Wykład 11

Poza ostatnim przykładem ruchu w polu magnetycznym, zajmowaliśmy się dotychczas ruchami jednowymiarowymi. Pora wyjść w trójwymiarową przestrzeń. Prawdę mówiąc, jednowymiarowy oscylator, dla którego równanie ruchu jest drugiego rzędu:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x\,,$$

poprzez chwyt z wprowadzeniem **pary** wielkości $\tilde{v}$ i x doprowadził nas do konieczności rozważania okręgu $\tilde{v}^2 + x^2 = \mathrm{const}$ i zbadania przemieszczania się po tym **abstrakcyjnym** okręgu w miarę upływu czasu *t*. Wprowadziliśmy też pomocniczy czas zredukowany $\tilde{t} = \omega t$.

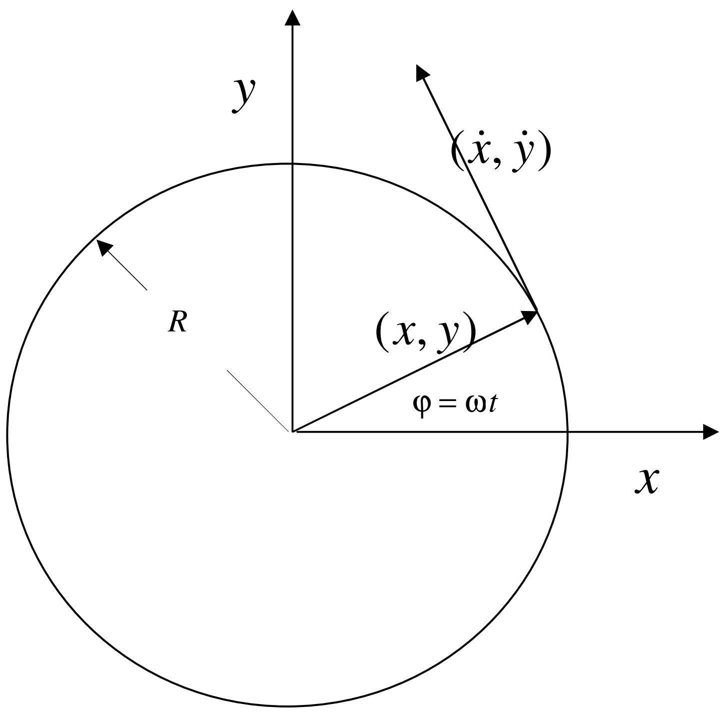
Poznaliśmy przy tym uroczą parę funkcyj spełniających równania:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \tilde{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -x$$

Gdy nałożyć warunek początkowy $\tilde{v}(0) = 1, \quad x(0) = 0$, funkcje te stają się tożsame ze znanymi funkcjami trygonometrycznymi $\tilde{v} = \cos\tilde{t}, \quad x = \sin\tilde{t}$.

Zbadajmy teraz **jednostajny** ruch punktu materialnego po **rzeczywistym** okręgu o promieniu *R* z okresem obiegu *T*. Słowo jednostajny odnosi się do szybkości. Jest ona stała, choć prędkość, jako wektor styczny do okręgu nieustannie zmienia swój kierunek.



Jednostajność ruchu punktu wzdłuż obwodu, którą założyliśmy, bez wskazania (**na razie**) przyczyny takiego ruchu, oznacza jednostajny przyrost kąta φ. By niepotrzebnie nie komplikować, przyjmuję początek liczenia czasu w momencie, gdy punkt właśnie znalazł się na osi *x*, od której też mierzę kąt φ. Współczynnik proporcjonalności miedzy kątem a czasem nazywa się tutaj – całkiem zasadnie – prędkością kątową. Jeśli przyjąć, że znam czas pełnego obiegu okręgu *T*, to oczywiście: $\omega = 2\pi / T$. Zwyczajna szybkość liniowa $v = 2\pi R / T = \omega R$. Z definicji funkcji trygonometrycznych, mamy natychmiast:

$$x = R\cos\omega t,$$
$$y = R\sin\omega t$$

W celu wyznaczenia prędkości można **albo** skorzystać ze znajomości pochodnych sinusa i cosinusa, **albo** przyjrzeć się uważnie rysunkowi i stwierdzić, że kąt, jaki wektor prędkości (o wartości $v = \omega R$) tworzy **z osią *y*,** jest tym samym kątem φ jaki wektor wodzący, o długości R, tworzy z osią *x*. Z owego geometrycznego argumentu dostajemy:

$$\dot{x} \equiv v_x = -\omega R\sin\omega t,$$
$$\dot{y} \equiv v_y = \omega R\cos\omega t$$

Gdybyśmy wcześniej nie wiedzieli, jakie są pochodne funkcji trygonometrycznych, to dowiedzielibyśmy się tego **w tym momencie**!

