Wykład 6

Uzbrojeni w prawa zachowania energii i pędu cząstek oddziałujących **bezpośrednio** z innymi cząstkami, w pojedynczych aktach zderzeń, możemy przejść do badania oddziaływań polegających na ciągłym, czy niemal ciągłym przekazie pędu (i energii) do rozpatrywanego ciała, a wkrótce do badania sytuacji, gdy w taki ciągły sposób przekazuje sobie pęd kilka, czy nawet wiele oddziałujących ciał. Co więcej, rozstajemy się na dłużej z prędkością światła. Oznacza to, iż ograniczamy się do zjawisk zachodzących z małymi prędkościami. Mniej nas będą też interesować przemiany materii, a tylko jej ruch. Na tym polega klasyczna mechanika. Zaczęliśmy od teorii względności, bo z niej czerpiemy zrozumienie, czym są wielkości występujące w tej mechanice. Czym jest czas, położenie, masa, pęd i energia.

Badanie szerokich klas oddziaływań nauczy nas, kiedy i jak pojawiają się równania ruchu. Zrozumiemy, kiedy możemy na nie liczyć, a kiedy nie! Za ich pomocą zbadamy szereg ważnych układów fizycznych.

Słowo „prawie ciągłych” jest może przejawem nadmiernej ostrożności. Czy wypływ gazów spalinowych z silnika odrzutowego to proces ciągły, czy nie? Oczywiście materia jest ziarnista, więc wyrzucanie tych spalin, to seria skończonej liczby aktów „rozpadu” rakiety na molekułę spalin i resztę, ale pamiętanie o tej ziarnistości z reguły nie będzie potrzebne. W rozumowaniach będziemy często zakładali, że porcja spalin może być dowolnie mała – w takim sensie jak przyrosty zmiennych w definicji pochodnej.

Ruch rakiety

Zacznijmy od pouczającego przykładu ruchu rakiety. Zasada względności (w wydaniu Galileuszowym) i zasada zachowania pędu oraz masy (energią interesować się tutaj akurat nie będziemy) pozwalają niemal natychmiast wyznaczyć ruch takiej rakiety. Pomijamy grawitację – możemy sobie na przykład wyobrazić że interesujemy się fazą rozpędzania samolotu na lotnisku, gdy przyspieszenie jest wyłącznie w kierunku poziomym. Zresztą, gdy już rozpracujemy rakietę w ruchu bez grawitacji, potrafimy **natychmiast** znaleźć jej ruch przy starcie pionowym w polu grawitacyjnym!

Przydatne będzie pojęcie układu **kowędrującego** rozpatrywanego na ćwiczeniach (dla nieco bardziej wyrafinowanego przykładu ruchu przyspieszonego w teorii względności). W takim układzie kowędrującym, rakieta w chwili dla której on został wprowadzony ma prędkość **zero** i właśnie startuje. Przez krótką chwilę wyrzuca ona porcję spalin o masie $\mathrm{d}m$ z prędkością w nabierając niewielkiej prędkości $\mathrm{d}v$. Żeby napisać prawo zachowania pędu, trzeba założyć, że porcja spalin (i uzyskana w w efekcie prędkość rakiety) jest bardzo, bardzo mała. Po co nam to? To proste. Silnik wyrzuca spaliny z zadaną prędkością w względem siebie. W pierwszej chwili, gdy spoczywał, w było tez prędkością w układzie kowędrującym. Pod koniec tego (bardzo krótkiego, skoro porcja spalin ma być mała) okresu silnik ma maleńką prędkość dv i prędkość ostatnich molekuł owej małej porcji wynosi już nie w a w-dv (Galileusz się kłania). Więc pęd spalin w układzie kowędrującym wynosi $\mathrm{d}m(w-\theta \mathrm{d}v)$, gdzie θ jest jakąś liczbą dodatnią mniejszą od 1. Naprawdę jestem pedantem w tym miejscu. W ogóle się tym okruszkiem nie powinienem zajmować. A jeśli już, to mógłbym wziąć $\theta = 1/2$. Ale co mi tam! Nic nie kosztuje, a jestem precyzyjny „do bólu". Wartość $(w-\theta \mathrm{d}v)$ jest rzeczywiście mniejsza od w i większa od w-dv.

