approx \frac{4 T_L T_R}{(T_L + T_R)^2}$$

Tunelowanie



letters to nature

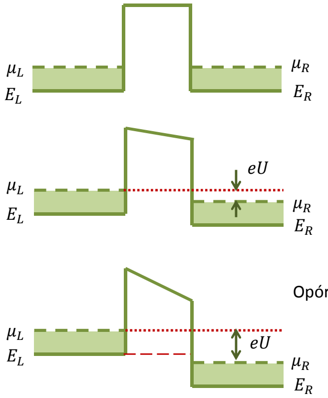
Identification of atomic-like electronic states in indium arsenide nanocrystal quantum dots

Uri Banin*, YunWei Cao*, David Katz† & Oded Millo†

* *Department of Physical Chemistry and the Farkas Center for Light Induced Processes,* † *Racah Institute of Physics, The Hebrew University, Jerusalem 91904, Israel*

Figure 1 Scanning tunnelling microscopy and spectroscopy of a single InAs nanocrystal 32 Å in radius, acquired at 4.2 K. The nanocrystal quantum dots (QD) are linked to the gold substrate by hexane dithiol molecules (DT), as shown schematically in the right inset. Left inset, a 10 × 10 nm STM topographic image, showing the nanocrystal. For measuring the I–V characteristics, the STM tip was positioned above the QD, thus realizing a double-barrier tunnel junction configuration. **a**, The tunnelling I–V characteristic, exhibiting single-electron tunnelling effects. **b**, The tunnelling conductance spectrum, dI/dV versus V, obtained by numerical differentiation of the I–V curve (a.u., arbitrary units). The arrows depict the main energy separations: E_c is the single-electron charging energy, E_g is the nanocrystal bandgap, and Δ_{VB} and Δ_{CB} are the spacing between levels in the valence and conduction bands, respectively.

Kwant przewodnictwa



Dla metali $\mu_L = \mu + \frac{1}{2}eU$ i $\mu_R = \mu - \frac{1}{2}eU$:

$$f(E,\mu_L) - f(E,\mu_R) \approx$$
$$\approx eU\frac{\partial f(E,\mu)}{\partial \mu} = -eU\frac{\partial f(E,\mu)}{\partial E}$$

$$I = \frac{2e^2U}{h}\int_{E_L}^{\infty}\frac{\partial f(E,\mu)}{\partial E}T(E)dE \approx$$

$$G = \frac{dI}{dU} = \frac{2e^2}{h}\int_{E_L}^{\infty}\frac{\partial f(E,\mu)}{\partial E}T(E)dE \approx \frac{2e^2}{h}T(\mu)$$

Opór jest skończony nawet dla idealnego przewodnika!

$\frac{e^2}{h} = 38{,}7\ \mu S$ $\qquad$ $\frac{h}{e^2} = 25{,}8\ k\Omega$

Kwant przewodnictwa (w simensach)

Kwant przewodnictwa

$$G = \frac{dI}{dU} = \frac{2e^2}{h}\int_{E_L}^{\infty}\frac{\partial f(E,\mu)}{\partial E}T(E)dE \approx \frac{2e^2}{h}T(\mu) = 2G_0T(\mu)$$

$\frac{e^2}{h} = 38{,}7\ \mu S$

Wzór Landauera (*Landauer formula*) – gdy mamy do czynienia z wieloma kanałami przewodnictwa

$$G = G_0\sum_n T_n(\mu) \approx NG_0$$

N to suma różnych „pełnych" kanałów przewodnictwa np. dwa różne spiny dają $N = 2$

Dla $T = const$ dostajemy prawo Ohma.

Kwant przewodnictwa

$$G = \frac{dI}{dU} = \frac{2e^2}{h}\int_{E_L}^{\infty}\frac{\partial f(E,\mu)}{\partial E}T(E)dE \approx \frac{2e^2}{h}T(\mu) = G_0T(\mu)$$

$\frac{e^2}{h} = 38{,}7\ \mu S$

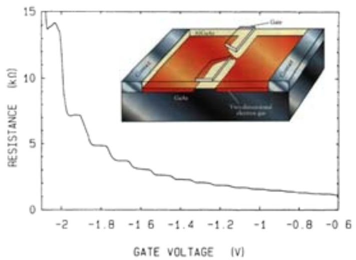


FIG. 1. Point-contact resistance as a function of gate voltage at 0.6 K. Inset: Point-contact layout.

