

Wykład4

Planowałem na poprzednim wykładzie zakończyć kinematykę i powiedzieć parę słów o wektorach w czasoprzestrzeni, ale nie zdążyłem, więc teraz od tego zaczynamy. Wektory w pełnej czasoprzestrzeni są to **czterowektory**, transformujące się jak 4 współrzędne :

$$\begin{aligned}t &= \frac{t' + V/c^2 x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\y &= y' \\z &= z'\end{aligned}\tag{1}$$

W dwuwymiarowej podprzestrzeni wektory będą miały dwie współrzędne – jedną czasową, drugą przestrzenną. Jeśli numeruje się współrzędne przestrzenne indeksem 1,2,3 (x_1 zamiast x , x_2 zamiast y , x_3 zamiast z) wtedy współrzędnej czasowej przypisuje się indeks 0. Nie należy się dziwić, gdy zamiast t , czas będzie oznaczany niekiedy x_0 .

Najprostszym, najnaturalniejszym wektorem jest więc położenie w czasoprzestrzeni o współrzędnych (t, x) . (albo (x_0, x_1))

Innym ważnym wektorem jest wektor (małego) **przyrostu** wektora wodzącego $(\Delta t, \Delta x)$. Jest to wektor styczny do linii świata. Jest to szczególnie oczywiste w zapisie macierzowym. Skoro

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{gdzie} \quad L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & \frac{V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \frac{V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{pmatrix},$$

obowiązuje osobno dla $\begin{pmatrix} t_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ i dla $\begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, to po odjęciu stronami, dostaniemy

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = L \left(\begin{pmatrix} t_2' \\ x_2' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1' \\ x_1' \end{pmatrix} \right), \text{ czyli } \begin{pmatrix} t_2 - t_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} t_2' - t_1' \\ x_2' - x_1' \end{pmatrix}$$

(Literę L można kojarzyć i z Lorentzem i ze słowem liniowy)

Wektor styczny do linii krzywej w geometrii euklidesowej pełni ważną rolę w badaniu krzywych. Wektor **jakiegoś** przyrostu jest o tyle niewygodny, że jest takich wektorów wiele. No, bo połówka wektora infinitezimalnego przyrostu też jest wektorem stycznym, etc. Dobrze jest brać wektory o standardowej długości.

W geometrii, dzieląc przez niezmiennik $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, dostajemy **jednostkowy** wektor styczny $(\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}, \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}})$

W czasoprzestrzeni też będzie wygodnie używać wektora unormowanego. Znamy niezmiennik, więc unormowanym wektorem stycznym jest:

$$(\frac{\Delta t}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2}}, \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2}})$$

(teraz zbliżenie punktów i zmniejszenie przyrostów już nie zmienia naszego wektora, bo liczniki rosną tak jak mianowniki)

Przyrosty na linii świata wiążą się z prędkością chwilową cząstki: $\Delta x = v\Delta t$. Wstawiając do wektora stycznego mamy:

$$(\frac{\Delta t}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (v\Delta t/c)^2}}, \frac{v\Delta t}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (v\Delta t/c)^2}}) = (\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}})$$

Sens wektora polega na tym, że jego współrzędne w układzie U wyrażają się przez współrzędne w układzie U' za pomocą **tej samej macierzy współczynników**, która pozwala przeliczyć współrzędne czasoprzestrzenne zdarzenia.

Z samej konstrukcji naszego wektora widać, że tak jest. No bo wektor podzieliliśmy przez skalar.

Gdyby świat był Galileuszowy, to TEŻ byłyby w nim czterowektory styczne do linii świata, tylko macierz transformacji byłaby ociupinkę inna

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} \text{ a nie } L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & \frac{V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \frac{V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

Inny byłby też unormowany wektor styczny :

$$u^G = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$$

$$\text{Sprawdźmy jeszcze } \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = u = Gu'^G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ V + v' \end{pmatrix}$$

Niebawem użyteczność tych wektorów stanie się jasna.

W dotychczasowych naszych rozważaniach występowały ciała swobodne, od których wymagaliśmy tylko, by można było ich linie świata dzielić na segmenty równej długości i liczyć liczbę tych segmentów. Natura tych ciał była zupełnie obojętna. Związki między wynikami takiego „liczenia” tyknień na zegarach jednej rodziny wzajemnie nieruchomych zegarów z wynikami dla drugiej rodziny zawarte są we wzorach transformacji Lorentza i tego, co z nich wynika. Ze względu na niezależność od charakteru zegarów, te realne fizyczne własności przypisujemy samej czasoprzestrzeni i mówimy, że tr. Lorentza, czy wzór na „dodawanie” prędkości charakteryzują samą czasoprzestrzeń. Ogół tych własności nazywa się też geometrią czasoprzestrzeni, albo bardziej tradycyjnie, kinematyką.