Prawo zachowania pędu daje natychmiast, że $(m-|\mathrm{d}m|)\mathrm{d}v = |\mathrm{d}m|(w-\theta \mathrm{d}v)$. Pęd spalin do tyłu i pęd „reszty" z rakiety, po wyrzuceniu spalin o masie m-|dm| mają być (co do wartości) równe. Przez m oznaczyłem masę rakiety z paliwem w chwili, do której odnosi się układ kowędrujący.

Ale oto Galileusz znów nam się przyda. Przyrost prędkości w układzie kowędrującym dv jest **zarazem** przyrostem prędkości rakiety względem układu inercjalnego, w którym zaczęła ona cały ruch. Oznaczając literą $v(m)$ prędkość tego ruchu w chwili do której odnosi się układ kowędrujący (jest to zarazem stała prędkość względem Ziemi tego szczególnego układu kowędrującego) , czyli wtedy gdy rakieta miała z paliwem masę m widzimy, że prędkość rakiety gdy jej masa spadła do m-|dm|, wzrosła do $v(m)$+ dv wyliczone wcześniej. Innymi słowy wyliczone dv jest zmianą funkcji $v(m)$, gdy gdy masa maleje o | dm|. Skoro masa maleje, to dm = -|dm|.

$$(m+\mathrm{d}m)\mathrm{d}v(m) = -\mathrm{d}m(w-\theta \mathrm{d}v)$$

Dzieląc stronami przez dm mam:

$$(m+\cancel{\mathrm{d}m})\frac{\mathrm{d}v(m)}{\mathrm{d}m} = -(w-\cancel{\theta \mathrm{d}v})$$

W celu obliczenia pochodnej prędkości po masie, będziemy przechodzić z przyrostami do zera. To, co było iloczynem małych wielkości, pozostało jeszcze w równaniu, ale już w przejściu granicznym wypadną i – szczerze mówiąc – nie wiem czy zrobiłem dydaktycznie babrając się nimi. Mogę tylko stworzyć wrażenie, że to wszystko jest bardziej skomplikowane niż naprawdę. Rozumiejąc już $\frac{\mathrm{d}v(m)}{\mathrm{d}m}$ jako **granicę** (czyli pochodną) mam:

$$\frac{\mathrm{d}v(m)}{\mathrm{d}m}=-\frac{w}{m}$$

Raz to trzeba było może przećwiczyć, ale przy ponownych okazjach, będziemy szybsi!

Na dobrą sprawę, powinna argumentacja i część matematyczna wyglądać tak: Porcja paliwa o masie –dm (wędrująca wraz całą rakietą) przekształcona w spaliny, uzyskuje nagle zmianę prędkości o w i zmianę pędu (do tyłu) o -w dm. Rakieta zyskuje taką sama wartość pędu (do przodu) wyrażona jako mdv. A więc znów:

$m\mathrm{d}v(m)=-w\mathrm{d}m$, czyli:

$$\frac{\mathrm{d}v(m)}{\mathrm{d}m}=-\frac{w}{m}$$

. Dla tych, co już wiedzą, iż pochodna logarytmu naturalnego dln(m)/dm = 1/m mamy:

$$\frac{\mathrm{d}v(m)}{\mathrm{d}m}=-w\frac{\mathrm{d}\ln(m)}{\mathrm{d}m},$$

lub inaczej

$$\frac{\mathrm{d}(v(m)+w\ln(m))}{\mathrm{d}m}=0 \Rightarrow v(m)+w\ln(m)=\mathrm{const}$$

Stałą możemy wyznaczyć, jeśli znamy masę początkową, w chwili gdy prędkość była jeszcze równa 0. Oznaczając ją literą M, mamy:

$$v(m)+w\ln(m)=\mathrm{const}=0+w\ln(M)$$

lub inaczej:

$$v=w\ln\left(\frac{M}{m}\right)$$

Jest to słynne równanie Ciołkowskiego.