Repetitio est mater studiorum

Znak minus wynika stąd, że wektor prędkości odchylony jest w lewo dla kątów, dla których sinus jest dodatni.

Cenną rzeczą jest też wyznaczenie wektora **przyspieszenia** naszego punktu. W fizyce szkolnej, robi się w tym miejscu konstrukcję geometryczną polegającą na odejmowaniu dwóch wektorów prędkości dla dwóch bliskich chwil (a więc i położeń) i znajduje granicę stosunku zmiany wektora prędkości do odstępu czasu jako nowy wektor o określonej wartości i określonym kierunku.

Skoro my, już, (co najmniej) dwa razy nauczyliśmy się różniczkować sinusy i cosinusy, to skorzystajmy z tej umiejętności **obliczając** sobie kolejne pochodne:

$$\ddot{x} = \dot{v}_x \equiv a_x = -\omega^2 R\cos\omega t,$$
$$\ddot{y} = \dot{v}_y \equiv a_y = -\omega^2 R\sin\omega t,$$

Nastąpiła **kolejna** zamiana sinusa na cosinus i cosinusa na minus sinus, co doprowadziło to tego, iż druga pochodna każdej ze współrzędnych jest proporcjonalna do tej samej funkcji, co owa współrzędna, ale ponadto jest znak minus i dwie potęgi prędkości kątowej. Można temu ostatniemu wynikowi nadać postać wektorową. Wektory w przestrzeni trójwymiarowej (albo, jak akurat teraz, na płaszczyźnie) oznaczać będziemy strzałkami:

$\vec{r} \equiv (x, y)$,

$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} \equiv (\dot{x}, \dot{y})$,

$\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}} \equiv (\ddot{x}, \ddot{y})$

Przy tych oznaczeniach, uzyskany wynik dla przyspieszenia, jest:

$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$

Każdy widzi, że identyczny wynik by wyszedł, gdyby czas liczyć od innego momentu, czyli, gdyby we wszystkich funkcjach trygonometrycznych występowała dodatkowo faza początkowa.

Powyższy wynik oznacza, iż **rzut na średnicę** punktu obiegającego równomiernie okrąg o promieniu *R*, wykonuje ruch identyczny z ruchem **oscylatora harmonicznego** o amplitudzie *R* i takim samym okresie. Prędkość kątowa punktu na okręgu pokrywa się z częstością drgań.

Korzystając z własności funkcji trygonometrycznych, zależność **obu** współrzędnych od czasu można zapisać też z użyciem **tej samej** funkcji trygonometrycznej ale od przesunietego argumentu:

$x = R\cos\omega t$,

$y = R\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

Porównując oscylacje współrzędnej y z oscylacjami współrzędnej x powiemy, że są one **opóźnione w fazie o** $\pi/2$. Widzimy też, że **amplitudy** tych oscylacji są jednakowe (no i oczywiście jednakowe są też częstości). Składanie oscylacji jest czymś niesłychanie częstym w fizyce i o wielkim znaczeniu. Takie złożenie, jakie tu mamy, występuje, przykładowo, w fali świetlnej spolaryzowanej kołowo. Wielkości wykonujące zmiany zgodne z funkcjami trygonometrycznymi to – w tym przykładzie – wartości składowych pola elektrycznego w dwóch, wzajemnie prostopadłych kierunkach, w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku propagacji.

Sposobem uzyskania takiego światła może być rozszczepienie wiązki światła spolaryzowanego liniowo na dwie wiązki i przesunięcie fazy jednej z nich. Oto wydruk z Google'a:

Ćwierćfalówka, płytka 1/4 λ, płytka przezroczysta wytwarzająca różnicę długości optycznych równą 1/4 długości fali pomiędzy składowymi promienia świetlnego, o wzajemnie prostopadłych kierunkach polaryzacji i o określonym kierunku padania. Wykorzystywana do uzyskiwania polaryzacji kołowej światła oraz do analizy światła spolaryzowanego kołowo

Jeśli myśleć o zmianach nie pojedynczych współrzędnych, (czyli liczb), a o zmianach całych wektorów, to widzimy wyraźnie, że przyspieszenie, mające przeciwny znak, może być zapisane bez tego minusa, jeśli dodać fazę 180°

$$\ddot{x} = \omega^2 R \cos(\omega t + \pi),$$
$$\ddot{y} = \omega^2 R \sin(\omega t + \pi),$$

Nie trzeba wielkiej wyobraźni, by odgadnąć jak zapisać prędkość, by uwidoczniło się przesunięcie fazy oscylacji tej wielkości w stosunku do położenia

$$\dot{x} = \omega R \cos(\omega t + \pi/2),$$
$$\dot{y} = \omega R \sin(\omega t + \pi/2),$$