Można by badać wiele jeszcze ciekawych własności, czysto kinematycznych, zwłaszcza po rozszerzeniu na ruchy kolejnych układów z prędkościami, które nie są współliniowe. Można się zastanawiać nad charakterem zmian, jakie w obrazie ciała rozciągniętego wywołuje jego ruch, przy pamiętaniu o tym, że światło, jakie w danej chwili rejestrujemy, zostało wysłane z różnych punktów ciała w nieco różnych chwilach. Byłoby, więc, przesadą powiedzenie, że zgłębiłszy już kinematykę (relatywistyczną), ale przynajmniej rozumiemy, dlaczego prędkości nie dodają się „zwyczajnie”, a w szczególności, dlaczego, choćby nie wiem jak się starać, nie da się przekroczyć w ruchu prędkości c . Jednak już te skromne początki pozwalają na zajęcie się tym, co interesuje nas najbardziej, a mianowicie podstawami dynamiki. W szczególności chcemy zrozumieć, czym

jest masa, czym jest pęd, czym jest energia. W dalszej kolejności zechcemy zrozumieć, czym jest siła i skąd się biorą równania Newtona.

Drogowskazem, niemal jedynym, w konstrukcji tych pojęć będzie naczelną zasada symetrii. Nieustannie będziemy podkreślali, że w czasoprzestrzeni żaden kierunek nie jest „z natury rzeczy” wyróżniony, a rozmaite, różne układy inercjalne, są wszystkie na równych prawach. Zdumiewające jest, jak wiele daje się dzięki temu zrozumieć.

Próbując zrozumieć jak geometria czasoprzestrzeni wymusza takie, a nie inne prawa oddziaływań, (czyli prawa dynamiki) będziemy rozważali równoległe dwa możliwe światy: ten prawdziwy z niezmiennikiem $t^2 - x^2/c^2$ i ten iluzoryczny, z niezmiennikiem t . Świat Einsteina i świat Galileusza-Newtona. W wielu wypadkach, gdy ograniczyć się do małych prędkości, przewidywania tych dwóch teorii niewiele różnią się od siebie. Są jednak problemy, nawet dla ruchów z prędkościami niewielkimi, gdzie bez teorii relatywistycznej, błąkami się jak we mgle. Jeden z nich, to zbadany na ćwiczeniach problem pochodzenia siły magnetycznej. Bez skrócenia Lorentza, przewód neutralny w jednym układzie (LAB), pozostawałby neutralny także w układzie spoczynkowym elektronu, nie byłoby więc powodu pojawienia się siły działającej na ten elektron. Bardziej dosłownie, siła magnetyczna w prawie Ampera jest proporcjonalna do stałej czasoprzestrzennej C . ($\mu_0 = C/\epsilon_0$)

Drugim zagadnieniem jest uniwersalność zasady zachowania energii. W ramach mechaniki Newtona, nie widać miejsca na takie pojęcie jak energia. Zresztą zasada zachowania energii została odkryta dobre 100 lat po Newtonie. I to nie przez fizyków, a raczej przez praktyków (inżynier Rumford, lekarz Mayer, piwowar Joule), dostrzegających ją w praktyce, gdyż ona naprawdę obowiązuje ściśle, podczas gdy zasady Newtona są tylko przybliżone. Zobaczymy zresztą, że w prawie zachowania energii też wystąpi stała C , i to w mianowniku, więc położenie jej równej 0, byłoby absurdem.

W tradycyjnym podejściu do mechaniki, po zbadaniu najprostszych ruchów, prostoliniowych, jako kolejny stopień wtajemniczenia rozważa się ruchy jednostajnie przyspieszone. Wymaga to jednak natychmiastowego wyjaśnienia, od czego zależy przyspieszenie, czym jest masa, czym jest siła. O kłopotach z klarownym objaśnieniem tych pojęć już wspominałem. Ruch jednostajnie przyspieszony zaś, w teorii relatywistycznej nie jest wcale taki prosty.

Nieskończenie prostsze do ścisłego opisu i do analizy pojęć podstawowych są **inne oddziaływania** niż rozciągłe w czasie przyspieszanie. Są to **ZDERZENIA**. Nam wystarczą, na początek, zderzenia najprostsze, polegające na **sklejeniu** dwóch ciał w jedno, lub rozpadzie jednego w dwa.

Mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka, że procesy takiego sklejanía czy rozpadu to jakiś margines marginesu rozmaitych prawdziwych procesów fizycznych. Nawet, gdyby to był margines, to wnioski, jakie można wysnuć z badania takiego marginesu, jeśli są interesujące, to są interesujące! Ale ja powiem więcej! Wysłuchaliście Państwo wykładu inauguracyjnego. Profesor Pokorski mówił, że synonimem oddziaływania jest wymiana, czyli kolejno emisja i absorpcja przez obiekty oddziałujące innych cząstek, zwanych bozonami pośredniczącymi, którymi są foton, gluon, bozon W, bozon Z, Higgs, no i grawiton. Są przypuszczalnie jakieś jeszcze, ale dla nas, na tym etapie, ważne jest to, iż wszystkie procesy, tak czy inaczej, utkane są z gigantycznych sekwencji przekształceń jednego ciała w dwa, a potem dwóch ciał w jedno. Jak często te wymiany zachodzą, jaki wpływ na owe wymiany ma odległość cząstek oddziałujących, czy ich względna prędkość, stanowi przedmiot badań współczesnej teorii cząstek elementarnych – nam tego rodzaju własności nie będą jeszcze potrzebne.

Linie świata cząstek uczestniczących w takim sklejeniu są półprostymi. Ich charakterystyka do czasu sklejenia (lub tej trzeciej, po procesie sklejenia) sprowadza się do tego samego, co opis cząstek swobodnych. Tu wszystko jest proste. Wyobrażamy sobie także, że owe charakterystyki, (czyli prędkości w tym

czy innym układzie inercyjnym) dla cząstek początkowych są znane. Jak będzie półprosta będąca linią świata cząstki powstałej wskutek sklejenia dwóch początkowych? Oto jest wyzwanie!

Rozważmy dwa **identyczne ciała** lecące na wprost siebie z równymi, co do wartości, prędkościami: w i $-w$. Przyjmijmy, że ciała te zlepią się w jedno. Jaka będzie końcowa prędkość ciała? Bez wahania każdy odpowie: 0. Nie jest tu potrzebna żadna fizyka, żadna wiedza (poza pewną ogólną, oczywistą zasadą symetrii: kierunek z prawa na lewo, nie jest ani lepszy, ani gorszy od kierunku z lewa na prawo). Ciało końcowe **musi** spoczywać.

A teraz rozważmy te same ciała, gdy ciało z prawej już nie spoczywa, a jest w ruchu z prędkością v_2 . Ciało z lewej, pędzi z prędkością dodatnią v_1 , na tyle dużą, by do zderzenia doszło także wtedy, gdy $v_2 > 0$, czyli gdy ciało numer dwa „ucieka” przed zderzeniem. Co teraz? Istnieje, i za chwilę go znajdziemy, układ odniesienia, nazwijmy go CM, lecący z prędkością V względem naszego układu, którym się dotychczas posługiwaliśmy (nazwijmy go układem LAB). Układ CM definiujemy jako ten, w którym prędkości ciał są równe, co do wartości i przeciwne. **Zasada względności**, nic więcej nie jest potrzebne, mówi, że w tym pomyślanym przez nas układzie CM, **tak samo**, jak to miało miejsce w LAB przy pierwszym zderzeniu, symetryczne zderzenie doprowadzić musi do zatrzymania zlepionych ciał! To oczywiste. Skoro tak, to prędkość ciała końcowego w LAB **musi** pokrywać się z wyliczoną przez nas prędkością samego CM, oznaczaną tradycyjnie V . Dlatego możemy napisać $V \equiv v_3$, dla podkreślenia, że wyznaczona prędkość, będzie po prostu prędkością końcową nowego ciała. O układzie CM będziemy mogli zapomnieć. Na „zegarach” owego układu nic nie będziemy odczytywać. Wystarczy sam fakt, że takie zegary **mogłyby być**. To reguła w zastosowaniach STW, z którą już się zetknęliśmy.

Skoro w układzie CM prędkości ciał są w i $-w$, a sam układ ma prędkość V , to:

$$v_1 = \frac{V + w}{1 + Vw/c^2} \text{ oraz } v_2 = \frac{V - w}{1 - Vw/c^2} \quad (4)$$

Wystarczy rozwiązać powyższy układ równań względem V i w , a prędkość ciała po zderzeniu ($v_3 \equiv V$) będzie wyrażona przez v_1 i v_2 . **Nic więcej nie jest potrzebne!!!!!!!!!!!!** A przecież nie zająknąłem się o jakimś pędzie, jakiejś energii. Wcale tymi sprawami się nie zajmowałem w powyższym artykule, ale też nie mam zamiaru brać jakichś wzorów, czy nowych zasad od jakiegokolwiek autora!

