

Wykład 2

Podobnie jak linie proste w geometrii Euklidesa pełnią kluczową rolę przy konstrukcji układu współrzędnych, tak ciała swobodne, będą grały kluczową rolę przy wprowadzaniu współrzędnych do czasoprzestrzeni. Tak jak x i y na płaszczyźnie euklidesowej, **wraz** z wybranym układem osi współrzędnych, jednoznacznie wskazują punkt tej płaszczyzny, tak liczby x i t , które za chwilę zdefiniujemy, jednoznacznie wskazują **wraz** z konkretnym układem odniesienia, konkretne zdarzenie, które chcemy scharakteryzować, czy po prostu, na które chcemy wskazać.

Aby wprowadzić układ współrzędnych (możliwie naj**prostszy**, bo tylko prostota pozwoli nam w miarę łatwo wyciągać potrzebne wnioski z tak skromnej z pozoru zasady, jaką jest zasada względności), użyjemy linii...**prostych**! Czyli ciał swobodnych. Zacząć trzeba od wyboru pierwszego z nich. Może to być wybór dowolny. Linię świata tego ciała rychło zamienimy w oś liczbową. Jak? Zwyczajnie. Należy wybrać jakieś zdarzenie i przypisać mu liczbę 0. Należy też wybrać inne zdarzenie związane z tym ciałem i przypisać mu liczbę 1. Możemy tę liczbę kojarzyć ze słowem sekunda, jeśli tak nam się podoba. Powinniśmy też zadbać, by, wybrane ciało, mogło wyróżniać (np. tyknięciami, położeniem wskazówek, czy cyframi wyświetlanymi na ekranie) wszystkie kolejne zdarzenia (na jego linii świata), położone tak w stosunku do poprzednika, jak zdarzenie 1 położone jest w stosunku do 0. Ciało takie, to po prostu **zegar**. Oczywiście drogą takiej czy innej interpolacji, umiemy przypisać liczbę rzeczywistą dla zdarzeń leżących pomiędzy kolejnymi zdarzeniami o wartości całkowitej. Czas w tym ujęciu, to nic innego jak liczba tyknień, czy jak kto woli liczba identycznych odcinków w czasoprzestrzeni, układających się wzdłuż linii świata zegara. Tak określony czas **nie odnosi się nijak** do charakterystyki liczbowej zdarzeń

nie leżących na linii świata **tego** zegara.¹ Czas, jakim nieustannie operujemy, wiąże się z konkretnym zegarem, a nie istnieje „tak w ogóle”, jak nam się by mogło wydawać. Mówimy: jest dwunasta. I myślimy, że w całym Wszechświecie jest 12.

Drugi etap konstrukcji układu inercjalnego polega na wprowadzeniu nowego zegara (najlepiej identycznego, ale może być i taki, który porównany z pierwszym idzie identycznie), którego linia świata nie przecina linii świata zegara pierwszego. Linia ta musi być równoległa (a przynajmniej tak możemy, przez analogię z Euklidesem przyjąć), a przez wybrane zdarzenie może przechodzić tylko jedna taka linia. Mówiąc nieco abstrakcyjnie, zakładamy, iż czasoprzestrzeń jest płaska. Mówiąc zwyczajnym, potocznym językiem powiemy, że drugi zegar pozostaje nieruchomy względem pierwszego. Zegar ten odmierza (przez konstrukcję) tyknięcia według tej samej ogólnej zasady, co pierwszy. Występuje tylko jeszcze problem początku liczenia. Ponieważ zegary są nieruchome, można bez kłopotu, jednoznacznie je zsynchronizować. Można wymyślać nieskończenie wiele sposobów, bez mieszania światła do tego interesu. Np. możemy stanąć w środku i uruchomić zegary pociągnięciem wspólnym dwóch sznurków, z których każdy połączony jest z zegarem należącym do dwóch różnych zegarów. Możemy też wysłać grupę cząstek α z monoenergetycznego źródła od jednego zegara do drugiego i obliczyć różnicę wskazań na zegarach. A potem na odwrót, od drugiego zegara do pierwszego. Przy zegarach zsynchronizowanych te różnice będą jednakowe i będą miały sens czasu wędrówki zmierzonej z pomocą naszych obu zegarów. Przy niedokładnej synchronizacji, różnice czasów odczytanych w miejscu startu i na mecie, byłyby różne przy ruchach w dwóch kierunkach. Przesuwając jeden z zegarów o połowę różnicy różnic, przywrócilibyśmy właściwą synchronizację. Synchronizowanie nieruchomych