Jako swoistą ciekawostkę, a trochę mając na uwadze tych, co jeszcze nie dotarli w swych studiach do pochodnych przedstawię prościutkie rozumowanie pozwalające dojść to powyższego rezultatu. W tym celu zastosuję pewien wybieg. Znów podzielę rozpędzanie na wiele etapów, ale niekoniecznie równej długości! Wprowadzę dużą liczbę n i przyjmę, że (tylko w myślach, bo silnik pracuje bez przerwy!) utnę kolejny etap, gdy wyrzucona masa wyniesie 1/n tego co zostało!! Bilans pedu jest jasny. Masa n razy większa (rakieta z paliwem pod koniec rozważanego etapu) zyska prędkość n razy mniejszą, czyli w/n. Dzięki sztuczce, zysk prędkości jest w każdym etapie taki sam. Po i etapach prędkość $v_i=\frac{i}{n}w$, czyli rośnie w postępie arytmetycznym, za to masa, mnożąca się **o czynnik** $n/(n+1)$, maleje w postępie geometrycznym. Po i etapach wynosi $m_i = M\left(\frac{n}{n+1}\right)^i$. Wyrażając i przez prędkość po i-tym etapie, zwiążę aktualną masę z aktualna prędkością:

$$m(v) = M\left(\frac{n}{n+1}\right)^{vn/w} = M\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^{v/w} = M\left(\frac{1}{(1+1/n)^n}\right)^{v/w}$$

Jasne, że drobne błędy związane z zaniedbaniem zmiany prędkości spalin w trakcie etapu, znikają w granicy $n \to \infty$. W mianowniku pojawia się e, podstawa logarytmów naturalnych.

$$m = Me^{-v/w}$$

Po zlogarytmowaniu, mamy

$$v/w = \ln(M/m).$$

Uroki analizy

Mając ostateczny wynik, możemy zbadać wyrażenia na zmianę prędkości w jednym kroku **ściśle**, bez żadnych przybliżeń.

$$\Delta v = w\ln(1+1/n)$$

Spodziewaliśmy się *w/n*. Co się dzieje?

Wiemy, że pochodna logarytmu to odwrotność.

$$\left(\ln(1+x)\right)' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)'$$

Te dwie skrajne pochodne są równe, więc funkcje mogą się różnić o stałą. I logarytm i szereg potęgowy przyjmują wartość zero dla x=0, więc stałej już żadnej nie trzeba dodawać. Rozwinęliśmy sobie logarytm w szereg nieskończony, bliski krewny szeregu geometrycznego.

$$\Delta v = w\ln(1+1/n) = w\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right) = \frac{1}{n}\left(w - \frac{w}{2n} + \cdots\right)$$

Teraz powinniśmy się czuć w pełni usatysfakcjonowani! Przyrost prędkości, (gdy pozostałość jest n razy masywniejsza od wyrzuconej porcji spalin) jest w pierwszym przybliżeniu $1/n$ –tą prędkości w. W drugim przybliżeniu, jest to $1/n$ –ta prędkości w zmniejszonej o połowę wartości przyrostu wyliczonego w pierwszym przybliżeniu, czyli średniej arytmetycznej w i $w - \Delta v$. Taka średnia byłaby ścisła, gdyby prędkość w badanym przedziale zmieniała się liniowo z masą. Ale logarytm ma wykres wypukły i tylko dla krótkich odcinków można o tym zapomnieć. Uzyskany szereg wie o wszystkich subtelnościach!

Jest **cudem analizy** matematycznej, że nie wiedząc a priori jak dokładnie zapisać bilans zmiennych wielkości dla skończonych przyrostów, a jedynie robiąc to w przybliżeniu, potem, w dalszej procedurze odtwarzamy ów bilans zupełnie ściśle.