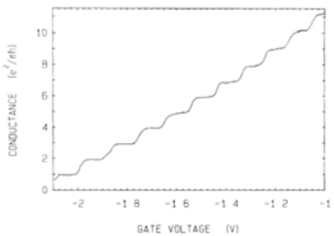
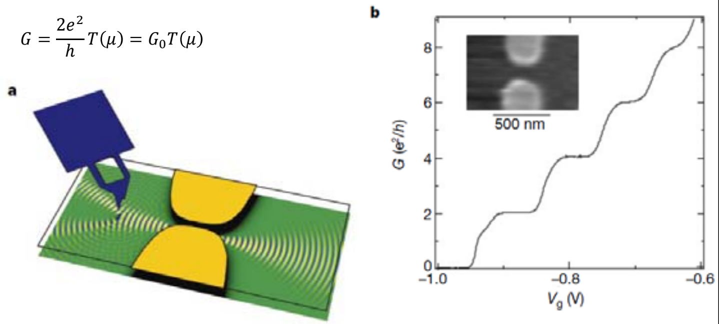


FIG. 2. Point-contact conductance as a function of gate voltage, obtained from the data of Fig. 1 after subtraction of the lead resistance. The conductance shows plateaus at multiples of $e^2/\pi\hbar$.

B. J. van Wees et al. *Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas* Phys. Rev. Lett. **60**, 848–850 (1988)

Kwant przewodnictwa

$$G = \frac{2e^2}{h}T(\mu) = G_0T(\mu)$$



M. A. Topinka et al. *Coherent branched flow in a two-dimensional electron gas* Nature 410, 183 (2001)

Kwant przewodnictwa

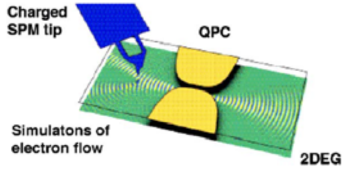


Fig. 1. Schematic diagram showing a negatively charged SPM tip positioned above a quantum point contact (QPC) formed in a two-dimensional electron gas (2DEG) by electrostatic gates. Simulations of electron flow in the diagram show how electron waves are scattered by the depleted disc beneath the tip Topinka et al. [16].

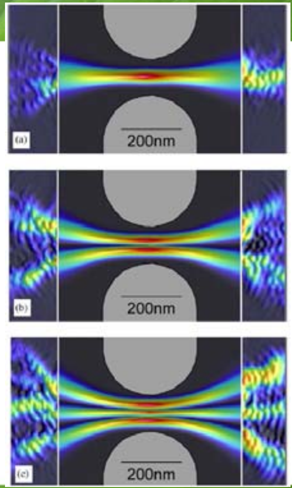
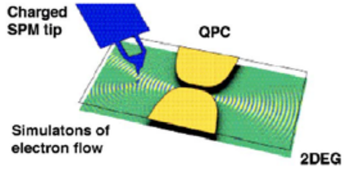
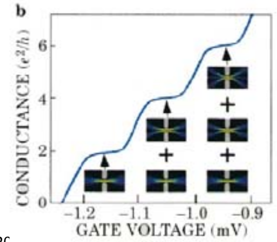


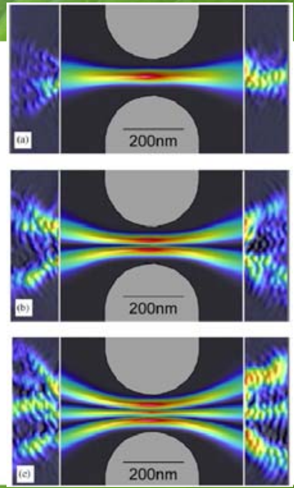
Fig. 2. Experimental images (outside) and theoretical simulations (inside) of the flow of electron waves through a quantum point contact for the first three modes (a)–(c). Fringes spaced by half the Fermi wavelength demonstrate coherence in the flow Topinka et al. [6].

