KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Fizyka 1- Mechanika

Wykład 2
12.X.2017

Zygmunt Szefliński
Środowiskowe Laboratorium Ciężkich Jonów
szef@fuw.edu.pl
http://www.fuw.edu.pl/~szef/

Pojęcia podstawowe

Punkt materialny

Ciało, którego rozmiary można w danym zagadnieniu zaniedbać.
Zazwyczaj przyjmujemy, że punkt materialny powinien być dostatecznie mały.
Nie jest to jednak konieczne !
Przykład: “wózek” na torze powietrznym.
Ważne jest,żeby ciało nie miało dodatkowych “stopni swobody” (np. obroty , drgania własne, stany wzbudzone)
Położenie punktu materialnego całkowicie określa jego “stan”.

- $\rightarrow$ **pojęcie punktu materialnego umożliwia prosty opis wielu sytuacji fizycznych.**
- $\rightarrow$ **Na ogół przyjmujemy, że punkt materialny obdarzony jest masą**

Pojęcia podstawowe

Ruch

Zmiana położenia ciała względem wybranego układu odniesienia.

Układ odniesienia

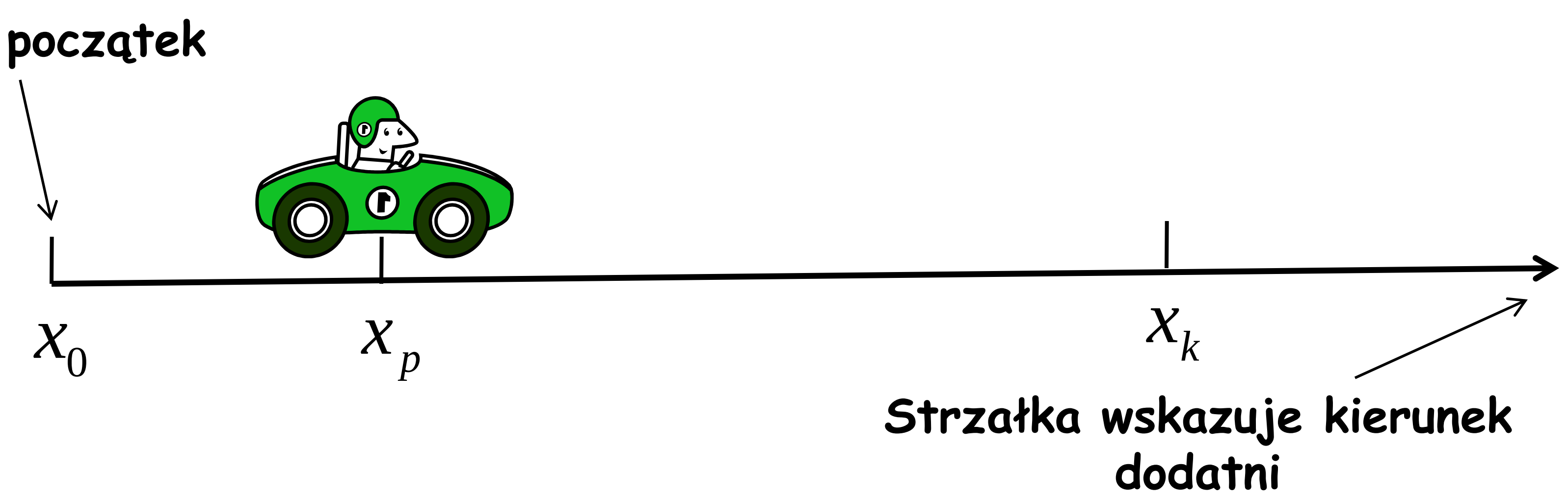
Ciało, które wybieramy jako “punkt odniesienia”.
Najczęściej jest nim Ziemia lub punkt na jej powierzchni.
Układ odniesienia można też zdefiniować określając jego położenie (lub ruch) względem wybranego ciała lub grupy ciał.

Przykłady:

- układ związany ze stołem w sali wykładowej
- układ związany z lecącym samolotem
- układ środka masy zderzających się cząstek
- układ związany ze środkiem Galaktyki

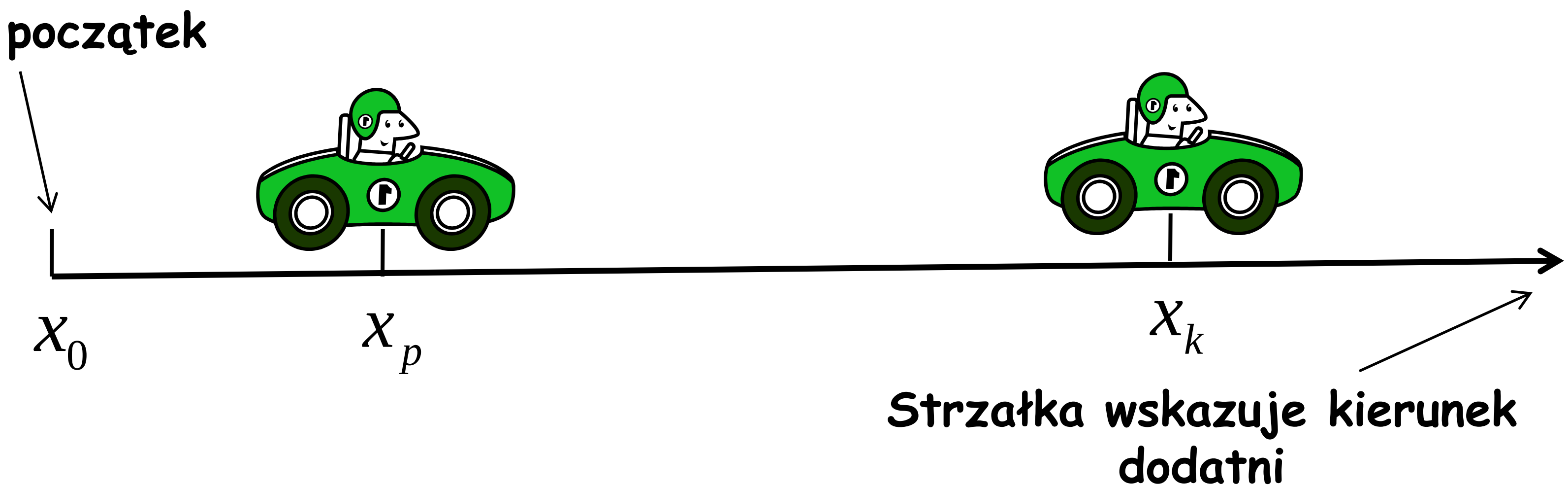
Położenie, droga, przemieszczenie

Pierwszy krok w opisie ruchu to wprowadzenie układu współrzędnych – definiując początek układu i kierunek dodatni osi współrzędnych.