Oto moc nowej teorii!

Nie tylko nie będę korzystał z pojęcia pędu, czy masy, czy praw zachowania, ale przeciwnie, układowi równań (4) nadam formę, która natychmiast pozwoli zinterpretować je jako prawa zachowania i dostrzec co jest pędem, co masą a co energią!!!.

Dla osiągnięcia tego celu przydatny będzie dwuwektor styczny przed chwilą poznany. W układzie, w którym cząstki poruszają się symetrycznie ich dwuwektory są:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-w^2/c^2} \\ w/\sqrt{1-w^2/c^2} \end{pmatrix} \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-w^2/c^2} \\ -w/\sqrt{1-w^2/c^2} \end{pmatrix}$$

Suma tych dwuwektorów wynosi

$$u^{(1)} + u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-w^2/c^2} \\ w/\sqrt{1-w^2/c^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-w^2/c^2} \\ -w/\sqrt{1-w^2/c^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{1-w^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

W układzie, w którym cząstki poruszają się symetrycznie wyznaczenie wektora u dla trzeciej cząstki poszło nam dziecinnie łatwo.

Pomnóżmy teraz powyższe równanie przez macierz $L(v_3)$. Zamieni nam ona współrzędne wektorów stycznych w układzie symetrycznym na współrzędne w dowolnym układzie, w którym prędkości cząstek oznaczyliśmy: v_1, v_2, v_3 .

$$u^{(1)} + u^{(2)} = 1 \left(\frac{1/\sqrt{1-v_1^2/c^2}}{v_1/\sqrt{1-v_1^2/c^2}} \right) + 1 \left(\frac{1/\sqrt{1-v_2^2/c^2}}{v_2/\sqrt{1-v_2^2/c^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{1-w^2/c^2}} \left(\frac{1/\sqrt{1-v_3^2/c^2}}{v_3/\sqrt{1-v_3^2/c^2}} \right)$$

Powyższe dwa równania algebraiczne niosą tę samą informację co równania od których zaczęliśmy.

Gdy chcemy znać v_3 wystarczy podzielić stronami powyższe dwa równania stronami. Po prawej stronie zostanie samiutkie v_3 , po lewej zaś ułamek piętrowy, zawierający wyłącznie **dane początkowe**.

$$v_3 = \frac{v_1/\sqrt{1-v_1^2/c^2} + v_2/\sqrt{1-v_2^2/c^2}}{1/\sqrt{1-v_1^2/c^2} + 1/\sqrt{1-v_2^2/c^2}}$$

Osiągnęliśmy to, o co przeważnie w fizyce chodzi. Odpowiedzieć na pytanie, co będzie, gdy wiem, co jest wcześniej. Czasami, może nawet dość często, rozwiązać chcemy zadanie odwrotne: wiemy co było później, a chcemy odtworzyć co było wcześniej.

Rozwiązaliśmy relatywistyczny problem zderzeń nie zająkawszy się nawet co to jest masa, pęd, energia!!!!!!

Jaki związek dla prędkości dostalibyśmy stosując wzory Galileusza? To oczywista oczywistość:

$$1u^{G(1)} + 1u^{G(2)} = 1 \left(\frac{1}{v_1} \right) + 1 \left(\frac{1}{v_2} \right) = 2 \left(\frac{1}{v_3} \right) = 2u^{G(3)}$$

Zadanie o zderzeniu (zlepiających się) jednakowych kul, każdy uczeń rozwiązałby stosując **prawo zachowania pędu** (wynikające **jak źle uczą**) rzekomo z prawa akcji – reakcji. Niech im będzie! Stosując to prawo i nie słysząc o zasadzie względności i jej ścisłych konsekwencjach, przypisując ciałom początkowym masy m , uczeń napisałby dwa prawa zachowania: masy i pędu:

$$m + m = m_3$$

$$mv_1 + mv_2 = m_3 v_3 = 2mv_3$$

Wynik na prędkość końcową jest tu taki jak z naszych rozważań dla przypadku Galileuszowego, ale jeśli prędkości są duże wynik jest inny, a my go

mamy! Oznacza to, iż klasyczne prawa zachowania masy i klasyczna zależność pędu od prędkości **już nie obowiązują**.