Widzicie Państwo naocznie, że dla wyznaczenia prędkości ciała nie było nam potrzebne pojęcie siły. Nie posługiwaliśmy się przyspieszeniem. Zresztą nawet nie wiadomo, jakie ono jest!!! To śmieszne, ale powyższy wynik obowiązuje także dla dowolnego, nierównomiernego tempa wyrzucania spalin (byle ta prędkość względem rakiety była stale równa w).

Gdy założę jakiś przebieg spalania, np. równomierny w czasie $m = M - \alpha t$, wtedy uzyskam prędkość jako funkcję czasu:

$$v(t) = w \ln\left(\frac{M}{M - \alpha t}\right)$$

Znalezienie położenia, to zadanie rachunku całkowego. Nie będziemy go rozwiązywać, bo za wcześnie. Zresztą w problemie tym ważny morał wiąże się z prędkościami jakie się zyskuje, a nie ze szczegółowym rozkładem jazdy.

Rzecz w tym, że gdy napotykamy zależność logarytmiczną, a zależy nam na uzyskanie **możliwie dużej** wartości, to mamy ... przechlapane. Logarytm, rosnący żwawo w okolicach argumentu 1 (gdy dodamy 1/100 do jedynki, logarytm naturalny wzrośnie od zera do 1/100. Gdy dodamy 2/100 wzrośnie też (prawie) do 2/100), jednak, gdy już logarytm wynosi 5 (a argument ok. 140) jego zwiększenie o skromne 20% do wartości 6 wymaga zwiększenia argumentu do wartości ... ok. 400.

A w naszym wypadku argument logarytmu to stosunek początkowej masy rakiety z paliwem, do masy silnika i części użytkowej rozpędzonego pojazdu. Znacznie skuteczniej zwiększyć prędkość zwiększając prędkość spalin. Wygrali wyścig w kosmos ci, co wymyślili wcześniej optymalne paliwo. Nie bez znaczenia dla prędkości ma też aerodynamika w dyszach wylotowych.

A co z grawitacją? Obiecałem, że wpływ łatwo uwzględnić. Czym jest grawitacja? To subtelna sprawa. Aż się boję o tym mówić, ale w teorii Einsteina grawitacji nie ma siły grawitacji! Czasoprzestrzeń jest zakrzywione a ruch w polu jest po liniach najprostszych w tej przestrzeni. To za trudne na teraz. Ale nie jest za trudne i **całkowicie** w duchu klasycznym, nawet szkolnym, obserwacja, że w spadającej windzie o grawitacji można zapomnieć! To wystarczy, by w prostszych sytuacjach dać sobie radę. Trzeba tylko wiedzieć, że intensywność grawitacji scharakteryzowana jest przez wartość przyspieszenia **wszelkich** ciał jakie puścimy bez prędkości początkowej w danym polu.

No to (znów pomyślmy tylko, bez realnych czynności), że obok miejsca startu rakiety do pionowego lotu do góry , wykopano studnię, i w momencie odpalenia rakiety upuszczono kamyk (opór powietrza zaniedbujemy). Na kamyku siedzi mądra mrówka i opisuje ruch rakiety w warunkach nieważkości. Otrzyma te wzory, co i my. Ale prędkość względem Ziemi jest mniejsza od prędkości względem mrówki o prędkość mrówki *gt*.

Zatem teraz $v(t) = w\ln(\frac{M}{M-\alpha t}) - gt$

Przy zbyt wolnym tempie spalania drugi człon może przeważyć nad pierwszym i rakieta wcale nie wystartuje. Gdy nawet wystartuje, ale tempo będzie skromne, czas spalenia całego zapasu będzie długi i duży będzie człon ujemny. Korzystne jest, zatem, rozwijanie możliwie największych mocy i spalenie tego, co jest do spalenia, w jak najkrótszym czasie.

Ruch ciała w rozrzedzonym ośrodku.

W przykładzie powyższym wystarczyło nam samo zbilansowanie pędu dla osiągnięcia celu, jakim było wyznaczenie ruchu. W kolejnych będziemy też potrzebowali prawa zachowania energii.