Położenie, droga, przemieszczenie

Pierwszy krok w opisie ruchu to wprowadzenie układu współrzędnych – definiując początek układu i kierunek dodatni osi współrzędnych.



Pojęcia podstawowe

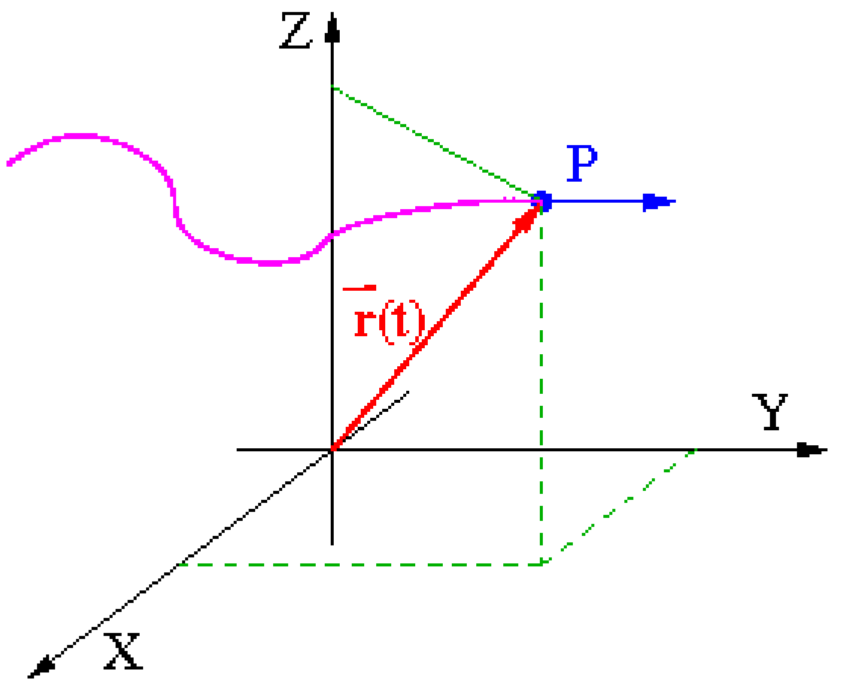
Tor ruchu

Opisuje zmianę położenia ciała w czasie

W ogólnym przypadku - postać parametryczna toru:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

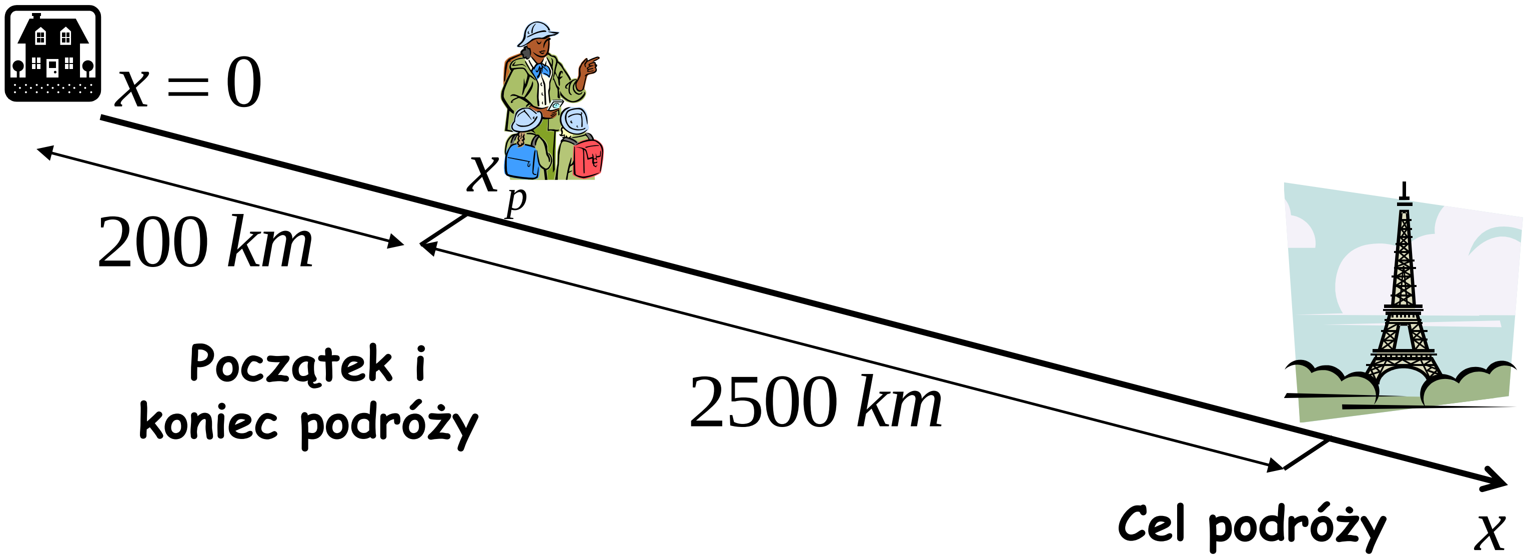
$$r = (x(t), y(t), z(t)) = r(t)$$



Wektor położenia ciała r **(wszystkie jego współrzędne) wyrażamy jako funkcje czasu.**

