

Wykład 14

Dygresja o prawie Ampère'a

W trakcie poprzedniego wykładu, dowodząc, że każde pole **centralnosymetryczne** jest potencjalne, wspomniałem o „przygodzie” Ampera z polem centralnym, ale nie centralnosymetrycznym. Warto spojrzeć bliżej na te siły, bo jest to chyba jedyny fizyczny przykład sił rzeczywiście zależnych od położenia, a niepotencjalnych.

$$d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{r} \times \sum \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{(d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Powyższy wzór znacie przypuszczalnie ze szkoły. Jeśli najpierw pododawać wkłady od obwodu numer 2, dostanie się pole indukcji $\vec{B}$ (prawo Biota Savarta) wytworzone przez ten obwód. A dalsze mnożenie wektorowe daje **siłę elektrodynamiczną** działającą na element $d\vec{r}$ obwodu z prądem I_1 .

Ponieważ prąd stały **musi** płynąć w obwodzie zamkniętym, suma po elementach „tego drugiego” obwodu **musi** zawsze wystąpić, czy tego chcemy, czy nie. Ponieważ sumowanie po konturze zamkniętym może dawać (dla pewnych pól wektorowych) **automatycznie**, tj. dla **każdego** dającego się pomyśleć konturu, wartość **zero**, przeto obok powyższego wzoru istnieje nieskończenie wiele innych wyrażień **równoważnych**, dających te same przewidywania dla siły mierzalnej, czyli dla siły na fragment jednego obwodu od **całego** innego obwodu.

Pominięcie w powyższym wzorze znaku sumy i upieranie się, iż wyrażenie:

$$d\vec{F}_{1/2} = I_1 d\vec{r} \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{(d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^2} (d\vec{r}' (\vec{n} \cdot d\vec{r}) - \vec{n} (d\vec{r}' \cdot d\vec{r}))$$

reprezentuje siłę, z jaką element $d\vec{r}'$ z prądem I_2 działa na element $d\vec{r}$ z prądem I_1 byłoby nieracjonalne, ale w czasach Ampère'a, natura prądu była autentycznie nieznana, i ten przymus myślenia w kategoriach zamkniętych obwodów nie występował. Czymkolwiek jest prąd, Ampère i inni myśleli o siłach między **elementami** prądów bardzo dosłownie.

Powyższe wyrażenie Biota, może być przekształcone do innej postaci, a mianowicie:

$$\frac{d\vec{r}' (\vec{n} \cdot d\vec{r}) - \vec{n} (d\vec{r}' \cdot d\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = -2 \frac{\vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \left(d\vec{r}_\perp \cdot d\vec{r}'_\perp - \frac{1}{2} (\vec{n} \cdot d\vec{r}) \cdot (\vec{n} \cdot d\vec{r}') \right) + \\ - d_{\vec{r}'} \left((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

Wersor $\vec{n}$, to oczywiście $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$.

Ostatni człon jest przyrostem na początku i końcu elementu $d\vec{r}'$ wyrażenia w nawiasie i przy całkowaniu względem drugiego konturu, daje w sumie zero.

Znane nam i używane **dzisiaj** jako najwygodniejsze wyrażenie Biota i Savarta jest równoważne całkowicie odkrytej przez Ampère'a postaci z siłą **centralną**, czyli temu, co w pierwszym wierszu.

Ampère siłę **wymyślił**, bo uważał **za oczywiste**, iż powinna być ona jak w prawie Newtona i prawie Coulomba (swego nauczyciela i mistrza), **centralna** i odwrotnie proporcjonalna do **kwadratu** odległości, z iloczynem „intensywności” czynnika sprawczego. Jedyna istotna różnica, to fakt, że teraz owe wielkości oddziałujące, czyli elementy prądu, są wektorami. Kierując się dostrzeganą symetrią¹, wymyślił najpierw człon pierwszy:

$$(n \times d\vec{r}) \cdot (n \times d\vec{r}') = d\vec{r}_\perp \cdot d\vec{r}'_\perp,$$

który jest iloczynem skalarnym rzutów elementów prądu na płaszczyznę prostopadłą do linii łączącej owe elementy, a dopiero po jakimś czasie, został zmuszony dodać ten drugi. Niechęć do wzoru Biota, oprócz tego, iż Ampère i Biot byli politycznym wrogami (a czasy Restauracji, to czasy wściekłych rozliczeń rewolucjonistów z monarchistami), płynęła z tego, iż jego własny wzór spełniał „zasadę akcji i reakcji”, gdy tymczasem wzór Biota nie.