Rozpatrzmy ciało, dla konkretności w kształcie walca o polu podstawy *S*, długości *L* i gęstości ρ. Niech walec ten porusza się względem ośrodka (trochę wydumanego) bardzo rozrzedzonego i zimnego. Tak by prędkości molekuł można było zaniedbać względem prędkości walca. Pewne cechy uzyskanego wyniku przenoszą się na sytuacje znacznie bardziej realistyczne, choć to byłoby dość trudno udowodnić na tym etapie studiów.

Walec lecąc ze swoją (systematycznie malejącą jak się okaże) prędkością uderza w znajdujące się na jego drodze molekuły. Trochę to wygląda jak uderzenie rakietki pingpongowej w „wystawioną” do serwisu piłeczkę. Jaką prędkość uzyska takie nieruchome ciało, uderzane przez coś znacznie masywniejszego?

Widziałem długi artykuł napisany przez poważnego profesora poświęcony temu zagadnieniu. Pracowicie liczone było zderzenie z wykorzystaniem prawa zachowania energii i pędu dla dwóch ciał o masach *m* i *M*, po to, by po uzyskaniu wzorów przejść do granicy *M*/*m* dążące do nieskończoności.

A przecież to takie proste!

Wystarczy bez zahamowań zmieniać układy odniesienia jak rękawiczki. W układzie spoczynkowym dużego ciała (naszego walca, czy rakietki) małe ma jego prędkość, nazwijmy ją *v* w kierunku ciała. Zderzenie z ciałem przekazuje mu pęd *p*+*p*’ (co najwyżej 2*p*) ale energię, w tym układzie ... zerową. No, bo z oczywistego wzoru $T=p^2/2M$ widać, że gdy pęd ograniczony, a masa **ogromna** energia kinetyczna jest zaniedbywalnie mała[1]. Dlatego ciało odskoczy z

[1] Warto zauważyć, że, dość nieoczekiwanie, zmiana energii ciała nieskończonego przy podobnym zderzeniu z małym ciałem, ale liczona w układzie, w którym duże ciało ma prędkość przed zderzeniem *v* różną od zera, jest

prędkością v, tyle, że teraz w kierunku lotu ciała. Dzięki Galileuszowi wiemy, że w układzie ośrodka prędkość ta będzie $v+v=2v$.

Uderzane cząstki zmieniają pęd o $2mv$ o tyle samo (w przeciwnym kierunku) zmienia pęd lecący walec. W czasie $\mathrm{d}t$ przebędzie on drogę $v\mathrm{d}t$ „zamiatając” obszar o objętości $Sv\mathrm{d}t$. Wszystkie cząstki w tym obszarze zostaną uderzone, a ich łączna masa wyniesie $\rho_{\text{osrodka}} Sv\mathrm{d}t$. Ponieważ wszystkim nadano jednakowe, równoległe prędkości $2v$, ich pęd wyniesie

$2\rho_{\text{osrodka}} Sv^2\mathrm{d}t$

Przeciwny znak będzie miała zmiana pędu walca

$$\mathrm{d}P = -2\rho_{\text{osrodka}} Sv^2\mathrm{d}t$$

W postaci pochodnej

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -2\rho_{\text{osrodka}} Sv^2$$

Pięknie!

Można też, korzystając z postaci pędu zapisać lewą stronę z użyciem przyspieszenia

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\rho_{\text{osrodka}} Sv^2$$

Wyznaczyliśmy **szybkość zmiany** pędu ciała. Dzięki jasnemu zdefiniowaniu sytuacji, dzięki zasadzie zachowania pędu i energii w indywidualnych zderzeniach, dzięki znajomości gęstości ośrodka oddziałującego na ciało wyznaczyliśmy tę szybkość zmian.

Czy mówił ktoś coś o sile? Nie! Czy przywoływał ktoś Newtona? Nie.