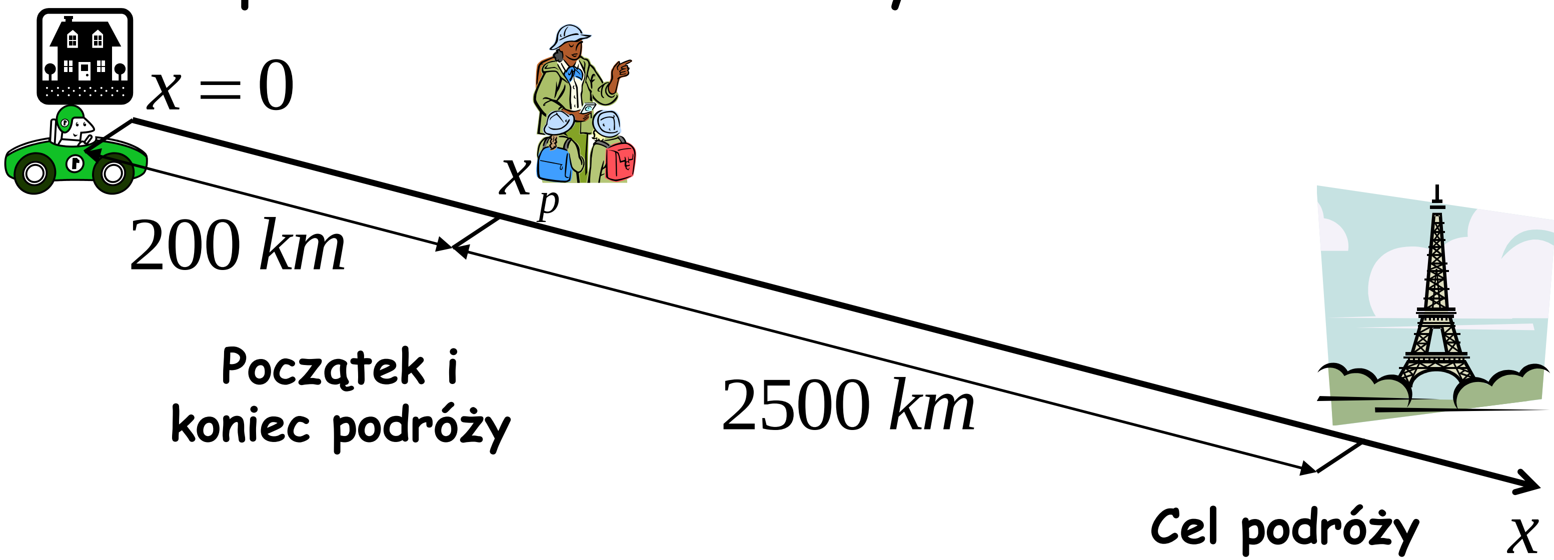
Droga

Droga to całkowita odległość w przebytej podróży. Jeśli podróżujesz z punktu x_p do Paryża i z powrotem pokonujesz drogę 5000 km.



Przemieszczenie

Przemieszczenie to zmiana położenia netto. Jeśli jedziemy z domu do punktu x_p, dalej do Paryża i z powrotem do punktu x_p, to przemieszczenie wyniesie 200 km.



Funkcje

W fizyce bardzo często staramy się opisać zależności pomiędzy różnymi wielkościami w postaci funkcyjnej.
Na ogół do oznaczenia funkcji używamy symbolu odpowiadającego danej wielkości
fizycznej, np.:

droga - s, wysokość - h, prędkość - v

Postać funkcyjna zależy jednak od wyboru argumentu funkcji !

W przypadku opisu toru:

$y(t)$ i $y(x)$ to dwie różne funkcje !

choć opisują tą samą wielkość fizyczną

Prędkość średnia

W odstępie czasu:

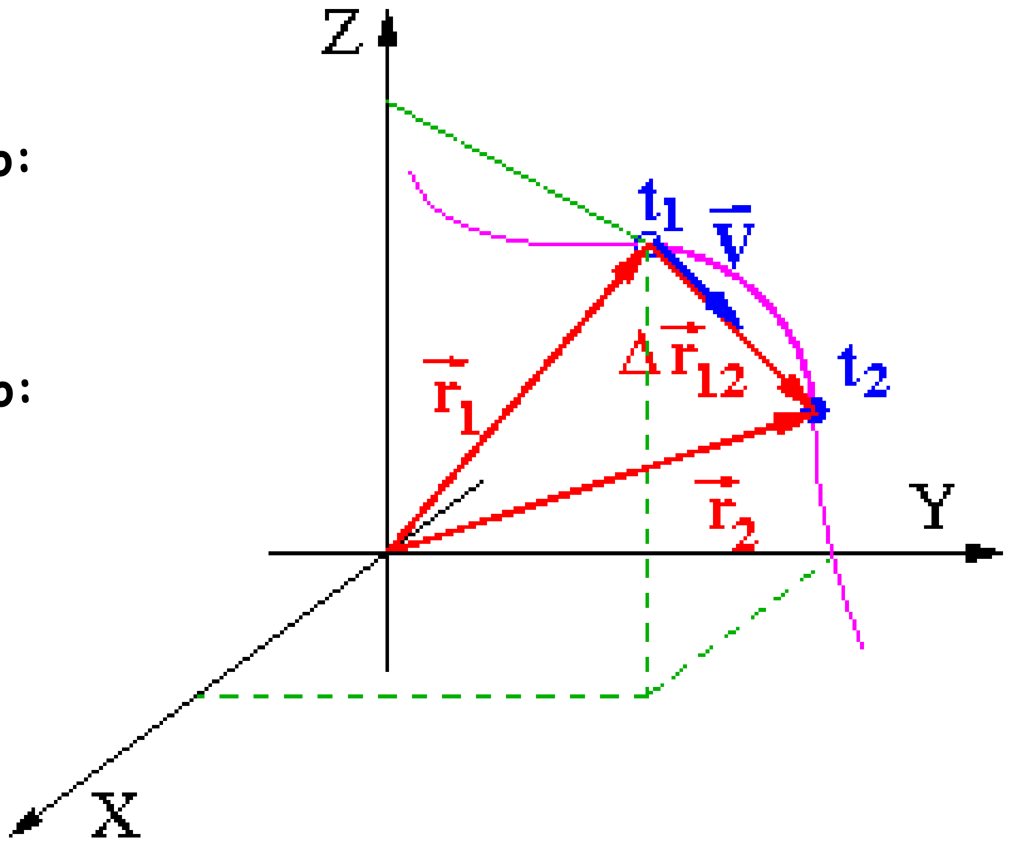
$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1$$