R.M. Westervelt, M. A. Topinka et al.
Physica E 24 (2004) 63–69

Kwant przewodnictwa







Physica E 24 (2C

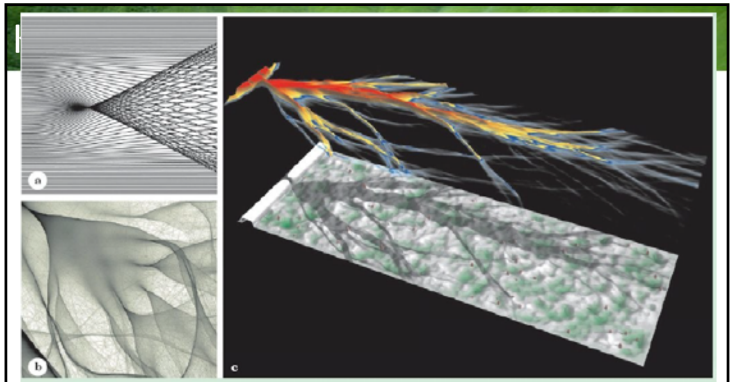
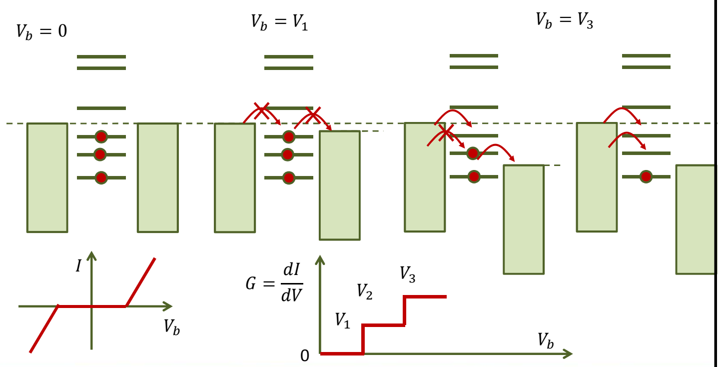


Figure 6. Simulations of electron flow. (a) Parallel electron trajectories, going from left to right, form a V-shaped cusp due to focusing by a potential-energy dip caused by a charged donor atom (not seen) above a two-dimensional electron gas. **(b)** A realistic 2DEG simulation that includes many ionized donors forms several generations of cusps. The electrons travel here from upper left to lower right. **(c)** Ray-tracing simulations of electron flux emerging from a small opening into a region of random potential reflect the features seen in experimental images of 2DEG quantum point contact samples. The potential is shown green in the valleys and white on the peaks. The electron flux is coded by height and color, with blue corresponding to regions of low flux; still lower flux is transparent. The "shadow" of the flux on the potential plot shows where the flux lies relative to the hills and valleys; no guiding valleys are seen. A slight change of the position of the opening changes the location and direction of the branches. (S. E. J. Shaw, PhD thesis, Harvard University, 2002.)

Blokada Kulombowska

Kropka zachowuje się jak mały kondensator o energii $E_c \sim \frac{1}{2}\frac{e^2}{C}$



Blokada Kulombowska

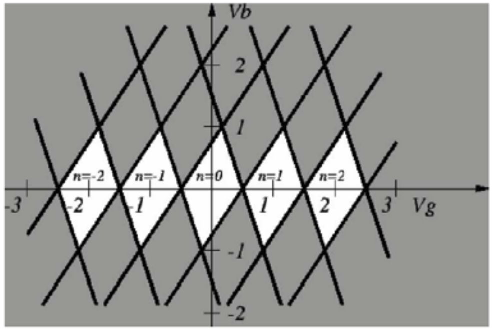


Figure 6: "Coulomb diamonds"

http://www.dstuns.iitm.ac.in/teaching-and-presentations/teaching/undergraduate%20courses/vy305-molecular-architecture-and-evolution-of-functions/presentations/presentations-2007/seminar-2/P2.pdf

Pola skalarne i wektorowe

Równania Schrodingera w polu $\vec{E}$ i $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \qquad \boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[\hat{p} - q\,\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 + q\varphi(\vec{r},t) + U(\vec{r},t)\right\}\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{d}{dt}\psi(\vec{r},t)$$

Pęd kanoniczny $\hat{p}$

Suma: pęd kinetyczny

Równanie ciągłości $$J(\vec{r},t) = \frac{\hbar\, q}{2\,i\,m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{q}{m}|\Psi|^2\vec{A}(\vec{r},t)$$

albo:

$$J(\vec{r},t) = \frac{q}{2}\left[\Psi^*\left(\frac{\hat{p} - q\,\vec{A}(\vec{r},t)}{m}\Psi\right) + \left(\frac{\hat{p} - q\,\vec{A}(\vec{r},t)}{m}\Psi\right)^*\Psi\right]$$