Jeszcze jedna technika pracy z oscylacjami i ruchami po okręgach warta jest pokazania w tym miejscu. Para współrzędnych x i y może być **zespolona**, tj połączona w jedno, z użyciem liczb zespolonych (*nomen omen*). Nazwijmy z następująca wielkość:

$$z = x + iy\,.$$

Wyraźmy to zespolone położenie, a także, analogiczną zespoloną prędkość i przyspieszenie przez czas:

$$z = R(\cos\omega t + i\sin\omega t) = Re^{i\omega t}$$
$$\dot{z} = \omega R(-\sin\omega t + i\cos\omega t) = i\omega R(\cos\omega t + i\sin\omega t) = i\omega Re^{i\omega t}$$
$$\ddot{z} = -\omega^2 R(\cos\omega t + i\sin\omega t) = (i\omega)^2 Re^{i\omega t}$$

W tym ujęciu, to liczba i, mająca fazę $\pi/2$, występująca w wykładniku, przy kolejnym różniczkowaniu, zwiększa fazę wektora pochodnego o kolejne $\pi/2$.

Jest jeszcze inny sposób potraktowania prędkości, „mający przyszłość”[1].

Prędkość jest prostopadła do położenia. Ma też taką własność, że gdy promień większy, to i prędkość w tej samej proporcji jest większa. Proporcjonalność ta uwidoczniona jest w zapisie zespolonym przez to, że zespolona prędkość jest **mnożona** przez $i\omega$.

Czy istnieje jakieś **inne mnożenie**, nie odwołujące się do liczb zespolonych? (Liczby zespolone są fantastyczne na płaszczyźnie, dla obrotów ogólniejszych, tylko to **inne mnożenie** będzie możliwe).

[1] Ruch jednostajny po okręgu jest na tyle prosty i poglądowy, że do jego opisu nie trzeba angażować tych wszystkich technik. Jednak w przypadkach bardziej złożonych będą one niezbędne, a intuicje wykształcone na prostych przykładach są bardzo pomocne w opanowaniu nowych pojęć i nowych technik rachunkowych niezbędnych dla uprawiania fizyki.

Owo inne mnożenie, to oczywiście, **mnożenie wektorowe**. Za chwilę zrozumiemy głębsze powody pojawiania się takiej właśnie operacji w naturalny sposób – w tej chwili skorzystajmy z definicji iloczynu wektorowego dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (w określonej kolejności), który jest wektorem[2] prostopadłym do płaszczyzny rozpiętej przez te wektory, jego wartość jest iloczynem wartości mnożonych wektorów i sinusa kąta miedzy nimi, a zwrot wyznaczony jest **regułą prawej ręki.**

Wybór tej, a nie innej ręki do określenia zwrotu iloczynu wektorowego, nie ma żadnego merytorycznego uzasadnienia, poza tradycją rzecz jasna, no i tym, że jeśli się chce korzystać z iloczynu wektorowego, jeden z dwóch zwrotów na kierunku prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **trzeba** wybrać. Nigdzie tego nie wyczytałem, ale podejrzewam, że wybór reguły związany jest z faktem, że astronomia i mechanika rozwijały się na półkuli północnej. Ziemia obraca się z Zachodu na Wschód. Gdyby wybrać regułę lewej ręki, wektor prędkości kątowej, którego iloczyn z wektorem położenia punktu na Ziemi dawałby wektor prędkości, celować by musiał w kierunku Krzyża Południa!

Jeśli zdefiniujemy prędkość kątową $\vec{\omega}$ tak, by miała wartość ω, kierunek prostopadły do okręgu, a zwrot „do góry", gdy obrót następuje przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (tak jak na rysunku), to możemy natychmiast napisać:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \text{ oraz}:$$
$$\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{v}$$

Naturalnym kandydatem do zrealizowania ruchu po okręgu jest **izotropowy oscylator harmoniczny**. Jeśli siła, jaka pojawia się przy oddalaniu punktu od położenia równowagi, **w dowolnym kierunku** $\vec{r}$ wynosi $-k\vec{r}$, to równanie ruchu **każdej współrzędnej** jest identyczne z równaniem oscylatora harmonicznego. Ruch po okręgu jest, więc jednym z możliwych ruchów oscylatora przestrzennego, ale nie każde rozwiązanie równań ruchu da ruch po okręgu!!! To oczywiste.

Ogólnym rozwiązaniem będzie:

$$x = x(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\dot{x}(0)\sin\omega t,$$
$$y = y(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\dot{y}(0)\sin\omega t$$

[2] Ściśle mówiąc, iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest **pseudowektorem.** Ujawnia się to przy wyciąganiu wniosków z symetrii problemu i/lub wtedy, gdy zmieniamy znaki (odbijamy) nieparzystej liczby współrzędnych. Wrócimy jeszcze do tego zagadnienia.