Punkt materialny przemieścił się o:

$$\Delta r_{12} = r_2 - r_1 = r(t_2) - r(t_1)$$

Prędkośc średnią definiujemy jako:

$$v_{12}^{śr} = \frac{\Delta r_{12}}{\Delta t_{12}}$$

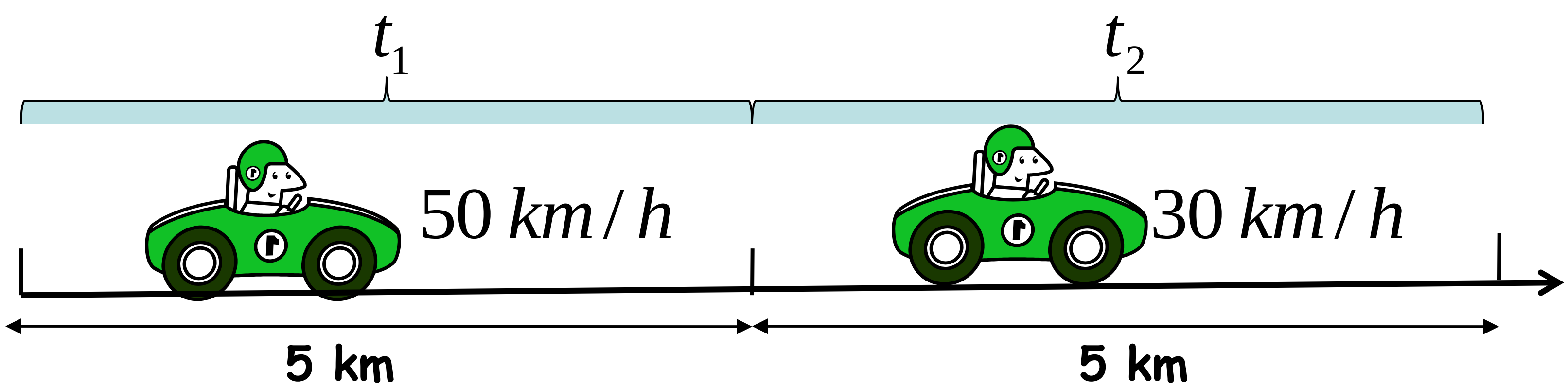


Prędkość i prędkość średnia

Prędkość średnia jest zdefiniowana jako droga dzielona przez całkowity czas podróży:

Średnia prędkość = droga / całkowity czas

Pytanie: Czy prędkość średnia auta jest: równa 40 km/h, większa niż 40 km/h, czy mniejsza niż 40 km/h?



Obliczenia prędkości średniej

Wyprowadzamy wzór końcowy, sprawdzamy wymiar, po czym podstawiamy wartości liczbowe.

Czasy przejazdu odcinków i czas całkowity:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2}, \quad t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = s\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}$$

Średnia prędkość to całkowita droga przez czas całkowity:

$$v^{śr} = \frac{2s}{t} = \frac{2s}{s\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2sv_1 v_2}{s(v_1 + v_2)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Wymiar prędkości jest prawidłowy, podstawiamy więc wartości liczbowe

$$v^{śr} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 50}{30 + 50} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 50}{80} = \frac{300}{8} = 37{,}5 km/h$$

Prędkość chwilowa

Definicja:

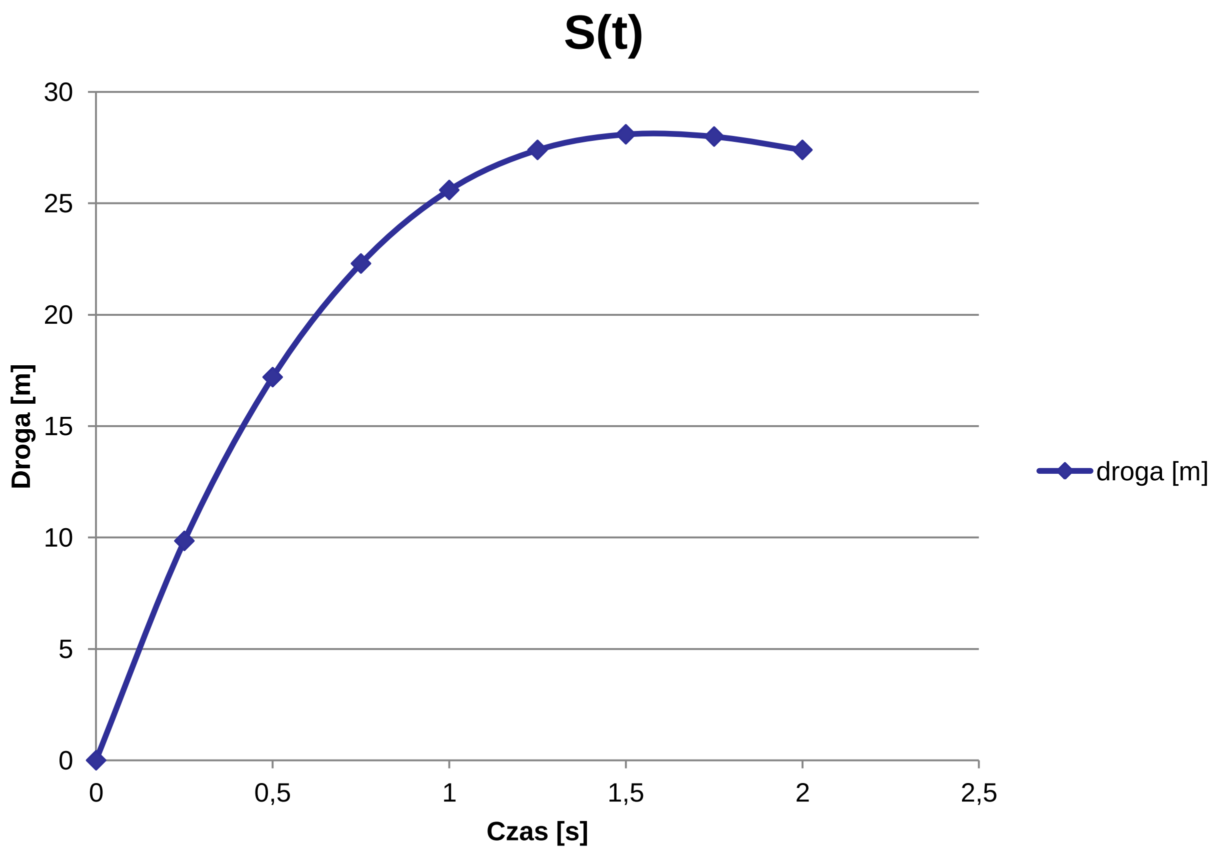
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Oznacza to, że określamy średnią prędkość w coraz to krótszym przedziale czasu; wtedy kiedy czas staje się niemal zerowy uzyskujemy prędkość chwilową.

Pytanie: czy to oznacza dzielenie przez zero we wzorze (2.1)?