Jeśli wskutek umowy, czy porównania z wzorcem, znamy i my masę (wspólną) dla jednakowych ciał początkowych m , i jeśli oznaczymy $m_3 = 2m / \sqrt{1 - w^2 / c^2}$, możemy równania (7) i (8) zapisać w postaci:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}} + \frac{m}{\sqrt{1 - v_2^2 / c^2}} = \frac{m_3}{\sqrt{1 - v_3^2 / c^2}} \quad (9)$$

$$\frac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}} + \frac{mv_2}{\sqrt{1 - v_2^2 / c^2}} = \frac{m_3 v_3}{\sqrt{1 - v_3^2 / c^2}} \quad (10)$$

Równania powyższe mają postać równości sum wyrażeń identycznie zbudowanych dla każdej z cząstek. Po jednej stronie są cząstki początkowe, po drugiej stronie końcowe. To właśnie mamy na myśli mówiąc, że są to prawa zachowania.

Badając zderzenie dwóch ciał różnych, dostaje się analogiczne wzory z masami m_1 i m_2 zamiast m i m . Gdy ciała są różne, ale po zderzeniu się skleją w jedno, to jasne jest, iż obserwując proces w układzie odniesienia w którym ciało końcowe spoczywa, zaobserwujemy na ogół, różne prędkości początkowe: w_1 i $-w_2$. W tej sytuacji możemy **oczywiście** dobrać (na wiele sposobów) dwie liczby m_1 i m_2 tak, by składowe przestrzenne dwuprędkości się sumowały do zera:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{w_2 / \sqrt{1 - w_2^2 / c^2}}{w_1 / \sqrt{1 - w_1^2 / c^2}}$$

W przypadku nierelatywistycznym **stosunek mas** to z definicji liczba bezwymiarowa równa stosunkowi prędkości jakie trzeba nadać ciałom by po sklejeniu się spoczywały. Intuicyjnie odpowiada to wielkości ciała. Dużemu wystarczy nadać małą prędkość by zatrzymało lecące na wprost ciało małe. W teorii relatywistycznej nic mądrego byśmy nie uzyskali definiując tak stosunek mas, trzeba definiować go jako odwrotność składowych dwuprędkości.

Dzięki takiej definicji

$$m_2 w_2 / \sqrt{1 - w_2^2 / c^2} - m_1 w_1 / \sqrt{1 - w_1^2 / c^2} = 0, \text{ a zatem}$$

$$m_1 \begin{pmatrix} 1 / \sqrt{1 - w_1^2 / c^2} \\ w_1 / \sqrt{1 - w_1^2 / c^2} \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 1 / \sqrt{1 - w_2^2 / c^2} \\ -w_2 / \sqrt{1 - w_2^2 / c^2} \end{pmatrix} = (m_1 / \sqrt{1 - w_1^2 / c^2} + m_2 / \sqrt{1 - w_2^2 / c^2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mnożąc stronami przez L i oznaczając $m_3 = (m_1 / \sqrt{1 - w_1^2 / c^2} + m_2 / \sqrt{1 - w_2^2 / c^2})$

możemy równanie powyższe zapisać jako

$$\begin{pmatrix} m_1 / \sqrt{1 - v_1^2 / c^2} \\ m_1 v_1 / \sqrt{1 - v_1^2 / c^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 / \sqrt{1 - v_2^2 / c^2} \\ m_2 v_2 / \sqrt{1 - v_2^2 / c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_3 / \sqrt{1 - v_3^2 / c^2} \\ m_3 v_3 / \sqrt{1 - v_3^2 / c^2} \end{pmatrix}$$

Nietrudno też zrozumieć, np. wyobrażając sobie, że ciało (które nazywaliśmy dotychczas 3) po chwili rozpada się na dwa ciała 3 i 4 (tożsame, albo różne od ciał 1 i 2), iż prawa zachowania zawierać będą po lewej i prawej stronie sumy wielkości odnoszące się, odpowiednio, do wszystkich ciał początkowych i do wszystkich ciał końcowych.

$$\begin{pmatrix} m_1 / \sqrt{1 - v_1^2 / c^2} \\ m_1 v_1 / \sqrt{1 - v_1^2 / c^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 / \sqrt{1 - v_2^2 / c^2} \\ m_2 v_2 / \sqrt{1 - v_2^2 / c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_3 / \sqrt{1 - v_3^2 / c^2} \\ m_3 v_3 / \sqrt{1 - v_3^2 / c^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_4 / \sqrt{1 - v_4^2 / c^2} \\ m_4 v_4 / \sqrt{1 - v_4^2 / c^2} \end{pmatrix}$$

To, co należy wyodrębnić i zapamiętać, to struktura zachowujących się wielkości, ich zależność od prędkości.