Nawiasem mówiąc, jego wzór, tak jak on go pisał, miał postać:

$$d^2\vec{F}_1 = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} I_1 d\vec{l}_1 \cdot I_2 d\vec{l}_2 \left(\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \frac{1}{2} \cos\alpha \cos\beta \right)$$

gdzie kąty α i β to kąty między elementami prądu, a łączącą je linią, zaś γ to kąt między płaszczyznami utworzonymi przez wektor wodzący odpowiednio z wektorami $d\vec{r}$ i $d\vec{r}'$.

¹ Widząc, w odkryciu Oersteda, siłę między tajemniczym magnesem, a dużo prostszym obiektem, jakim jest prąd, uznał on, iż wyjaśnieniem istoty magnetyzmu, jest obecność w magnesie prądów, bez potrzeby wprowadzania „mas magnetycznych”. Zbudował zresztą zwojnicę, dostrzegając, że daje ona efekty identyczne jak sztabka magnetyczna. Magnes, czy solenoid z prądami płynącymi w płaszczyznach prostopadłych do osi, oddziałuje z prądem w przewodzie równoległym do osi magnesu czy solenoidu. I to najsilniej! Na pewno, więc, iloczyn skalarny samych elementów, znikający przecież w tej konfiguracji, nie mógł być właściwy. Ale już składowe prostopadłe do linii łączącej elementy przewodników, mnożone skalarnie wydały mu się odpowiednie. Dla wielu konfiguracji, ten później dodany człon nie daje wkładu, ale budując różne obwody, wreszcie Ampère natrafił na taką sytuację, gdzie według jego wstępnego wzoru nie powinno być siły, a była. To go zmusiło do dodania drugiego członu, na początek z nieustaloną wartością współczynnika. Każdy inny od $-1/2$, prowadzi jednak, przy odpowiednim kształcie konturu, do pojawienia się siły, która jest równoległa do elementu, na który działa, w sprzeczności z doświadczeniem. Jak wiemy dzisiaj z całą pewnością, siła elektrodynamiczna **jest prostopadła** do elementu prądu i Ampère w końcu (po dwóch latach zmagania) udowodnił, że po wybraniu $-1/2$ dla drugiego członu, siła całkowita jest **rzeczywiście prostopadła** do elementu na który działa. W świetle naszej tożsamości, to oczywiste.

Oryginalny wzór Ampère'a nie zawierał 2, ani, tym bardziej $\frac{\mu_0}{4\pi}$ gdyż właśnie poprzez wzór na siłę, Ampère dostrzegł możliwość ilościowego określania „intensywności”, czy jak kto woli, natężenia prądu, i zdefiniował jednostkę tegoż natężenia jako taką, by we wzorze, oprócz niezbędnych wielkości geometrycznych i owych natężeń, nie było już żadnego współczynnika. To zupełnie tak, jak nieco wcześniej, jego mistrz Coulomb, zdefiniował równocześnie i ładunek i jego jednostkę pisząc: $F = Q_1 Q_2 / r^2$. Jednostka zdefiniowana wzorem Ampère'a, to według dzisiejszych miar $10\sqrt{2}A$

Przez co najmniej kilka dziesięcioleci po Amperze, ludziom się myliły dwójki² pojawiające się lub znikające, w zależności od przyjęcia prawa oddziaływania w wersji siły centralnej Ampère'a, albo w wersji Biota. Były, *de facto*, dwie różne jednostki natężenia prądu: **elektrodynamiczna i elektromagnetyczna** różniące się o pierwiastek z dwóch. Dodatkowo, gdy we wzorze na **elementy** prądu nie ma żadnego współczynnika, to we wzorze na siłę od **całego** przewodnika **prostoliniowego** i tak pojawia się dodatkowa dwójka z całkowania (owe 2 w tym $2 \cdot 10^{-7} N$ w definicji ampera w SI). Do tego wszystkiego, były jeszcze dwie koncepcje prądu: albo płynął jeden rodzaj ładunku, albo równocześnie dwa w przeciwnych kierunkach (przecież jeszcze nic nie wiadano o elektronach!). Podejmowano próby przetłumaczenia wzoru na siłę między elementami prądu, na siłę między ładunkami, w zależności od ich prędkości. Ponieważ musiała to być poprawka do siły Coulomba, musiała pojawiać się w takich modelach, stała o wymiarze prędkości, pozwalająca tworzyć wyrażenia takie jak np. $\frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r} (1 - \frac{\vec{v}_{1\perp}}{c} \cdot \frac{\vec{v}_{2\perp}}{c})$, czy cos podobnego. Siła centralna w postaci Ampère'a, skłaniała do takiego myślenia. Występująca w podobnych wyrażeniach stała c ma też interpretację stosunku elektrodynamicznej do elektrostatycznej jednostki natężenia prądu.