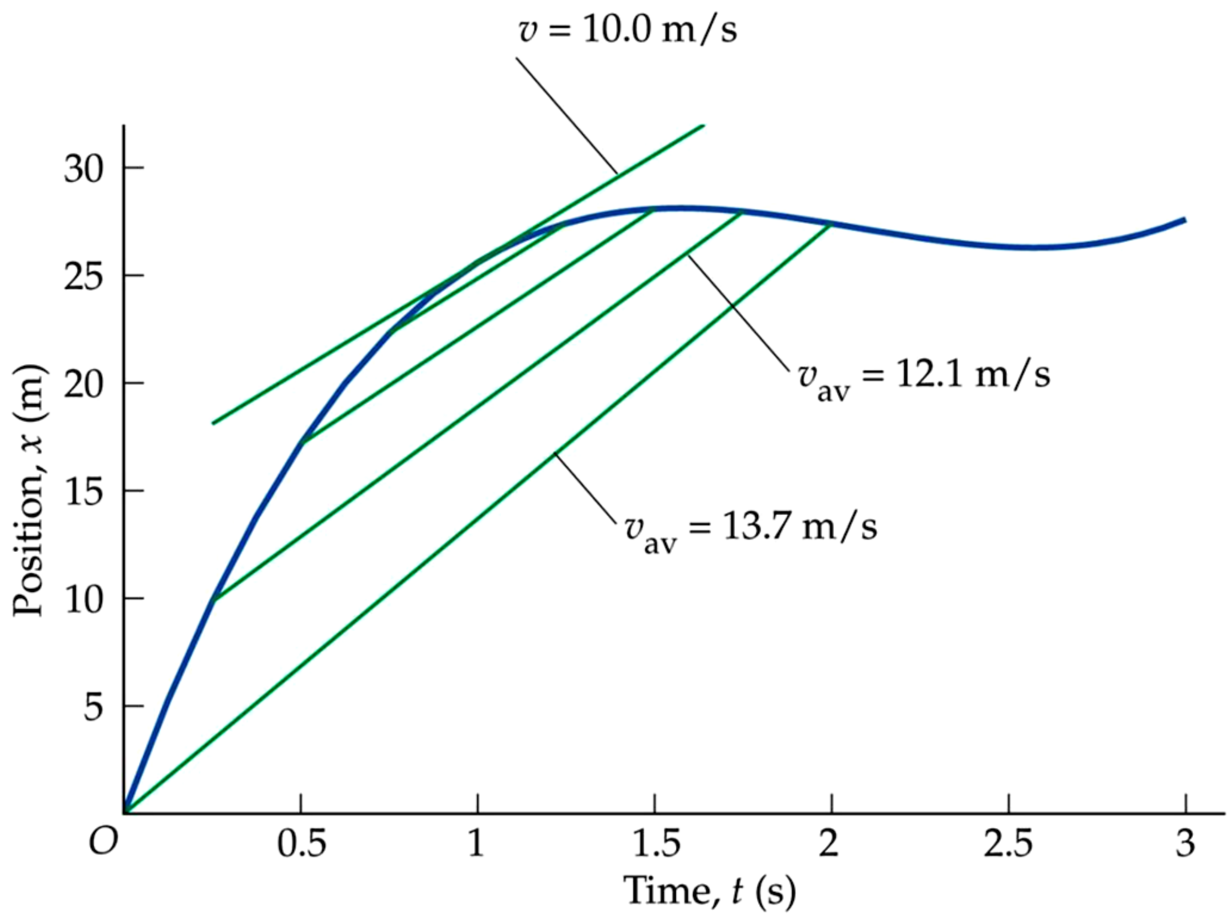
Prędkość chwilowa

czas[s]	droga [m]
0	0
0,25	9,85
0,5	17,2
0,75	22,3
1	25,6
1,25	27,4
1,5	28,1
1,75	28
2	27,4



Prędkość chwilowa

Wykres poniżej pokazuje jak możemy mierzyć prędkość w coraz to krótszych przedziałach czasu. Prędkość chwilowa to tangens kąta nachylenia krzywej drogi od czasu.



Prędkość chwilowa a pochodna

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \frac{df}{dt} \equiv f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Dla ruchu jednostajnego. Niech $x(t)=vt$, policzmy dx/dt.

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} \equiv (vt)' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot (t+\Delta t) - vt}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{vt + v\Delta t - vt}{\Delta t} = v$$

$$(vt)' = v$$

Prędkość chwilowa a pochodna

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \frac{df}{dt} \equiv f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

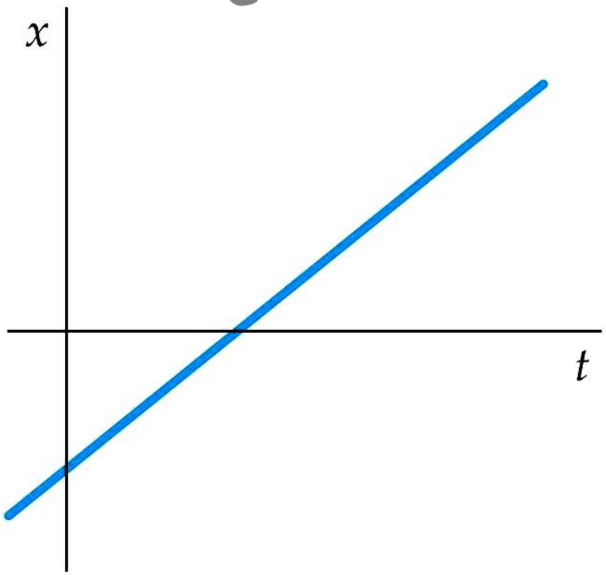
Ruch jedn. przyspieszony. Niech $x(t)=at^2$, policzmy dx/dt.