Na ćwiczeniach

Lokalna gęstość stanów

Gęstość stanów (ogólnie) można zdefiniować jako:

$$N^{3D}(E,z) \sim \frac{m}{\pi\hbar^3}\sqrt{2m\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{E} Ai^2\left(\frac{eFz - \varepsilon}{\varepsilon_0}\right)d\varepsilon = \frac{m}{\pi\hbar^3}\sqrt{2m\varepsilon_0}\left[[Ai'(s)]^2 - s[Ai(s)]^2\right]$$

Efekt Frantza-Kieldysha – w polu elektrycznym przejścia optyczne zachodzą w niższych enegiach – bo przerwa energetyczna się „rozmywa" przez tunelowanie do niej stanów:

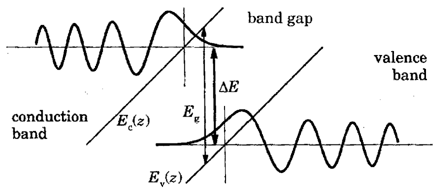


FIGURE 6.3. The Franz–Keldysh effect on interband absorption. The states shown in the valence and conduction bands are separated by $\Delta E < E_g$ but overlap because of the tail that tunnels into the band gap.

Efekt Halla

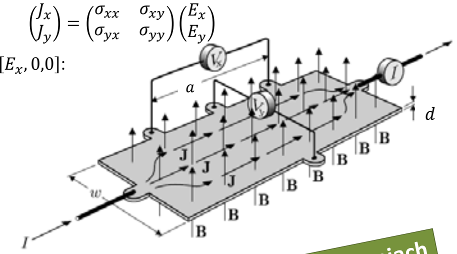
Biorąc $\sigma_0 = n\,e\,\mu = n\,e^2\,\tau/m$ $\quad \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$

W przypadku efektu Halla $E = [E_x, 0,0]$:

$j_x = \sigma_{xx} E_x \qquad j_y = \sigma_{yx} E_x$

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

$$\sigma_{yx} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$



http://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/BandMT_11.pdf

Na ćwiczeniach

Tensor przewodnictwa:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_L & -\sigma_T \\ \sigma_T & \sigma_L \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

Tensor oporności: $\quad \rho = \dfrac{1}{\sigma_L^2 + \sigma_T^2} \begin{pmatrix} \sigma_L & \sigma_T \\ -\sigma_T & \sigma_L \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$

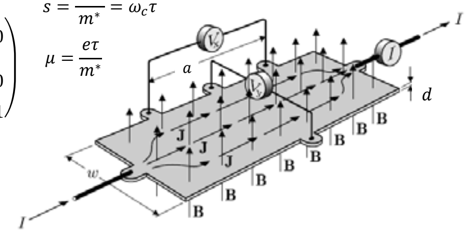
Efekt Halla

Pełny tensor przewodnictwa

$$\sigma = ne\mu \begin{pmatrix} \frac{1}{1+s^2} & \frac{-s}{1+s^2} & 0 \\ \frac{s}{1+s^2} & \frac{1}{1+s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{eB\tau}{m^*} = \omega_c \tau$$

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*}$$



Pełny tensor oporności

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{ne\mu} \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \rho \vec{j} = \begin{bmatrix} \frac{j_x}{ne\mu} \\ -\frac{j_x B}{ne} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{xy} = E_y w = \frac{I_x}{wd} \frac{B}{ne} w = \frac{I_x}{dne} B = R_H \frac{I_x B}{d}$$

$R_H = \dfrac{1}{ne}$ stała Halla

Jednorodne pole magnetyczne

Rozwiązanie w cechowaniu Landaua:

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[\hat{p} - q\,\vec{A}(\vec{r},t) \right]^2 + q\varphi(\vec{r},t) + U(\vec{r},t) \right\} \psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{d}{dt} \psi(\vec{r},t)$$

Cechowania Landaua: pole $\vec{B} = (0,0,B_z) \Rightarrow B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ (niestety wyróżnia kierunek)

$\vec{A} = [0, B_z x, 0]$ czyli $A_y = B_z x \stackrel{\text{def}}{=} Bx \qquad q = -e$

Przyjmujemy, że w płaszczyźnie xy nie ma innego potencjału

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eBx \right)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + U(z) \right\} \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

co daje: $\quad \left[-\dfrac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \dfrac{ie\hbar}{m} Bx \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{(eBx)^2}{2m} + U(z) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$

Ślad siły Lorentza

Potencjał paraboliczny!