¹ Zupełnie tak samo jak cyfry na taśmie krawieckiej, nie mają nic wspólnego z wysokością lampy stojącej w drugim pokoju!!!

zegarów nie jest ani trudniejsze, ani łatwiejsze w fizyce klasycznej i w nowej fizyce, którą chcemy wykryć.

Zegarowi, od którego zaczęliśmy przypisujemy „etykietkę” 0, $x=0$. Kolejnemu zegarowi wartość $x=1$. Następnie, rozmieszczamy lub, (co często wystarczy), **wyobrażamy sobie że rozmieściliśmy** wiele takich zegarów, znów według zasady, że każdy kolejny o numerze n ma się w stosunku do poprzednika **tak jak** się miał zegar 1 w stosunku do zegara 0. Owo „tak jak” nie wymaga specjalnego objaśnienia. Możemy korzystać z taśmy krawieckiej, z rytmicznie zaznaczonymi kreskami, możemy to robić krokami, czy cyrklem. Możemy liczyć fale stojące, albo atomy w kryształach. Co tu dużo dyskutować! Pomiar odległości **nieruchomych** ciał, to żaden problem. Ani tu Einstein nic nie ułatwia, ani utrudnia.

Teraz, każdemu zdarzeniu w naszej dwuwymiarowej czasoprzestrzeni możemy przypisać dwie liczby: x – numer zegara, przy którym **akurat zdarzenie zaszło** i t numer tyknięcia tego zegara. Widać, że pojęcie położenia i czasu udało się sprowadzić do zwykłego liczenia. (Interpolacja do wartości niecałkowitych jest oczywista).

Układ inercjalny to rodzina swobodnych (zsynchronizowanych) zegarów.²

Podkreślam, iż sama konstrukcja tak prostego układu współrzędnych, jest oparta na zasadzie bezwładności Galileusza. Gdyby nie ona, musielibyśmy kombinować inaczej.

Zasada bezwładności ma dalsze konsekwencje. Dowolne ciało swobodne, będzie mieć linię świata, która, na ogół, przecina każdą z linii świata naszych zegarów. Co więcej, między współrzędnymi czasowymi kolejnych punktów przecięcia występują różnice stałe. To nic innego jak twierdzenie Talesa prze-

² Czytelnik może tu próbować wiercić dziurę w całym narzekając, że w laboratorium, każdy „swobodny” zegar, rychło rozbije się o podłogę. To prawda. Zegary podtrzymywane nieruchomo w polu grawitacyjnym tworzą od początku układ odrobinę nieinercjalny. W bardzo dokładnych pomiarach trzeba tę nieinercjalność niekiedy uwzględniać. Ale to temat zupełnie odrębny. Wiadomo, iż do opisu grawitacji, szczególną teorię trzeba uogólnić! Ale i tam, w teorii grawitacji, dla ciał swobodnie spadających, bliskich sobie, zastosujemy prawa STW.

niesione do czasoprzestrzeni. Tkwi w tym naturalne, kolejne założenie o charakterze symetrii. Czasoprzestrzeń Szczególnej Teorii Względności (podobnie jak czasoprzestrzeń mechaniki klasycznej) jest **jednorodna**. Wszystkie jej miejsca, są jednakowe. Gdyby ciało swobodne, nagle między piątym a szóstym zegarem wędrowało dłużej, niż między pozostałymi, to bylibyśmy bezradni! Ale przecież i klasyczna mechanika byłaby bezradna. Mówimy wszak o ciele swobodnym. Jego „los” jest bardzo jednostajny!