Z wzoru (10), jasno wynika, iż pędem należy nazywać od tego momentu wielkość $mv / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, gdyż to ona spełnia prawo zachowania! Ma tę przyjemną własność, że dla małych prędkości, gdy v^2 / c^2 jest znikomo małe, sprowadza się do wielkości znanej z klasycznej fizyki. **Dlatego właśnie nazywamy ją pędem.** Gdy wyjdzie się z dwuwymiarowej czasoprzestrzeni do pełnej czasoprzestrzeni, w której **przestrzeń zegarów** jest trójwymiarowa, zmienną x zastępuje wektor trójwymiarowy. Pęd zamiast jedną liczbą staje się trójwektorem:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2 / c^2}} \quad (11)$$

Zmiana wyrażenia na pęd, jaką wprowadza STW jest istotna dla ciał szybkich, dla fizyki nierelatywistycznej ma niewielkie znaczenie.

Zupełnie inaczej ma się sprawa z „modyfikacją” klasycznego prawa zachowania masy. Zamiast relacji nie zawierającej prędkości, dostajemy równanie wikłające kwadrat prędkości! Wielkość $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ rośnie ze wzrostem kwadratu prędkości. Podejrzewamy, iż ma ta wielkość coś wspólnego z energią.

Warto sobie przypomnieć, że klasyczna mechanika oparta na zasadzie względności z geometrią Galileusza, ma prawo zachowania pędu i masy, prawo zachowania energii jest **jej obce**. To, że niektóre siły bywają potencjalne, co prowadzi do twierdzenia, iż suma energii kinetycznych i potencjalnych układu jest wielkością stałą, to zupełnie inna bajka. Nie ma zasady, która by zabraniała istnienia w mechanice sił niezachowawczych (np. tarcie). W fizyce prawo zachowania energii pojawiło się 150 lat po Newtonie i nie w mechanice, a w termodynamice. Nie zostało wymyślone, a wymuszone przez doświadczenie. Pojawienie się w teorii Einsteina prawa zachowania energii, przy którym poza zasadą względności niczego innego się nie zakłada, jest mało docenianą, w elementarnym nauczaniu fizyki, **rewelacją**. Młodzież szkolna, a i dorośli, uważają zasadę zachowania energii za oczywistą, jedynie przez to, że jest to slogan powtarzany dziesiątki i setki razy. Bez szczególnej teorii względności, nie można jednak zrozumieć nijak uniwersalności zasady zachowania energii, także w domenie niewielkich prędkości. Tak więc, STW ma doniosłe znaczenie nie tylko dla świata wielkich prędkości, ale dla fizyki w ogólności!

Aby powiązać równanie (9) z prawem zachowania energii, rozłożmy zachowaną wielkość $m/\sqrt{1-Cv^2}$ na wartość spoczynkową i przyrost

$$\frac{m}{\sqrt{1-Cv^2}} = m + \left(\frac{m}{\sqrt{1-Cv^2}} - m \right) = m + m \frac{1 - \sqrt{1-Cv^2}}{\sqrt{1-Cv^2}} = m + C \frac{mv^2}{1 - Cv^2 + \sqrt{1-Cv^2}} \quad (12)$$

Pojawił się w liczniku iloczyn mv^2 , a w mianowniku dwa składniki, które dla małych prędkości (małych w porównaniu z c , ale niekoniecznie małych z nasze-

go ludzkiego punktu widzenia; prędkość pocisku względem karabinu jest w powyższym znaczeniu też znikoma) sumują się do 2. Ponieważ to ta wielkość (wraz ze stałą m) wchodzi do ścisłego prawa zachowania, **musimy** tę wielkość nazwać **energiją kinetyczną** T :

$$T = \frac{mv^2}{1 - Cv^2 + \sqrt{1 - Cv^2}} = \frac{1}{C} \left(\frac{m}{\sqrt{1 - Cv^2}} - m \right) \approx \frac{mv^2}{2} \quad (\text{w granicy nierelatyw.})$$

Skoro wielkość $m/\sqrt{1 - Cv^2}$ podlega prawu zachowania, to po podzieleniu jej przez C , dostaniemy wielkość też podlegającą prawu zachowania. Ponieważ jest ona sumą składnika stałego (dla danej cząstki) i energii kinetycznej nazywa się ją **po prostu** energią:

$$E = \frac{1}{C} \frac{m}{\sqrt{1 - Cv^2}} = \frac{m}{C} + T \quad (13)$$

Energia kinetyczna dla układów makroskopowych zwykle spotykanych jest radykalnie mniejsza niż energia spoczynkowa. Na przykład energia spoczynkowa samochodu o masie 1 tony wynosi $\approx 10^{20}$ J. Gdyby wszystkie polskie elektrownie o mocy 30 000 MW użyć do rozpędzenia tego samochodu tak, by energia kinetyczna zrównała się ze spoczynkową, wymagałoby to ok. 100 lat rozpędzania.