Jednorodne pole magnetyczne

Symetria względem odwrócenia czasu (*time-reversal invariance, T-symmetry*): jeśli rozwiązaniem równania Schrodingera jest funkcja $\Psi(t)$, to rozwiązaniem musi być także $\Psi^*(-t)$ – tylko w przypadku hamiltonianu rzeczywistego. Dla pola magnetycznego musimy także odwrócić kierunek pola magnetycznego: $\Psi(t,\vec{B}) \to \Psi^*(-t,-\vec{B})$ (musimy odwrócić znak pędu kinetycznego $[\hat{p} - q\,\vec{A}(\vec{r},t)]$.

Urojona wartość – brak symetrii względem odwrócenia czasu

Potencjał w funkcji z jest niezależny od pozostałych zmiennych (faktoryzacja) → rozważamy więc problem 2D + z

co daje: $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{ie\hbar}{m}Bx\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(eBx)^2}{2m} + U(z)\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Ślad siły Lorentza

Potencjał paraboliczny!

Potencjał wektorowy nie zależy od y, można założyć postać funkcji: $u(x)\exp(iky)$

Jednorodne pole magnetyczne

Przypadek 2D

Rozwiązania $\varepsilon_{nk} = \left(n-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + E_n$ (nie zależy od k_y).

$$\phi_{nk}(x,y) \propto H_{n-1}\left(\frac{x-x_k}{l_B}\right)\exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2l_B^2}\right]\exp(ik_y y) \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

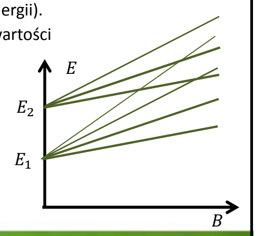
Funkcje falowe to funkcje oscylatora (wzdłuż x, rozmiaru rzędu $l_B/\sqrt{2}$) i fali biegnącej (wzdłuż y) – dziwne, prawda? Dlaczego?

Energia nie zależy od wektora k – stany o różnym k maja tą samą energię, są więc zdegenerowane (a więc dowolna ich kombinacja nie zmienia energii).
Gęstość stanów redukuje się ze stałej $\frac{m}{\pi\hbar^2}$ do serii dyskretnych wartości δ danych przez równanie na ε_{nk} - są to tzw. *poziomy Landaua*.

Pełna energia (łącznie z potencjałem wiążącym w kierunku z):

$$E = E_z + \varepsilon_{nk} = E_z + \left(n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$



Poziomy Landaua

Poziom Fermiego w polu magnetycznym:

$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{hn_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$

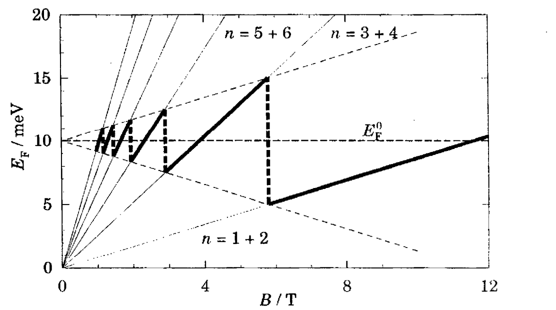


FIGURE 6.9. Variation of the Fermi level as a function of magnetic field for a two-dimensional electron gas in GaAs with $E_F^0 = 10$ meV before the field was applied. Spin splitting is neglected. The fan of thin lines shows the Landau levels, while the discontinuous thick line is E_F.

Efekt Shubnikova-de Haa

Shubnikov-de Haas effect

Gęstość stanów oscyluje - spada do 0 dla $\nu = n$ i jest największa dla $\nu \approx n + \frac{1}{2}$ - najprościej to zmierzyć w magnetooporze R_{xx}.

Oscylacje zależą od stodunku energii Fermiego E_F do częstości cyklotronowej $\hbar\omega_c = eB/m^*$. Oscylacje są periodyczne w funkcji $1/B$.