Weźmy ciało, które minęło zegar centralny naszego układu, gdy pokazywał on akurat 0. Równanie ruchu tego ciała, zgodnie z ową proporcjonalnością, będzie $x = Vt$, z jakąś wartością współczynnika proporcjonalności. Równanie innego ciała o linii równoległej do powyższego, będzie $x = Vt + const$.

Metoda zbadania własności pomiarów wykonywanych w czasoprzestrzeni (czyli jak mówimy zbadanie *geometrii czasoprzestrzeni*) polega na wprowadzeniu różnych rodzin zegarów (*układów współrzędnych*, albo inaczej *układów odniesienia*). Jeden, nazwijmy go O, już mamy (pracowicie skonstruowany). Teraz trzeba skonstruować drugi O', a to już będzie łatwiej. Trzeba powtórzyć konstrukcję biorąc identyczne zegary (wyskalowane według wzorców atomowych nieruchomych względem tych zegarów), rozmieszczonych według identycznej zasady, co zegary układu pierwszego. Linie świata tych zegarów względem naszych zegarów, opisane będą równaniami, jak wyżej: $x = Vt + const$. Są to przecież zegary swobodne.

Unikniemy nieistotnych komplikacji, gdy przyjmiemy, iż nowy zegar „zerowy” mija nasz zegar leżący w początku układu, gdy właśnie pokazuje on zero. Zarazem początek liczenia czasu w nowym układzie jest tak wybrany, że właśnie w momencie mijania się początków, zegar o współrzędnej $x' = 0$, też pokazuje $t' = 0$.

Zwroty na osiach x i x' można wybrać na różne sposoby (razem 4). Wybierzmy te zwroty przeciwnie, a zarazem tak, by i prędkość O względem O' była dodatnia, jak i O' względem O też była dodatnia. Zegar o $x' = 1$ (na lewo od

zegara centralnego), dotrze do początku układu O, po pewnym dodatnim czasie. Mamy dla niego $x = V(t - t_0) = Vt - a$. Zegary o większych wartościach x' , będą miały stałą wyrażającą opóźnienie proporcjonalnie większą. Zatem ogólnie:

$$x = Vt - ax'$$

Jest to **już połowa poszukiwanej transformacji**. Jest to zarazem nic innego, jak proste równanie ruchu jednostajnego zegarów nowego układu opisane we współrzędnych pierwszego układu.

Dla zdobycia drugiej połowy odwołamy się do równoprawności układów inercjalnych! (Przecież jeszcze się bez niej obeszlśmy). W połączeniu z przyjętymi zwrotami osi, pozwala ona, ba, **nakazuje** napisać równanie identyczne z powyższym, co **do formy**, ale z zamienionymi rolami współrzędnych. Zestawmy oba równania obok siebie:

$$x = Vt - ax'$$

$$x' = Vt' - ax$$

Powyższe dwa równania, to **kamień filozoficzny fizyki!**

Każde z równań z osobna wyraża treść zasady bezwładności Galileusza. Fakt, że współczynniki liczbowe w obu równaniach są **jednakowe**, wyraża treść