Ale to **jest równanie Newtona**. Nie trzeba go odkrywać. Czy jest w tym równaniu jakaś siła? Właściwie to nie! Jest szybkość zmiany pędu policzona na dwa sposoby: z własności pędu wynika, że jest to iloczyn masy i przyspieszenia, z charakteru oddziaływania została wyznaczona jako funkcja prędkości, a przy okazji też uzależniona od pola przekroju poprzecznego walca, i gęstości ośrodka, w którym odbywa się ruch.

Wygodnie jest nazwać szybkość zmiany pędu siłą. Ale nie dlatego masa razy przyspieszenie (czy jak kto woli pochodna pędu) jest równa sile, bo takie jest prawo przyrody, tylko dlatego, że taką nazwę wprowadzamy! Z samego wzoru $ma=F$ **nic absolutnie nie wynika**. Dopiero gdy **już wiemy jaka ta szybkość zmiany pędu jest**, gdy znamy to drugie wyrażenie na zmianę pędu (nie to wyrażone przez ma) w funkcji prędkości, albo położenia, albo i jednego i drugiego, a może jeszcze w funkcji czasu, dopiero wtedy równanie przyrównujące te dwa

---

już różna od zera! No, bo $(P+p)^2/2M-P^2/2M=Pp/M+p^2/2M=vp$. Drugi człon z masą w mianowniku i małym pędem w kwadracie w liczniku znika, ale człon z dużym pędem podzielonym przez dużą masę daje niezerową wyrażenia na zmianę pędu jest czymś użytecznym. Dopiero wtedy ma treść i nadaje się do rozwiązywania.

Gdyby przyroda miała taka własność, że ośrodek, inne ciała, oddziaływania z nimi, określały by prędkość ciała w każdym kolejnym położeniu, znajomość takiej funkcji pozwalała by przewidywać ruch:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(x,t)$$

Zamiast myśleć o „rozwiązywaniu” jakimiś wzorami tego typu równania, warto sobie uświadomić jak ono „działa”. Jeśli znam położenie początkowe, to znam prawą stronę (gdy „rozkład jazdy” jest explicite znany, nawet w postaci tabeli wartości) dla tego położenia. Przez bardzo krótko niedaleko zawędrujemy, więc położenie będzie bliskie początkowemu, a prędkość bliska $v(x_0, t_0)$, więc nowe położenie będzie $x_0 + v(x_0, t_0)\mathrm{d}t$, a czas $t_0+\mathrm{d}t$. Z nowym czasem i nowym położeniem (pełniącym rolę nowego położenia „początkowego”) mogę powtórzyć powyższy krok i tak , jak mówimy, ewoluować ten warunek początkowy wyznaczając krok po kroku położenie dowolnie daleko w przyszłości.

W taki sposób jakiś naczelny strateg Cesarstwa Rzymskiego mógł planować drogę ekspedycji wysłanej gdzieś nad odległy Ren, jeśli na podstawie wieloletnich doświadczeń wiedział ile mil na dobę przebywają legioniści gdy idą po dobrej drodze w Italii, ile gdy pokonują alpejskie przełęcze, czy może jeszcze jakieś bagniska gdzieś dalej.

Przypuszczenie (całkowicie błędne), że oddziaływania określają prędkość ciała wysłowione przez Arystotelesa pokutowało przez stulecia. Żaden postęp, przy takim założeniu nie był możliwy.

Po odkryciu przez Galileusza zasady bezwładności stało się jasne, że prędkość w danym miejscu może być dowolna. W szczególności dla ciała swobodnego, każda prędkość jest możliwa. Co więcej ona się utrzymuje. Newton przypuścił, że może da się ustalić **z góry**, przed rozpoczęciem ruchu, (ale być może po wcześniejszym zbadaniu podobnych ruchów), jaka będzie zmiana prędkości jako funkcja samej prędkości i położenia ciała:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(x,v,t)$$

Równanie takie, wraz z wcześniejszym, przy zadanym położeniu początkowym i **prędkości początkowej** pozwala na taka sama ewolucję tych warunków jak przed chwilą omawiałem. Do relacji $x_1= x_0+ v_0\mathrm{d}t$, $t_1= t_0+\mathrm{d}t$, trzeba dopisać $v_1= v_0+ a(x_0, v_0, t_0)\mathrm{d}t$.