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t+\Delta t)^2 - at^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a\left(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2\right) - at^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 2at + a\Delta t = 2at \qquad \left(at^2\right)' = 2at$$

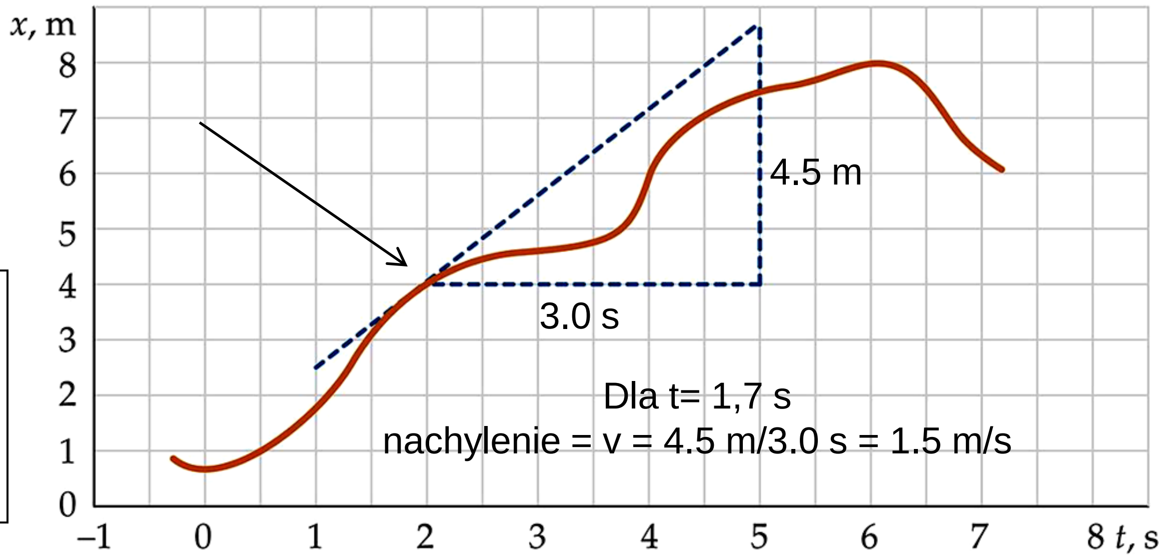
Możemy uogólnić uzyskany wynik ! $\left(t^n\right)' = nt^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \left(t^3\right)' = 3t^2$

Prędkość i nachylenie krzywej



Wykres położenia względem czasu dla ruchu o stałej prędkości ma stałe nachylenie.

Wykres położenia względem czasu dla ruchu o zmiennej prędkosci ma zmienne nachylenie.



Klasyfikacja ruchów

Ze względu na tor wybrane przypadki szczególne

- **prostoliniowy,** odbywający się wzdłuż linii prostej

Zawsze możemy tak wybrać układ współrzędnych aby

$$y(t) = z(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad r(t) = i_x \cdot x(t)$$

- **płaski**, odbywający się w ustalonej płaszczyźnie

$$z(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad r(t) = i_x \cdot x(t) + i_y \cdot y(t)$$

- **po okręgu**

Ze względu na przyspieszenie

- **jednostajny** $\rightarrow$ wartość prędkości pozostaje stała: $|v| = const$
- **jednostajnie przyspieszony** $\rightarrow$ przyspieszenie jest stałe: $a = const$

Ruch jednostajny prostoliniowy

Najprostszy przypadek ruchu:

Jednostajny $|v| = const$

Prostoliniowy $\dfrac{\vec{v}}{v} = const$

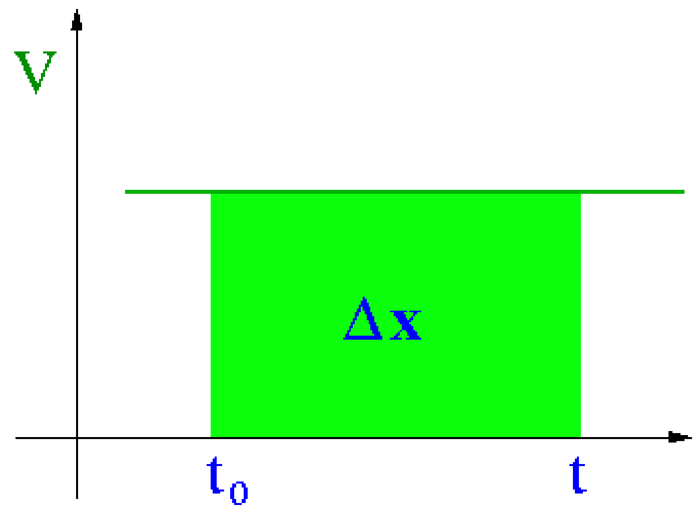
$$\left.\begin{matrix} |v| = const \\ \dfrac{\vec{v}}{v} = const \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad a = 0$$

Przyjmując, że ruch odbywa się wzdłuż osi X:

$$v = \frac{dx}{dt} = const, \quad x_0 = x(t_0)$$

$$x(t) = \int v dt = v \cdot t + C; \quad x_0 = vt_0 + C$$

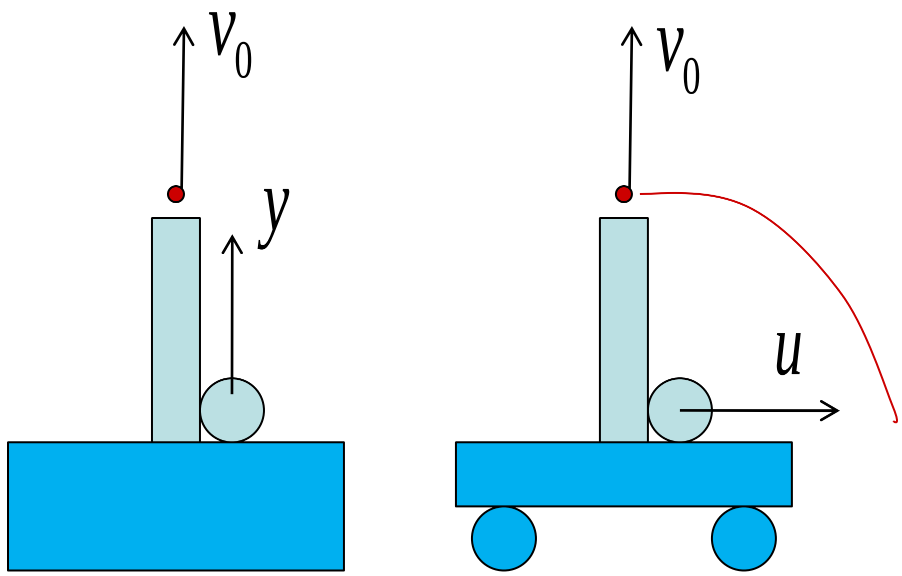
$$C = x_0 - vt_0 \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$



Położenie (przebyta droga) jest liniową funkcją czasu. Drogi przebyte w równych odcinkach czasu są sobie równe.

Transformacja Galileusza

Wybór układu odniesienia
Dwa identyczne działa ustawione są pionowo:
jedno na peronie, a drugie na wagonie.
Strzał z działa w wagonie - pionowy



$$y_1(t) = y_2(t) = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Ruch poziomy jest jednakże różny.