W zależności od warunków początkowych powyższy ruch może, ale nie musi być ruchem po okręgu. Łatwo znaleźć równanie trajektorii;

$$x = x(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\dot{x}(0)\sin\omega t \qquad /^*\, y(0) \quad \text{potem}: /^*\, \dot{y}(0)$$

$$y = y(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\dot{y}(0)\sin\omega t \qquad /^* -x(0) \quad \text{potem}: /^*\, \dot{x}(0)$$

$$y(0)\cdot x - x(0)\cdot y = \frac{1}{\omega}\left(y(0)\cdot \dot{x}(0) - x(0)\cdot \dot{y}(0)\right)\sin\omega t$$

$$\dot{y}(0)\cdot x - \dot{x}(0)\cdot y = \frac{-1}{\omega}\left(y(0)\cdot \dot{x}(0) - x(0)\cdot \dot{y}(0)\right)\cos\omega t$$

Podnosząc stronami do kwadratu i dodając, dostajemy:

$$\left(y(0)\cdot x - x(0)\cdot y\right)^2 + \left(\dot{y}(0)\cdot x - \dot{x}(0)\cdot y\right)^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(y(0)\cdot \dot{x}(0) - x(0)\cdot \dot{y}(0)\right)^2$$

Jest to równanie kwadratowe dla współrzędnych punktu orbity (x,y). Ponieważ współrzędne punktu wyrażają się przez sinusy i cosinusy (funkcje ograniczone), krzywa opisana tym równaniem pozostaje ograniczona. W ogólności jest to elipsa, o dwóch półosiach[3]. Centrum siły, czyli położenie równowagi, pokrywa się ze środkiem elipsy. Wynika to z faktu, że razem z punktem (x,y), do elipsy należy też punkt (-x,-y). W szczególności obie półosie mogą być równe – wtedy mamy właśnie okrąg, albo też jedna z półosi może degenerować się do zera. Ma to miejsce wtedy, gdy prawa strona staje się zerem. Wtedy jednocześnie:

$$y(0)\cdot x - x(0)\cdot y = 0$$

$$\dot{y}(0)\cdot x - \dot{x}(0)\cdot y = 0 \quad \text{czyli}:$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y(0)}{x(0)} = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)}$$

Jeśli więc położenia początkowe są w takich samych proporcjach jak prędkości początkowe, elipsa redukuje się do odcinka.

Z elipsą wiąże się jedno z nieprawdopodobnie ważnych zagadnień fizyki teoretycznej, diagonalizacja formy kwadratowej, czy też reprezentującej ją macierzy, uogólniająca się następnie do zagadnienia diagonalizacji operatorów, (czyli jakby macierzy o nieskończonej liczbie wierszy i kolumn). Dla elipsy wszystko jest proste i można problem rozwiązać bez wielkiej teorii.

Weźmy **jednorodną** formę kwadratową zawierającą, tak jak u nas, wyrazy x^2, y^2, xy z jakimiś współczynnikami: $ax^2 + by^2 + cxy$. Bylibyśmy zachwyceni, gdyby nie było tego wy-

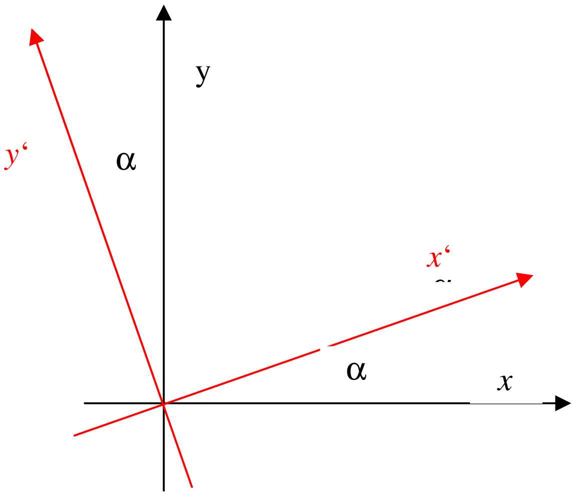
[3] Warto podkreślić, że centrum siły leży w środku tej elipsy; inna sytuację spotkamy dla orbit keplerowskich, gdzie centrum siły leży w jednym z dwóch ognisk elipsy.

razu mieszanego. Jak mamy szczęście, i warunki początkowe są takie, że zachodzi redukcja wyrazów mieszanych, czyli, że zachodzi: $y(0)\cdot x(0)+\dot{y}(0)\cdot \dot{x}(0)\cdot y=0$, to forma już jest **diagonalna**. Nazwa pochodzi od macierzowego zapisu.

$$ax^2+by^2+cxy=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wyraz c leży poza **przekątną** tablicy (diagonalą). Gdy c=0, macierz nazywa się diagonalną.