Jeżeli w ogólnym prawie zachowania przeniesiemy na jedną stronę składniki z energiami kinetycznymi, a na drugą wyrażenia z energiami spoczynkowymi, dostaniemy bilans:

$$\sum_{\text{konc}} T - \sum_{\text{pocz.}} T = - \frac{\sum_{\text{konc}} m - \sum_{\text{pocz.}} m}{C} = \sum_{\text{pocz.}} mc^2 - \sum_{\text{konc}} mc^2 = c^2 \Delta m \quad (14)$$

To jest to słynne mc^2 ! Tyle wynosi energia spoczynkowa (zwana też energią wewnętrzną) ciała¹. W przeciwieństwie do fizyki klasycznej, gdzie energia we-

⁸ Ponieważ jest naturalne oznaczać literą E energię całkowitą ciała (w ruchu), więc dla uniknięcia wszelkich nieporozumień, powinien słynny wzór Einsteina, symbol 20 wieku, być zapisywany jako $E_0 = mc^2$. Bowiem to energia wewnętrzna, (czyli spoczynkowa) jest, jak pokazaliśmy, równa mc^2 . Energię całkowitą można przedstawić, w różnych postaciach, np. $E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2 / c^2} = mc^2 + T = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$. Gdy

wewnętrzna była domeną termodynamiki, i gdzie była ona niedookreślona (rejestrować i obliczać można było tylko zmiany energii wewnętrznej), teraz jest określona jednoznacznie i wchodzi w domenę mechaniki.

Gdy mamy gwarancje, że ciała końcowe są identyczne (i w identycznym stanie) z ciałami początkowymi, powyższe równanie wyraża prawo zachowania energii kinetycznej (tzw. **zderzenie sprężyste**). Jeśli energia kinetyczna maleje (jak przy zderzeniu kul z plasteliny), wzór (14) mówi nam, że masy końcowe musiały wzrosnąć. Obecność małej wielkości C w mianowniku powoduje, że przy umiarkowanej zmianie energii (jak dla kul plastelinowych, czy dla reakcji chemicznych), wystarczy **bardzo, bardzo** niewielka **procentowo** zmiana masy, by wszystko się zgadzało. Ta zmiana masy jest tak mała, że na wadze jej się nie zauważy, ale ona jest! Różnicy masy się nie zważy, ale zmianę stanu (wzrost temperatury) zauważymy.

Podobnie przy reakcji chemicznej. Weźmy dla przykładu reakcję $H_2 + Cl_2 \rightarrow HCl + HCl$. Nie jest to proces, który w jakikolwiek sposób dałby się opisać równaniami Newtona, jednak prędkości są małe i chcielibyśmy opisać je nierelatywistycznym prawami zachowania. Skąd je brać? Zwłaszcza, jeśli jedynym uzasadnieniem prawa zachowania pędu miało by być prawo ruchu Newtona w połączeniu z jego zasadą „akcji i reakcji”. Tu wyraźnie ujawnia się potrzeba wyprowadzania prawa zachowania pędu w procesie nauczania wprost dla zderzeń, z wykorzystaniem zasady względności (w wersji Galileuszowej, przynajmniej). Wraz z takim wyprowadzeniem, pojawi się prawo zachowania masy, doskonale w praktyce w chemii spełnione.

A skąd wziąć prawo zachowania energii? W tym procesie przyjmie ono postać:

$$T_{1HCl} + T_{2HCl} = T_{H_2} + T_{Cl_2} + Q,$$

cząstka spoczywa w danym układzie, zarówno jej prędkość, jej pęd, jej energia kinetyczna – są równe zero. A wartość energii, tej **spoczywającej** cząstki, według każdego ze wzorów wychodzi mc^2 . Gdy zobaczycie wzór $E = mc^2$ w popularnym tekście, pamiętajcie, że to, w zasadzie, z lenistwa (np. gazety nie potrafią, na ogół, drukować indeksów przy literach), albo dla uhonorowania pewnej tradycji, opuszczono wskaźniczek 0 .

gdzie Q „ciepło” reakcji. Samo to ciepło trzeba, albo zmierzyć, albo wyliczyć w ramach chemii kwantowej, ale że jakieś ono jest, a także to, że im więcej zainwestujemy w energie początkowe, o tyle więcej odnajdziemy w energiach końcowych, jest nijak do udowodnienia w ramach klasycznej mechaniki.