---

prędkość ciała v.

Ten tok myślenia zakończył się znacznym sukcesem, trochę przez przypadek. Otóż prędkość światła jest ogromna. Dlatego prawdziwy pęd, podlegający prawu zachowania, jest z dobrym przybliżeniem proporcjonalny do prędkości, a przyspieszenie jest proporcjonalne do szybkości zmiany pędu. Pęd jako wielkość ważna, bo spełniająca prawo zachowania, prze-przepływająca między oddziałującymi ciałami, może faktycznie mieć w wielu przypadkach jednoznacznie zdeterminowaną szybkość przepływu przez położenie i prędkość (nie musi, ale dość często tak jest). Niuton zauważył też genialnie, iż rozpatrywanie nie tyle przyspieszenia, co iloczynu przyspieszenia i czegoś co określało wielkość ciała, jego łatwość, względnie trudność popchnięcia przez inne ciała, czyli stosownie dobranej do ciała masy, powoduje, że prawa strona nabiera większej uniwersalności.

No bo tak jak w naszym przykładzie. Zmiana długości walca (albo gęstości) nie ma żadnego znaczenia dla liczby zderzeń i pędu traconego, a przyspieszenie będzie różne dla walców o różnych masach.

Istnieje jeszcze jeden powód dla którego zdefiniowanie i zajęcie się akurat ową szybkością zmiany pędu, czyli siłą okazało się tak owocne.

Przypomnijmy z wykładu ostatniego:

$$\Delta T = \vec{v}\Delta\vec{p} = \Delta\vec{x}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \equiv \vec{F}$$

$$\Delta T = \vec{F}\Delta\vec{x}$$

Szybkość zmiany pędu (na jednostkę czasu) jest **też szybkością zmiany energii na jednostkę drogi**.

Nie chciałbym ująć ani krzty zasług Newtonowi. Uznałem, że po tylu latach warto (skoro jest taka możliwość, bo tak dużo już wiedzy nagromadziliśmy i przetrawili przez tych parę stuleci) wprowadzać równania ruchu nie dogmatycznie, tak jest bo tak jest. I Zasada, II Zasada, III Zasada.

I Zasada jest rzeczywiście kluczowa. Bez niej nie byłoby możliwości określenia układów inercjalnych, zasady symetrii (równouprawnienia tych układów). Nie byłoby nic. A tak jest czasoprzestrzeń, masa, pęd energia.

W tej sytuacji nie potrzebujemy II Zasady. Przyjmujemy wygodna nazwę dla szybkości przepływu pędu i skupiamy się na tym jak ją wyznaczyć w zależności od okoliczńsci.

Nie potrzebujemy też III Zasady, **bo ją mamy automatycznie**.

Skoro pęd jest zachowany, a dwa ciała oddziałują wymieniając sobie pęd, którego suma jest stała to

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

czyli ostatecznie $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Gdy oddziaływanie jest tak szczególnie cywilizowane, że istnieje ciągła wymiana pędu między dwoma **wyłącznie** ciałami, i kiedy można zdefiniować szybkość tej wymiany i nazwać ją siłą, to równość dwóch sił działających na dwa oddziałujące ciała i ich przeciwny zwrot jest konsekwencją czegoś znacznie ogólniejszego – prawa zachowania pędu.

Ale wróćmy do naszego równania. Jest to pierwsze równanie Newtona, jakim się zajmujemy. Rzeczywiście szybkość zmiany pędu dała się opisać jako zależna wyłącznie od szybkości ciała. Na tym przykładzie prześledzimy rolę warunków początkowych.

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\rho_{\mathrm{osrodka}} S v^2$$

Jest to równanie różniczkowe. Fizycy bez przerwy rozwiązują równania różniczkowe. Prostsze z nich dają się rozwiązać „sposobem” i sprowadzają do odgadnięcia jaka funkcja ma żądaną pochodną.