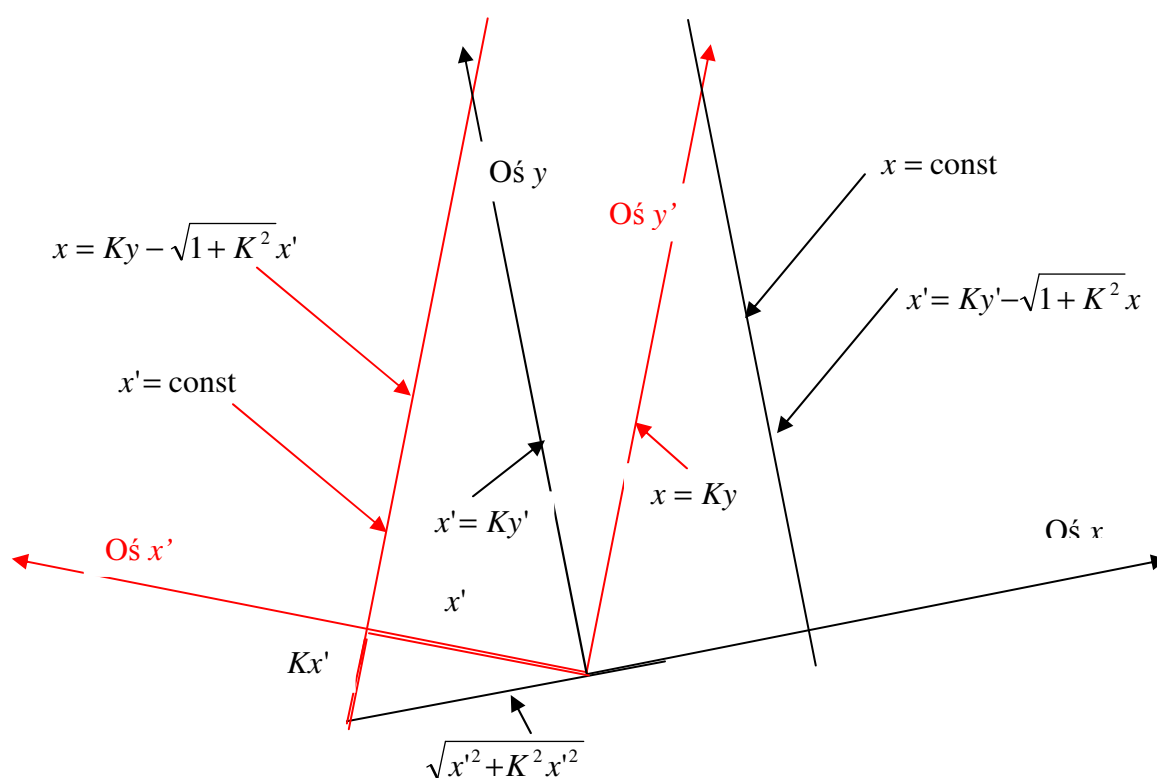
Zasady względności,

też autorstwa Galileusza.

Równania powyższe są niezwykle oczywiste!

Warto w tym miejscu przenieść się z czasoprzestrzeni do zwykłej geometrii. Zbiór punktów na płaszczyźnie stawia podobne problemy poznawcze, co zbiór zdarzeń w tunelu. Interesujemy się jakie pomiary można wykonywać na takiej płaszczyźnie, jakie są ogólne związki między niektórymi z mierzonych wielkości, wreszcie jak zaprząć **liczby rzeczywiste** do „numerowania” czy też nazywania, czy też wskazywania różnych punktów owej płaszczyzny.

O płaszczyźnie tej wszystko wiemy już od bardzo dawna. W szczególności wiemy jak wygodne jest posługiwanie się układem współrzędnych x, y . Rozważmy dwa takie układy (o wspólnym początku).



Równanie linii y' (czyli $x'=0$) jest

$$x = Ky$$

A linii o x' różnym od zera:

$$x = Ky - \sqrt{1 + K^2} x'$$

Dla linii o ustalonym x równanie w układzie primowanym jest

$$x' = Ky' - \sqrt{1 + K^2} x$$

Mamy i liniowość i **identyczność** współczynników. Owa identyczność jest przejawem równouprawnienia w zwykłej przestrzeni wszystkich kierunków, a więc i równouprawnienia układów współrzędnych.

Gdyby ktoś chciał zapytać – który z dwóch układów jest „obrócony”, a który nie – powiedzielibyśmy: Takie pytanie nie ma sensu! Każdy z nich jest obrócony **względem** drugiego. Miarą tego obrócenia jest parametr K . Wiemy także, choć to już nie jest chwilowo tak bardzo istotne, że K jest tangensem kąta, jaki tworzą ze sobą osi y i y' . Pozostawiony samotnie żaden układ nie jest ani obrócony, ani nieobrócony.