Jeśli „nie mamy szczęścia” i wyraz diagonalny wystąpił, to możemy szczęściu pomóc! Mianowicie, możemy, zamiast pierwotnych osi x,y wybrać osi obrócone o pewien kąt i dobrać tak jego wartość, by w nowych współrzędnych, już członu mieszanego nie było. Dla macierzy 2x2 jest to bardzo proste.



$$\begin{aligned}
x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\
y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \\
ax^2 &+ by^2 + cxy = \\
&= a(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + b(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + c(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)
\end{aligned}$$

Po uporządkowaniu dostajemy

$$\begin{aligned}
&\left(a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + c\cos\alpha\cdot\sin\alpha\right)x'^2 + \left(a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha - c\cos\alpha\cdot\sin\alpha\right)y'^2 + \\
&+\left(-2(a-b)\cos\alpha\cdot\sin\alpha + c(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right)x'\,y'
\end{aligned}$$

Wystarczy dobrać kąt α tak, by $\tan 2\alpha = c/(a-b)$. Przypadek $b = a$, nie jest specjalnie trudny. Kąt musi wynosić wtedy 45°.

Po wstawieniu właściwego kąta, dostaniemy równanie:

$$a'x'^2 + b'y'^2 = d$$

Gdy znaki wszystkie są takie jak wyrazu po prawej stronie (u nas dodatnie, czego nawet nie trzeba sprawdzać, równanie z przeciwnymi znakami pozwalało by oddalać się punktowi dowolnie daleko, a przecież wiemy, że krzywa jest ograniczona), równanie to jest równaniem elipsy, której osi pokrywają się z nowymi osiami współrzędnych, a długości półosi wynoszą, oczywiście $\sqrt{d/a'}$ oraz $\sqrt{d/b'}$ Gdyby je oznaczyć literami A i B, dostalibyśmy, tzw. kanoniczną postać równania elipsy:

$$\frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} = 1$$

W tej postaci widać, że nie tylko równoczesna zmiana znaku obu współrzędnych daje punkt **też** należący do elipsy. Również zmiana znaku samego *x*, bądź samego *y* przekształca punkt należący do elipsy w inny punkt należący do tej elipsy. Elipsa ma więc nie tylko środek symetrii, ale także dwie osie symetrii. Na marginesie, warto wspomnieć, że tzw. **inwersja**, czyli zmiana znaku wszystkich współrzędnych jest na płaszczyźnie równoważna obrotowi o 180°. Elipsa jest – poglądowo mówiąc – okręgiem równomiernie ściśniętym w jednym kierunku.

Wahadło matematyczne zawieszone w punkcie jest – dla małych wychyleń – świetną realizacją takiego dwuwymiarowego oscylatora. Może wykonywać oscylacje w jednej płaszczyźnie, może zataczać okrąg, może też zakreślać elipsę. Gdy amplituda nie jest mała, sprawy się niewątpliwie komplikują.

Siła oscylatora izotropowego $\vec{F} = -k\vec{r}$ nie jest jedyną możliwą realizacją siły **centralnej**. W ruchu jednostajnym po okręgu, niewątpliwie taka siła **musi** wystąpić i występuje. Nosi ona nazwę siły **dośrodkowej**.

Zrozumienie (czysto kinematyczne), iż jednostajny ruch po okręgu, tak charakterystyczny (przynajmniej w przybliżeniu) dla ciał niebieskich, charakteryzuje się skierowanym do środka przyspieszeniem, odegrało kluczową rolę w sformułowaniu praw ruchu Newtona. Podobnie, jak w zbadanym przed chwilą przypadku siły elastycznej, rosnącej liniowo z odległością, ruch po okręgu, to tylko jedna z możliwości. Jeśli warunki początkowe nie są dobrane w sposób szczególny, możliwy jest ruch ogólniejszy. Od czasów Keplera, było wiadomo, że orbitami planet są elipsy, (ale Słońce nie leży w środku tych elips. Miejscem dla centrum siły jest jedno z tzw. ognisk elipsy). Sukcesem Newtona było odgadnięcie prostej i eleganckiej formuły dla siły grawitacji, a następnie wykazanie, że równania ruchu z taką siłą, przewidują dokładnie takie ruchy, jakie się obserwuje. To znaczy ruchy zgodne z odkrytymi w drodze obserwacji trzema prawami Keplera. Powiemy o nich dokładnie, w miarę ich dowodzenia. Ze słyszenia, nie wątpię, wszyscy je znacie (•elipsy ze Słońcem w ognisku, •stała prędkość polowa, •proporcja kwadratu okresu i trzeciej potęgi dużej półosi).