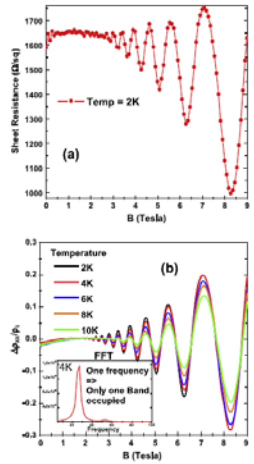
$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{hn_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$

Z SdH można także wyznaczyć masę efektywną m^* oraz czas kwantowy τ_q. Amplituda oscylacji jest dana przez

$$\Delta\rho_{SdH} = 4\rho_0\delta\cos(4\pi\nu)\frac{\xi(T)}{\sinh(\xi(T))}\exp\left(-\frac{\pi}{\omega_c\tau_q}\right)$$

$$\xi(T) = 2\pi^2 kT/\hbar\omega_c$$

Zależność temperaturowa daje m^*, tłumienie τ_q.



A. Nainani et al. Solid-State Electronics 62 (2011) 138–141

Efekt Shubnikova-de Haasa

Shubnikov-de Haas effect

Gęstość stanów oscyluje - spada do 0 dla $\nu = n$ i jest największa dla $\nu \approx n + \frac{1}{2}$ - najprościej to zmierzyć w magnetooporze R_{xx}.

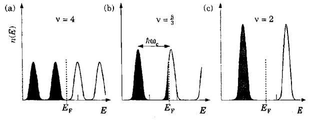


FIGURE 6.8. Occupation of Landau levels in a magnetic field neglecting the spin splitting, showing how the Fermi level moves to maintain a constant density of electrons. The fields are in the ratio

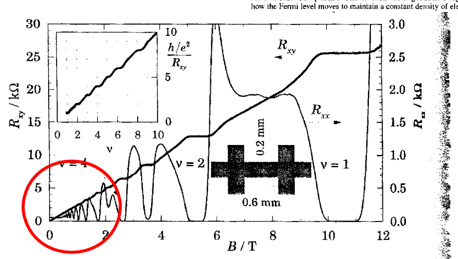


FIGURE 6.10. Longitudinal and transverse (Hall) resistivity, R_{xx} and R_{xy}, of a two-dimensional electron gas of density $n_{2D} = 2.6 \times 10^{15}$ nm^{-2} as a function of magnetic field. The measurements were made at $T = 1.13$ K. The inset shows $1/R_{xx}$ divided by the quantum unit of conductance e^2/h as a function of the filling factor ν. [Data kindly supplied by Dr A. R. Long, University of Glasgow.]

Kwantowy (całkowity) efekt Halla (IQHE)

Integer Quantum Hall effect (IQHE) – dla gazu 2D jeśli poziom Fermiego znajduje się w obszarze stanów zlokalizowanych opór hallowski jest skwantowany

$$R_H = \frac{1}{\nu}\frac{h}{e^2}$$

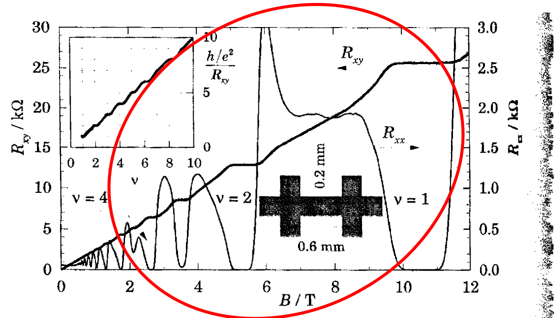
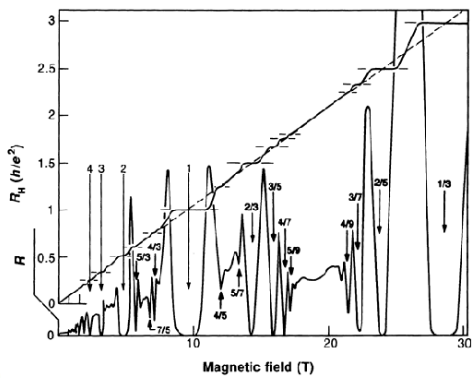


FIGURE 6.10. Longitudinal and transverse (Hall) resistivity, R_{xx} and R_{xy}, of a two-dimensional electron gas of density $n_{2D} = 2.6 \times 10^{15}$ nm^{-2} as a function of magnetic field. The measurements were made at $T = 1.13$ K. The inset shows $1/R_{xx}$ divided by the quantum unit of conductance e^2/h as a function of the filling factor ν. [Data kindly supplied by Dr A. R. Long, University of Glasgow.]