Dzięki Pitagorasowi i Euklidesowi, wiemy, iż w **tym** przypadku współczynnik a wynosi $\sqrt{1+K^2}$.

Zróbmy jeszcze coś, co upodobni problem związków między różnymi współrzędnymi w przestrzeni i w czasoprzestrzeni jeszcze bardziej.

Wyobraźmy sobie, iż dla kaprysu, współrzędne „pionowe” mierzymy w calach i oznaczamy $\tilde{y}$, a współrzędne x w cm. Wprowadźmy przelicznik $c=2.54\text{cm/cal}$. Mamy $y = c\tilde{y}$

$$x = Kc\tilde{y} - \sqrt{1 + (cK)^2 / c^2} x' = k\tilde{y} - \sqrt{1 + k^2 / c^2} x'$$

$$x' = Kc\tilde{y}' - \sqrt{1 + (cK)^2 / c^2} x = k\tilde{y}' - \sqrt{1 + k^2 / c^2} x$$

Mamy jeszcze tw. Pitagorasa $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$, lub $\tilde{y}^2 + x^2 / c^2 = \tilde{y}'^2 + x'^2 / c^2$

Odpowiednikiem współczynnika k w czasoprzestrzeni jest prędkość V . Podobnie jak przed chwilą, pytanie o to, który z dwóch układów odniesienia spoczywa, a który jest ruchomy, jest fałszywie postawione. Pojedynczy układ ani nie spoczywa, ani nie jest w ruchu. Dopiero gdy są **dwa** układy, pojawia się prędkość **jednego względem drugiego**.

Ile wynosi a w **naszej prawdziwej czasoprzestrzeni**?????

Jak można poważnie zacząć zajmować się fizyką, nie rozstrzygnąwszy na początku owej kwestii? Nie można! Dlatego teraz tym się zajmujemy.

Nim przejdziemy do wyznaczenia a , zmieńmy zwrot na osi x' . Przyjeliśmy zwroty przeciwne, by zasada względności, czyli równouprawnienia, sprowadzała się do możliwości napisania drugiego równania, była tak dobitna jak tylko to możliwe. Zmiana zwrotu w drugim układzie oznacza zaopatrzenie każdego x' w powyższych wzorach znakiem „minus”. Jeśli jednocześnie pomnożyć stronami drugie równanie przez -1 , dostaniemy:

$$x = Vt + ax'$$

$$x' = -Vt' + ax$$

Sens powyższych wzorów, jak wynika z ich wyprowadzenia jest taki, że każda czwórka współrzędnych spełniających oba równania odpowiada numerom i wskazaniom na dwóch **akurat** mijających się zegarach. Gdy zainteresuję się, gdzie i kiedy (według zegarów układu O) jest zegar o numerze x' , gdy sam on pokazuje czas t' , wystarczy, że rozwiążę powyższy układ dwóch równań traktując zmienne primowane jako znane, a nieprimowane jak poszukiwane. Mogę zresztą robić z powyższymi równaniami, co mi się podoba. Są one po prostu prawdziwe.

Rzecz jasna, brakuje nam jeszcze wartości a . Nim przejdziemy do jej wyznaczenia, dodajmy nasze równania stronami i pogrupujmy wyrazy podobne. Dostajemy

$$(x + x')(1 - a) = V(t - t')$$

Kluczową sprawą dla faktycznego sensu uzyskanej transformacji jest to czy wielkość a jest równa 1, czy różna od 1. Dla $a=1$ dostaje się trwale $t = t'$, a to właśnie jest sygnałem klasycznej, niutonowsko-galileuszowej fizyki. Równanie ruchu jest $x = Vt + x'$. Zwie się ono transformacją Galileusza.

Przez stulecia wydawało się, że $a=1$, a czas jest **bezwzględny** ($t=t'$). Dlaczego tak długo, tak błędne wrażenie ludzie odnosili? Skąd w ogóle wartość $a=1$ pojawia się jako szczególna?