Ruch po okręgu z prędkością kątową ω wymaga siły dośrodkowej równej $-m\omega^2\vec{r}$. Przydatna bywa postać (wartości) tej siły wyrażona przez prędkość liniową: $m\frac{v^2}{r}$. Często bywa tak, że ruch po okręgu nie został zaaranżowany tak, jak w przypadku np. satelity geostacjonarnego, gdzie znajomość działającej na każdej wysokości siły grawitacyjnej pozwala dobrać w taki sposób położenie i prędkość (w momencie zakończenia pracy rakiety wynoszącej satelitę na orbitę), by ruch, od tego momentu był ruchem jednostajnym po okręgu (z okresem doby gwiazdowej), czyli taki, jaki sobie zaplanowaliśmy.

Częste są sytuacje, gdy ruch po okręgu jest wymuszony sztywnością więzów. Przy danej prędkości i odległości od środka, (nieznaczne, często niezauważalne) odkształcenia lin, prętów, felg przy kołach samochodowych, czy czego tam jeszcze, ustawiają się tak, by pojawiła się potrzebna siła. Mechanizm jest podobny, co przy osiąganiu równowagi, po położeniu ciała na elastyczne (być może bardzo sztywne) podłoże. Gdyby siła podłoża nie wystarczała do zrównoważenia siły ciężkości, ruch tym spowodowany pogłębiłby odkształcenie i spowodował konieczny wzrost siły sprężystej, aż do ustalenia równowagi.... **albo** do katastrofy i zniszczenia, złamania owej podstawy

Mechanizm jest podobny, ale rozumować trzeba dosyć pokrętnie. No, bo, gdyby odkształcenie było za słabe, to trajektoria cząstki nie zakrzywiłaby się tyle, co trzeba i cząstka nieco oddaliłaby się od osi. Owo „oddalanie" najwyraźniej widać, gdy siła jeszcze się nie pojawiła, a prędkość już jest. Ruch jest wtedy po stycznej, a ta w oczywisty sposób oddala się od środka, naciągając linkę, która miała utrzymać nasze ciało w stałej odległości.

Żeby nie musieć czynić takich łamańców intelektualnych, ale także z wielu innych powodów, bywa **wygodne i celowe** użycie, do opisu i ruchu i swoistej równowagi przy badaniu reakcji więzów, **układów nieinercjalnych**.

Układy inercjalne potrzebne nam były do wyciagnięcia wszystkich możliwych wniosków z zasady względności, do poznania praw ruchu. Gdy już to wszystko wiemy, to możemy wprowadzić układy nieinercjalne i **przeliczyć,** bez inwestowania w nowe obserwacje, badania, odkrycia, poznane równania ruchu w układach inercjalnych, na nowe równania ruchu, czyli na nowe równania różniczkowe dla zmian w czasie położeń i prędkości określanych względem tego nieinercjalnego układu.

Żyjemy na Ziemi. Ta się obraca. Wraz z nią obracają się skały, kontynenty. Ruchy prądów oceanicznych, wiatrów interesują nas względem tego „złego" układu. Rozmaite siły lepkości zależą od tych stosunkowo niewielkich prędkości względnych. **Trzeba by być desperatem**, by próbować liczyć ruch prądu oceanicznego względem układu inercjalnego związanego ze Słońcem! Już sama prędkość początkowa przyprawiałaby o zawrót głowy.

Są dwa zasadnicze rodzaje nieinercjalności. Jeden związany z niejednostajnym ruchem postępowym ciała względem, którego uparliśmy się (i słusznie!) odnosić położenia innych ciał. Jedziemy pociągiem, a ten hamuje. Mało interesuje mnie ruch walizki względem budki dróżnika, ale chciałbym mieć pod kontrolą to, czy zsunie się ona z półki i spadnie mi na głowę czy nie!

Ta sytuacja jest bardzo prosta. (Przynajmniej w przybliżeniu nierelatywistycznym). Jeśli położenie względem pociągu wynosi *x'*, a położenie pociągu względem układu inercjalnego wynosi *X*, to położenie ciała względem układu inercjalnego jest zwykłą sumą: $x(t) = X(t) + x'(t)$ (o czasie na zegarach w pociągu zakładam, że pokazują to samo, co mijane zegary układu inercjalnego. Ograniczamy się do małych prędkości w porównaniu z *c*.) Różniczkując dwa razy mam:

$$\ddot{x}(t) = \ddot{X}(t) + \ddot{x}'(t)$$

Przyjmuję też, że znam **prawdziwą** siłę działającą na ciało. Oznaczam ją *F*. Równanie ruchu jest:

$$m\ddot{x}(t) = m\ddot{X}(t) + m\ddot{x}'(t) = F$$

Nic nie szkodzi przenieść członu z przyspieszeniem układu nieinercjalnego na prawą stronę i otrzymać:

$$m\ddot{x}'(t) = F - m\ddot{X}(t)$$

Przyjmując, że znam przyspieszenie układu nieinercjalnego, no i że znam prawdziwą siłę (pochodzącą od wymiany pędu z czymś realnym), mogę rozwiązywać powyższe równanie nie przejmując się już, że współrzędna *x'* jest odnoszona do układu nieinercjalnego. Dodatkowy człon w równaniu owo $-m\ddot{X}(t)$, czyni dokładnie to, co potrzeba by przyspieszenie względem układu inercjalnego było wyznaczone jedynie przez siłę prawdziwą.