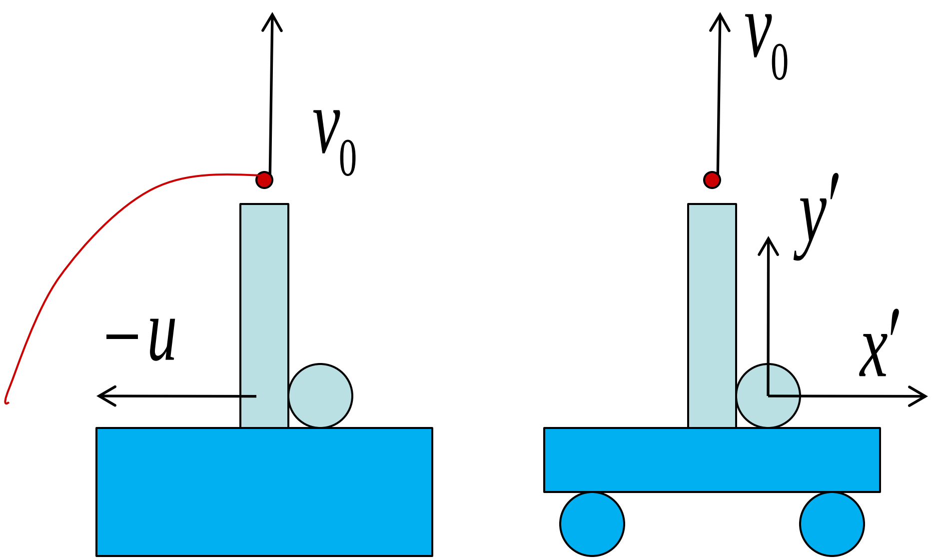
obserwator w wagonie $x_1(t) = 0$

obserwator na peronie $x_2(t) = ut$

Czy ruch pionowy będzie identyczny?

Transformacja Galileusza

Wybór układu odniesienia
Dwa identyczne działa ustawione są pionowo:
jedno na peronie, a drugie na wagonie.
Strzał z działa na peronie - pionowy



Dla obserwatora na wagonie teraz porusza się peron.

$$x_1'(t) = -ut$$

$$x_2'(t) = 0$$

Ruch pionowy nie zmienia się.

$$y_1'(t) = y_2'(t) = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

W kierunku pionowym ruch jest identyczny.

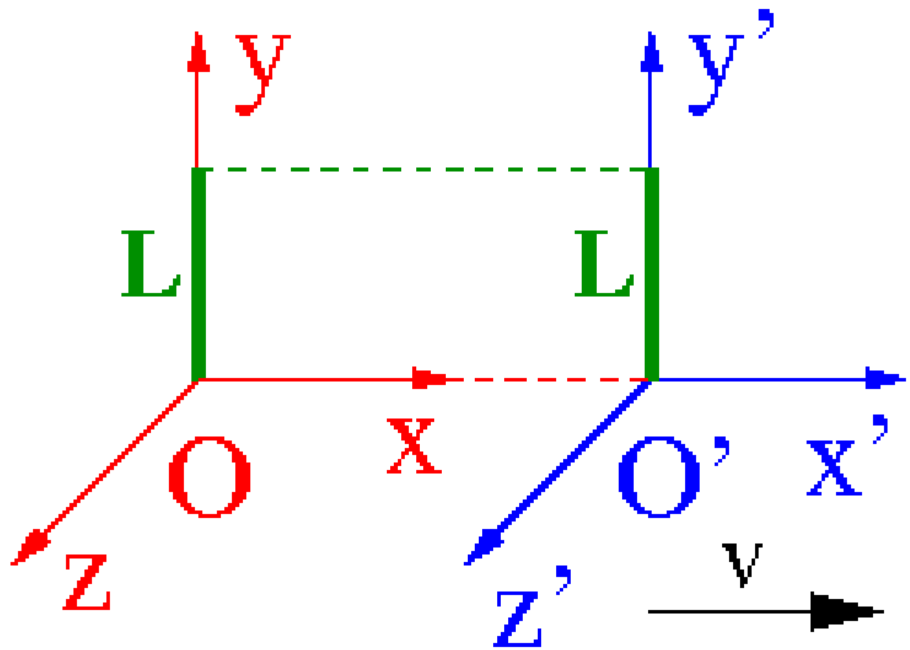
Transformacja Galileusza

Rozważmy dwa układy odniesienia związane z obserwatorami O i O' poruszające się względem siebie ruchem jednostajnym, prostoliniowym. Przyjmijmy, że osie układów są równoległe i ruch względny zachodzi w kierunku osi X.

W chwili $t=t_0=0$ początki układów pokrywały się.

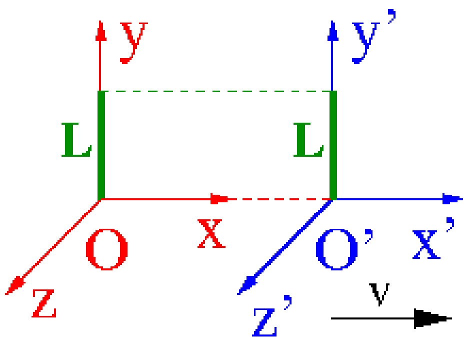
Obserwując ten sam ruch obserwatorzy mierzą inną zależność położenia od czasu. Jeśli wiemy jak obserwatorzy poruszają się względem siebie, znamy V
powinniśmy móc wyznaczyć transformacje:

(x, y, z) $\Longleftrightarrow$ (x', y', z')



Transformacja Galileusza

Transformacja współrzędnych przestrzennych



Transformacja Galileusza $\Rightarrow \begin{cases} x = x' + Vt' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Transformacja Galileusza prowadzi do wzoru na składanie prędkości.