Otóż, gdy prędkość jest zero, mamy $x=ax'$ oraz $x'=ax$, podczas gdy obie rodziny zegarów (nieruchomych) niczym się nie różnią. Musi więc być $a(V=0)=1$.

Póki prędkość nie przekroczy pewnej wartości, odstępstwo a od 1 też nie przekroczy jakiejś (innej) wartości. Łatwo sobie wyobrazić sytuację, że nawet największe prędkości badane przez fizyków do pewnego momentu historii, pociągają za sobą odstępstwa a od 1 niewykrywalnie małe. Kiedyś nadszedł taki moment, iż błędna wiara iż $a=1$ dokładnie, została podważona.

Spróbujmy **odkryć sami** bez śledzenia **zawiłej historii**, czym takie diabelskie a **musi** być.

$$x = \frac{x' + Vt'}{a}$$

$$t = \frac{t' + \frac{(1-a^2)}{V^2} Vx'}{a}$$

Składanie prędkości:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{x' + Vt'}{t' + \frac{(1-a^2)}{V^2} Vx'} = \frac{\frac{x'}{t'} + V}{1 + \frac{(1-a^2)}{V^2} V \frac{x'}{t'}} = \frac{v' + V}{1 + \frac{(1-a^2)}{V^2} Vv'}$$

Obliczając analogicznie prędkość zegarów z U względem ciała ostatnio rozważanego (który wyznacza nowy układ inercjalny), dostaniemy wzór analogiczny z zamienionymi rolami prędkości V i v' , a tymczasem prędkości te powinny być równe!

$$\frac{v' + V}{1 + \frac{(1-e(V)^2)}{V^2} Vv'} = \frac{V + v'}{1 + \frac{(1-e(v')^2)}{v'^2} v'V} \Rightarrow \frac{(1-e(V)^2)}{V^2} = \frac{(1-e(v')^2)}{v'^2} \equiv C$$

gdzie C od prędkości zależeć nie może. Jest jakąś stałą, która nam się szczęśliwie pojawia. Z tego wynika:

$$a = \sqrt{1 - CV^2}$$

oraz:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - CV^2}}, \\t &= \frac{t' + CVx'}{\sqrt{1 - CV^2}}, \\v &= \frac{V + v'}{1 + CVv'}\end{aligned}$$

Wynik ten, dla zwykłej przestrzeni, będzie zgodny z tym czego się uczymy od 2000 lat w szkole, dla wartości $C = -1$. Przy zastosowaniu różnych jednostek dla osi y i x (np. cali i centymetrów), przy oznaczeniu $c = 2,54 \text{ cm/cal}$, jak to było w jednym z zadań na ćwiczeniach, jest oczywiście $C = -1/c^2$. Krótko mówiąc, ujemne wartości C oznaczają geometrię Euklidesa. Różne wartości C niczym istotnym się nie różnią, gdyż po zmianie skali na którejkolwiek z osi, zawsze można sprowadzić C do najwygodniejszej wartości $C = -1$.

Dopuszczalna przez zasadę względności jest wartość $C = 0$. Odpowiada to absolutności czasu ($t = t'$) i wydawało się ludziom przez setki lat, iż tak jest naprawdę w czasoprzestrzeni.

Dzisiaj wiemy, że C w czasoprzestrzeni jest **dodatnie**, choć w zwykłych jednostkach SI, bardzo małe $C = 1,1 \cdot 10^{-17} \text{ s}^2/\text{m}^2$. Skąd wiadomo, że tyle? O tym na następnym wykładzie

Dla zwykłego obrotu ($C = -1$)

$$\begin{aligned}C &= -1, \quad V = \tan \theta \\x &= \frac{x' + \tan \theta t'}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \cos \theta x' + \sin \theta t', \\t &= \frac{t' - \tan \theta x'}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \cos \theta t' - \sin \theta x', \\v &= \frac{\tan \theta + \tan \theta'}{1 - \tan \theta \tan \theta'} = \tan(\theta + \theta')\end{aligned}$$