Gdy pochodna jest znana jako funkcja zmiennej niezależnej, w mechanice to na ogół czas jest tą zmienną, wtedy równanie określające postać pochodnej domaga się wprost odgadnięcia co po zróżniczkowaniu da nam tyle co trzeba. Nazywa się to szukaniem funkcji pierwotnej, albo całkowaniem. Ale gdy pochodna jest dana jako funkcja zmiennej zależnej, to trzeba chwilę pomyśleć i ... powiedzieć sobie, że będę traktował zmienną zależną jak niezależną i odwrotnie. Skoro prędkość jest funkcja czasu, to i czas jest funkcja prędkości! Jaka jest pochodna czasu po v? Ano:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = -\frac{M}{2\rho_{\mathrm{osrodka}} S v^2}$$

Przepięknie! Czas jako funkcja prędkości jest, poza stałym współczynnikiem minus drugą potęgą prędkości. Pochodna $1/v$ jest $-1/v^2$. To każdy wie! No to mamy

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{M}{2\rho_{\mathrm{osrodka}} S v} = 0$$

Gdy pochodna jest zerem, wielkość różniczkowana musi być stała. Oznaczmy ją C.

$$t - \frac{M}{2\rho_{\text{osrodka}} S v} = C$$

stałą tę wyznaczamy poprzez prędkość początkową (w chwili t=0). Oznaczmy tę prędkość jako $v(0)$.

$$-\frac{M}{2\rho_{\text{osrodka}} S v(0)} = C$$

Ostatecznie:

$$t = \frac{M}{2\rho_{\text{osrodka}} S}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v(0)}\right)$$

Teraz, nikt nam nie może zabronić rozwiązania tej zależności w drugą stronę i wyrażenia prędkości przez czas.

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v(0)} + \frac{2\rho_{\text{osrodka}} S t}{M}}$$

Teraz chcielibyśmy wyznaczyć też położenie. Poza współczynnikami, nasza funkcja to zasadniczo odwrotność. A odwrotność jest pochodną logarytmu, co stwierdziliśmy nawet samodzielnie już w przykładzie z rakietą.

$$x(t) = x(0) + \frac{M}{2\rho_{\text{osrodka}} S}\ln\left(\frac{1}{v(0)} + \frac{2\rho_{\text{osrodka}} S t}{M}\right) = x(0) + L\frac{\rho_{\text{walca}}}{2\rho_{\text{osrodka}}}\ln\left(\frac{1}{v(0)} + \frac{2\rho_{\text{osrodka}} S t}{M}\right)$$

Zależność siły oporu od kwadratu prędkości (tyle, że z innym współczynnikiem liczbowym niż nasz) jest typową dla ruchu rozmaitych ciał, np. samochodów. Współczynnik zależy od kształtu i jest niski dla kształtów „aerodynamicznych”. Z pewnym sensem, wzór na przebytą drogę może być stosowany do takich zagadnień jak zasięg harpuna rzuconego, czy wystrzelonego w podwodnym polowaniu, albo nawet zasięgu pocisku przebijającego pancerz.

Widać, że zasięg jest logarytmiczny, więc powiększanie prędkości staje się od pewnego momentu bardzo kosztowne, a mało efektywne. Łatwiej wydłużać pocisk! Dlatego właśnie w wodzie broń strzelecka (pociski parocentymetrowe) jest zupełnie bezużyteczna. Warto też używać materiału o maksymalnej możliwej gęstości. Ostatnio takim modnym stał się zubożony uran. Jest produktem odpadowym przy produkcji wzbogaconego paliwa jądrowego, a gęstość ma około 20. Jako pocisk przeciwczołgowy nie wymaga ładunku wybuchowego. Przebija pancerz i tak się rozgrzewa, że płonie w środku. Straszna broń. Nasi drodzy sojusznicy w Iraku szeroko ją stosowali