Czas w obydwu układach jest identyczny t=t', a jest to podstawowe założenie fizyki klasycznej (Newtona).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V \cdot \frac{dt'}{dt} \Longrightarrow v = \bar{v}' + V$$

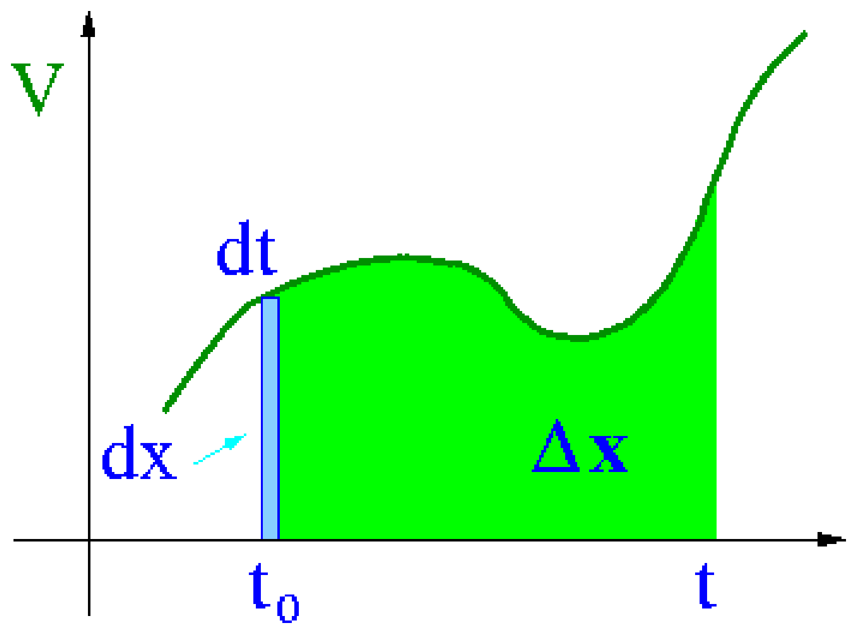
Gdzie V **- prędkość względna**

Ruch prostoliniowy zmienny

Zależność drogi od prędkości

Przypadek ogólny: znamy prędkość V (t)
czy możemy wyznaczyć zależność położenia od czasu ?
Możemy sumować przesunięcia dx po krótkich przedziałach czasu dt.
Przesunięcie ciała w czasie $\Delta t = t - t_0$

$$\Delta x = \sum_{dt} dx = \sum_{dt} v \cdot dt$$



Graficznie: pole pod krzywą V (t)
Matematycznie, przechodząc do granicy $dt \to 0$

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$ **-całka oznaczona**

Ruch jednostajnie przyspieszony

Jednostajnie przyspieszony

Ruch ze stałym przyspieszeniem $a = const$

$$\frac{dv}{dt} = const = a \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0) \quad v_0 = v(t_0)$$

$$dv = a(t) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t) \cdot dt$$

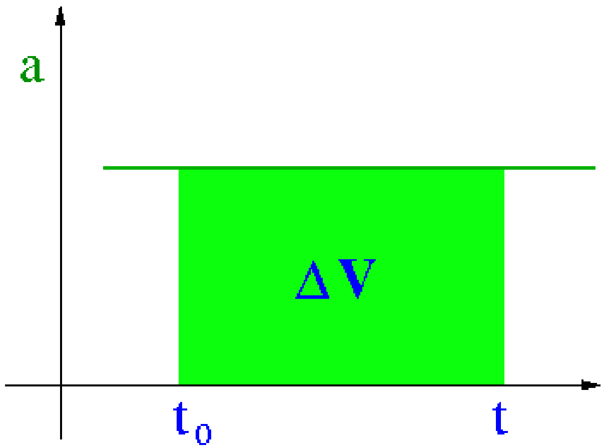
Prostoliniowy

Ruch jest prostoliniowy: $\frac{\vec{v}}{v} = const \quad \Rightarrow \quad v \| a = const$

Przyspieszenie musi mieć kierunek zgodny z kierunkiem prędkości

Ruch jednostajnie przyspieszony

Prostoliniowy
→ (jednowymiarowy)



Prędkość jest liniową funkcją czasu:

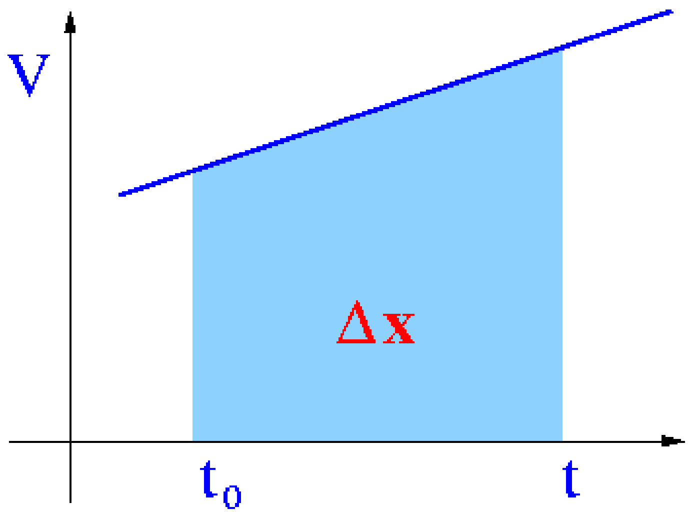
$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

Położenie jest kwadratową funkcją czasu:

Licząc pole trapezu mamy:
$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0) \cdot (t - t_0)$$

Po podstawieniu wyrażenia na prędkość:

$$x = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2$$



To samo dostajemy z całkowania prędkości:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(t - t_0)) dt$$

Szczegóły obliczeń (1)

Gdy prędkość jest liniową funkcją czasu: $v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$

Położenie wyliczamy jako całkę z funkcji opisującej prędkość

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(v_0 + a \cdot (t - t_0)\right) dt$$

Korzystamy z faktu, że całka z sumy funkcji jest równa sumie całek

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(v_0 + a \cdot t - a t_0\right) dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\,dt + \int_{t_0}^{t} a \cdot t\,dt - \int_{t_0}^{t} a t_0\,dt$$

Wyliczając poszczególne całki mamy:

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + a\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}\right) - a t_0 (t - t_0)$$

Poi uporządkowaniu wyrazów:

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + a\left(\frac{t^2}{2} - t t_0 + t_0^2 - \frac{t_0^2}{2}\right)$$

Szczegóły obliczeń (2)

Zauważmy, ze wyraz w nawiasie to suma kwadratów:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + a\left(\frac{t^2}{2} - tt_0 + \frac{t_0^2}{2}\right)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}\left(t^2 - 2tt_0 + t_0^2\right) \quad \Rightarrow \quad x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

W szczególnym przypadku gdy czas $t_0=0$:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$$

Wyrażenia powyższe opisuje ruch jednostajnie przyspieszony startujący w czasie $t_0=0$ z położenia x_0 z prędkością początkową v_0