Kwantowy ułamkowy efekt Halla (FQHE)

Fractional Quantum Hall Effect (FQHE) – dla gazu 2D jeśli poziom Fermiego znajduje się w obszarze stanów zlokalizowanych opór hallowski jest skwantowany

$$R_H = \frac{1}{\nu}\frac{h}{e^2}$$



http://www.phys.unsw.edu.au/~arh/background/Semiconductor_Devices/semiconductor_devices.html

Kwantowy ułamkowy efekt Halla (FQHE)

Fractional Quantum Hall Effect (FQHE) – dla gazu 2D jeśli poziom Fermiego znajduje się w obszarze stanów zlokalizowanych opór hallowski jest skwantowany

$$R_H = \frac{1}{\nu^*}\frac{h}{e^2}$$

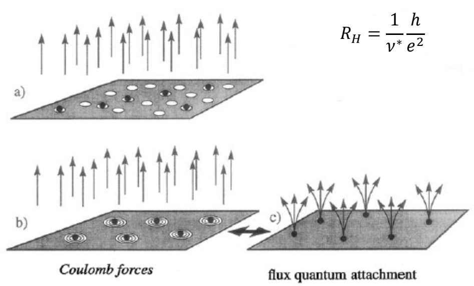
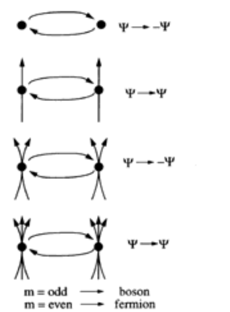


Figure 14. Schematic drawing of electron vortex attraction at fractional Landau level filling, ν=1/3. Now there are three times as many vortices as there are electrons. The Pauli principle is satisfied by placing one vortex onto each electron (a). Placing three vortices onto each electron reduces electron-electron (Coulomb) repulsion (b). Vortex attachment can be viewed as the attachment of magnetic flux quanta to the electrons transforming them to composite particles (c).



Stromer, Nobel Lecture

Oscylacje Weissa

EUROPHYSICS LETTERS 15 January 1989

Europhys. Lett., 8 (2), pp. 179-184 (1989)

Magnetoresistance Oscillations in a Two-Dimensional Electron Gas Induced by a Submicrometer Periodic Potential.

D. WEISS (*), K. v. KLITZING (*), K. PLOOG (*) and G. WEIMANN (**)

(*) *Max-Planck-Institut für Festkörperforschung, Heisenbergstraße 1 D-7000 Stuttgart 80, F.R.G.*

(**) *Walter-Schottky-Institut, TUM, D-8046 Garching, F.R.G.*

(received 29 October 1988; accepted 7 November 1988)

Abstract. – A new type of magnetoresistance oscillation periodic in $1/B$ is observed when the carrier density N_s of a two-dimensional electron gas is weakly modulated with a period smaller than the mean free path of the electrons. Experiments with high mobility AlGaAs-GaAs heterojunctions where N_s is modulated by holographic illumination at $T \leqslant 4.2$ K show that the period of the additional quantum oscillation is determined by the separation a of the interference fringes. This period corresponds to Shubnikov-de Haas oscillations where only the electrons within the first reduced Brillouin zone with $|k| < \pi/a$ contribute.

Oscylacje Weissa

4. W jaki sposób światło zmieniało koncentrację nośników?
5. Jakiego światła użyto w eksperymencie? Czy było ono absorbowane, w której warstwie?
6. Jak przebiegał eksperyment? Co było mierzone? Co się zmieniało? W jakim zakresie?
7. Na jakiej zasadzie mogła działać przesłona (shutter), której autorzy pracy używali do modulowania wiązki laserowej? Czy poza zapobieganiem fluktuacjom wzoru interferencyjnego na powierzchni próbki, modulowanie oświetlenia laserowego mogło mieć jeszcze jakiś inny korzystny wpływ na przebieg eksperymentu?

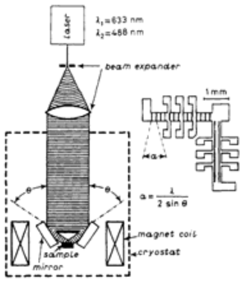


Fig. 1. – Schematic experimental set-up (left-hand side) and top view of the L-shaped sample geometry where the interference pattern is shown schematically.

"Mr. Osborne, may I be excused? My brain is full."