W kontraście do siły prawdziwej, człon $-m\ddot{X}(t)$ dodający się do siły prawdziwej i z matematycznego punktu widzenia bez zarzutu, nosi nazwę **siły pozornej**, lub inaczej **siły bezwładności**. Mówi się też, że siły bezwładności nie podlegają III zasadzie Newtona. Nie da się wskazać ciała na które działałaby siła przeciwna. Lub jeszcze inaczej: siła bezwładności nie jest związana z przepływem pędu. Pozwala ona obliczać przyspieszenia ciała spowodowane nie czymś co działa na ciało, a spowodowane tym, że układ odniesienia jest przyspieszany.

Gdy zachodzą warunki unieruchomienia (czyli osiągnięcia równowagi przy niewielkim tylko przemieszczeniu) współrzędnej *x'*, czyli, przykładowo owej walizki na półce przytrzymywanej jakąś elastyczną siatką przed zsuwaniem się z półki, suma obu sił: i prawdziwej *F* (powiedzmy przyciąganie ziemskie, tarcie o półkę, elastyczna siatka, sztywność półki) i pozornej $-m\ddot{X}(t)$ musi być zrównoważona. Siła ta nabiera bardzo realnego charakteru!

Mój pokój i krzesło w nim, na którym siedzę, uczestniczą w obrocie Ziemi. Układem obracającym się zajmiemy się wprawdzie dopiero za chwilę, ale w pierwszym przybliżeniu mogę zaniedbać wirowanie (względem gwiazd) mojego fotela, a pomyśleć o tym, że uczestnicząc w obrocie Ziemi, posiada on przyspieszenie dośrodkowe skierowane do środka równoleżnika na którym leży Warszawa! Kierunek pod jakim wgniatany jestem w ten fotel (a w jakimś stopniu i sama wartość tego wgniatania), kierunek tego co nazywamy pionem, wartość g jest **wypadkową** siły grawitacji skierowanej do środka Ziemi[4] i siły będącej iloczynem mojej masy i **wziętej z minusem** siły dośrodkowej. W tym kontekście, siłą bezwładności nazywa się siłą **odśrodkową**. Siła odśrodkowa (w połączeniu z większą odległością od środka na równiku) powoduje znaczną różnicę między przyspieszeniem spadku swobodnego na biegunach i na równiku: 9,83m/s^2 na biegunie i 9,78m/s^2 na równiku.

A teraz czekają nas ciekawsze rzeczy:

Rozważmy obracającą się platformę. Narysujmy na niej dwa wersory: $\vec{e}_x$ i $\vec{e}_y$. Położenie określać będziemy współrzędnymi x i y. Nie piszemy „primów”, bo nie będziemy rozważali równocześnie współrzędnych inercjalnych, a takie stawianie znaczków jest męczące. Wektor wodzący naszego punktu:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$$

Wersory nasze obracają się jednostajnie, a prędkość ich zmian (jaką jest w stanie określić obserwator inercjalny) wynosi:

$$\dot{\vec{e}}_x = \vec{\omega}\times\vec{e}_x \text{ i } \dot{\vec{e}}_y = \vec{\omega}\times\vec{e}_y$$

Dlatego prędkość punktu względem układu inercjalnego

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= \dot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \dot{y}(t)\vec{e}_y(t) + x(t)\dot{\vec{e}}_x(t) + y(t)\dot{\vec{e}}_y(t)\\ &= \dot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \dot{y}(t)\vec{e}_y(t) + \vec{\omega}\times\left(x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y\right) =\\ &= \dot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \dot{y}(t)\vec{e}_y(t) + \vec{\omega}\times\vec{r}(t)\end{aligned}$$

Na przykład punkt nieruchomy względem układu obracającego się, to znaczy taki o stałych współrzędnych x i y ma prędkość:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{\omega}\times\vec{r}(t)$$

Podobnie liczymy przyspieszenie:

[4] Tak by było, gdyby Ziemia była sztywną kulą. W rzeczywistości, powierzchnia Ziemi, a w szczególności wody oceanów i płynne, czy półpłynne wnętrze Ziemi tak się ustawiają, by wypadkowa siły grawitacji i siły pozornej była do tej powierzchni prostopadła. To decyduje o spłaszczeniu Ziemii. Nie jest więc Ziemia kulą, a tzw. geoidą, kształtem bliską elipsoidzie obrotowej. Wypadkowy kierunek „czystej, niutonowskiej grawitacji” jest jakiś i nie pokrywa się dokładnie ze środkiem geoidy.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \dot{y}(t)\vec{e}_y(t) + \vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right) =$$
$$= \ddot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \ddot{y}(t)\vec{e}_y(t) + \dot{x}(t)\dot{\vec{e}}_x(t) + \dot{y}(t)\dot{\vec{e}}_y(t) + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}(t) =$$
$$= \ddot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \ddot{y}(t)\vec{e}_y(t) + \vec{\omega}\times(\dot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \dot{y}(t)\vec{e}_y(t)) + \vec{\omega}\times\left(\dot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \dot{y}(t)\vec{e}_y(t) + \vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right) =$$
$$= \ddot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \ddot{y}(t)\vec{e}_y(t) + 2\vec{\omega}\times\left(\dot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \dot{y}(t)\vec{e}_y(t)\right) + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right)$$

Pierwsze dwa wyrazy w końcowym wierszu można śmiało nazwać przyspieszeniem względem obracającego się układu. Obserwator mierzy położenia, dwa razy różniczkuje i nazywa to przyspieszeniem. On może nawet nie zdawać sobie sprawy, że te położenia odnosi do osi, do jakichś przedmiotów, które się obracają. A nawet jak wie, to niczego to nie zmieni! Jeśli będzie chciał zapewnić równowagę (czyli spoczynek) względem tego układu (np. nie wypaść samemu, ani nie upuścić portmonetki z rąk w czasie jazdy na karuzeli), to musi zapewnić stałość x i y, a więc w szczególności znikanie przyspieszenia $\ddot{x}$ czy $\ddot{y}$. Oznaczmy je zwyczajnie:

$$\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \ddot{y}(t)\vec{e}_y(t).$$

Dwa następne człony zawierają iloczyn wektorowy prędkości kątowej i prędkości względem obracającego się układu. Oznaczmy tę prędkość zwyczajnie:

$$\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \dot{y}(t)\vec{e}_y(t)$$

Wreszcie wyraz ostatni jest wektorem skierowanym do osi o wartości $-\omega^2\vec{r}$. Wynika to wprost z definicji iloczynu wektorowego, ale można też zauważyć, że gdy punkt jest sztywno związany z tarczą (x i y stałe), ostatni człon jest jedynym, jaki zostaje. Ale przecież w tym wypadku punkt porusza się po okręgu i jego przyspieszeniem jest dobrze nam znane przyspieszenie dośrodkowe.

Uff, trochę się napracowaliśmy.

Napiszmy teraz równanie Newtona dodając jakąś siłę rzeczywistą $\vec{F}$

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} =$$
$$= m\ddot{x}(t)\vec{e}_x(t) + m\ddot{y}(t)\vec{e}_y(t) + 2m\vec{\omega}\times\left(\dot{x}(t)\vec{e}_x(t) + \dot{y}(t)\vec{e}_y(t)\right) + m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right)$$
$$= m\vec{a} + 2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\omega^2\vec{r}$$

Gdyby punkt dodatkowo poruszał się w kierunku z, wzór powyższy z postacią siły $m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right)$ nadal obowiązuje. Postać z wyeliminowanym podwójnym iloczynem wektorowym powinna zawierać jedynie składową wektora wodzącego prostopadłą do ω: $m\omega^2\vec{r}_\perp$.

Nikt nam nie broni rozmieścić wyrazów tak jak nam wygodnie:

$$m\vec{a} = \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} + m\omega^2\vec{r}$$

Mamy teraz dwie nowe siły bezwładności: skierowaną na zewnątrz siłę o wartości znanej nam siły odśrodkowej. By utrzymać ciało nieruchomo na płycie my teraz musimy tę siłę, **odśrodkową** zwyczajnie skompensować rzeczywistą siłą (np. sprężystą) reprezentowaną przez $\vec{F}$, która często sama potrafi się dopasować. Teraz ta siła **reakcji** jest – z punktu widzenia obserwatora inercjalnego – prawdziwą siłą dośrodkową!.

Ale nasze równanie jest znacznie ogólniejsze. Z powodzeniem opisać może nie tylko warunki ustalania się równowagi, ale i ruch względem układu nieinercjalnego. Jeśli pomyślimy jeszcze raz o Ziemi, to widzimy, że dla ciał obracających się wraz z nią, siła odśrodkowa jest taka sama, jaką by była siła bezwładności w ruchu translacyjnym z przyspieszeniem identycznym z przyspieszeniem dośrodkowym.

Zaskakująco nowy jest człon z siła bezwładności zależną od prędkości. To słynna siła Coriolisa. Ma decydujące znaczenie dla wielkoskalowych ruchów w oceanach i w atmosferze. Odchyla tory pocisków, podmywa niesymetrycznie brzegi rzek, niszczy nierównomiernie szyny kolejowe.