Jedyną, **naprawdę jedyną**, fundamentalną przyczyną istnienia tego prawa jest zawarta we wzorze (1) geometria czasoprzestrzeni, która stosowana konsekwentnie doprowadziła nas do wzoru (14). Nawet, gdybyśmy jeszcze nie znali stopnia małości C stojącego w mianowniku i stopnia małości zmiany sumy mas reagentów, to oznaczając iloraz nieznanych (znikomych) wielkości symbolem Q , mielibyśmy prawo zachowania energii, w postaci użytecznej w chemii. Dynamika Newtona jest bezsilna, jeśli chodzi o wyprowadzenie powyższego wzoru.

O relatywistycznym charakterze prawa zachowania energii świadczy to, iż w równaniu (14), nie da się przejść do granicy $C \rightarrow 0$.

Dochodzimy do wniosku, że nawet energia w obszarze fizyki **nierelatywistycznej** i jej prawo zachowania, jest conceptem całkowicie relatywistycznym.

A jaki jest związek z bombą? Wzór

$$E_0 = mc^2 = 9 \cdot 10^{16} \cdot m \cdot (\text{dżul/kg}) \quad (15)$$

wskazuje jak potworny zapas energii drzemie w niewinnym kilogramie materii. Jak ją „wydobyć”, jak przekształcić na energię kinetyczną dającą się zaprząć do pracy (albo do zniszczenia), to inna sprawa. Historycznie rzecz ujmując, w latach trzydziestych ubiegłego wieku, fizycy wiedzieli, że możliwe są przekształcenia jąder atomowych. W pewnym momencie zorientowano się, że możliwy jest w, szczególności, rozpad jądra uranu na dwa lżejsze jądra (i dodatkowo dwa lub trzy neutrony). Wiedziano z pomiarów mas atomowych, że suma mas jąder końcowych i mas końcowych neutronów jest mniejsza o ok. 0,1% od masy rozpadającego się jądra. 0,1%, to inaczej 1/1000, co zmniejsza wykładnik we wzorze (15) z 16 do 13, ale $9 \cdot 10^{13}$ dżuła z kilograma uranu to i tak ogromnie dużo.

To tyle ile wynosi energia prawie biliona(!) pocisków ~~z kałasznikowa!~~ pistoletowych!

Straszna – jeśli chodzi o zabijanie – owa potęga może być zbawieniem ludzkości w najbliższych dziesięcioleciach jako jedyne, naprawdę obfite źródło energii. Ropa, węgiel, gaz ziemny dość szybko się wyczerpują. Jeśli, Czytelniku, jesteś młody, Twoim wnukom, gdy dorosną może już nie wystarczyć! A wobec takiej perspektywy, już niedługo (już dla Ciebie) kopalne surowce energetyczne zaczną jak szalone drożeć.

Oprócz rozpadu ciężkich jąder, również niektóre procesy syntezy (np. deuter + tryt $\rightarrow$ hel + neutron) charakteryzują się znaczną obniżką końcowej masy (zwanej kiedyś „masą spoczynkową”) produktów końcowych. To oczywiście proces zachodzący w bombie wodorowej. Reakcji tej **jeszcze** nie umiemy prowadzić w sposób kontrolowany, nie gwałtowny. Do czasu opanowania tego problemu należy wykorzystywać i rozbudowywać bardziej konwencjonalną energetykę opartą na uranie (i ewentualnie torze). Obawy, jakie żywią społeczeństwa wobec energetyki jądrowej są, mam wrażenie, sztucznie podniecane przez korporacje czerpiące ogromne zyski z energetyki konwencjonalnej. Szkodliwość, tej ostatniej, dla środowiska (a także liczba ofiar w całym procesie wydobywania węgla, chociażby) w przeliczeniu na jednostkę uzyskanej energii elektrycznej są wielokrotnie groźniejsze od szkód i ofiar energetyki jądrowej, włącznie z Czarnobylem, oczywiście. Gdyby przyjąć, że katastrofa w Czarnobylu, będąca wynikiem wyjątkowego zbiegu okoliczności, nie ma prawa się powtórzyć, można określić energetykę jądrową, jako **nieskończenie** bezpieczniejszą² i bardziej ekologiczną od konwencjonalnej.

² W trakcie korekty tego artykułu ogłoszono bardzo poważny raport dotyczący skutków katastrofy czarnobylskiej. Główną tezę raportu jest to, iż faktyczne złe skutki, okazują się **radykałnie mniejsze** od tego, co się przez wszystkie te lata głosiło w środkach masowego przekazu. To bardzo podbudowuje pogląd o niezwyklej przewadze ekologicznej energetyki jądrowej, nad energetyką węgla i ropy.