Gdy więc Weber i Kohlrausch, w latach 1848-1851 wyznaczyli stosunek jednostki elektrodynamicznej natężenia prądu do jednostki elektrostatycznej, z żalem stwierdzili, że wyszło coś podobnego do prędkości światła, co **by sugerowało** związek światła z elektromagnetyzmem, ale o tajemnicze 40% więcej. Dopiero Maxwell, po paru latach, uporządkował ten chaos i ustalił związek prędkości światła z wielkością siły między przewodami z prądem.

² Wzór Biota zawiera dwa człony: $d\vec{r}'(\vec{n} \cdot d\vec{r}) - \vec{n}(d\vec{r}' \cdot d\vec{r})$, zaś wzór Ampera człony:

$$-2\vec{n}(d\vec{r}'_{\perp} \cdot d\vec{r}_{\perp}) + \vec{n}(d\vec{r}'_{\parallel} \cdot d\vec{r}_{\parallel}) = -2\vec{n}(d\vec{r}' \cdot d\vec{r} - d\vec{r}'_{\parallel} \cdot d\vec{r}_{\parallel}) + \vec{n}(d\vec{r}'_{\parallel} \cdot d\vec{r}_{\parallel}) = -2\vec{n}(d\vec{r}' \cdot d\vec{r}) + 3\vec{n}(d\vec{r}'_{\parallel} \cdot d\vec{r}_{\parallel})$$

zupełnie niepodobne. Z różniczkowania członu (nieistotnego dla sumy po obwodzie) powstają trzy wyrazy: jeden **produkuje** człon $d\vec{r}'(\vec{n} \cdot d\vec{r})$, taki jak u Biota, drugi zmienia -2 w -1 (jak u Biota), inny wreszcie, z różniczkowania **trzeciej** potęgi odległości w mianowniku, **zabija** człon z współczynnikiem 3, u Biota nieobecny.

Ruch w dowolnym polu centralnym

Rozkładaliśmy już wektor prędkości na składową radialną i transwersalną:

$$\vec{v} = \vec{n}\dot{r} + r\dot{\vec{n}}$$

Wektor $\dot{\vec{n}}$, to prędkość chwilowa końca wektora jednostkowego zmieniającego swój kąt z osią x-ów. Jego wartość to szybkość zmian tego kąta $\dot{\phi}$. Kwadrat prędkości, na mocy twierdzenia Pitagorasa, to:

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

Oznacza to, iż

$$T = m\vec{v}^2 / 2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$$

Moment pędu już liczyliśmy, wkład do niego daje tylko składowa transwersalna:

$$mr^2\dot{\phi} = J$$

Równaniem wyrażającym prawo zachowania energii jest

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = E$$

Powyższe dwa związki stanowią zgrabny układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu na dwie niewiadome funkcje czasu $r(t)$ i $\phi(t)$.

Łatwo jest uzyskać z nich jedno równanie na jedną niewiadomą:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \frac{J^2}{m^2 r^4}) + U(r) = E, \text{ lub inaczej:}$$

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + U(r) = E$$

Równanie to można rozwiązać względem $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r) - \frac{J^2}{2mr^2})}$, a następnie

wziąć odwrotność obu stron i szukać funkcji pierwotnej odwrotności powyższego pierwiastka.

W rzeczywistości rzadko kiedy taka zależność jest przydatna. Znacznie ważniejsze jest wyznaczenie kształtu toru. Samo zaś równanie „radialne” wystarczy zbadać jakościowo, gdyż ujawnia ono istotną cechę ruchów w polu centralnosymetrycznym i ich klasyfikację.

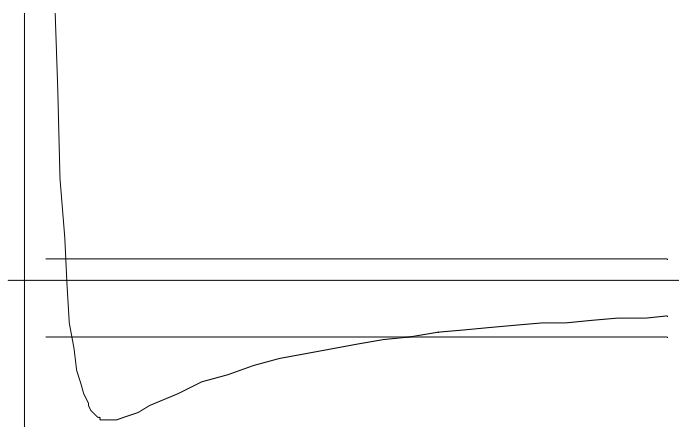
Jasne jest, że na ogół, przy ustalonych wartościach E i J , wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne tylko dla pewnych zakresów r . Tylko te wartości mogą być przyjmowane przez promień r w trakcie całego ruchu.

Wygodnie jest, dla konkretnego potencjału, wykreślić (naskicować) wykres funkcji

$$U(r) + \frac{J^2}{2mr^2}, \text{ zwanej niekiedy potencjałem efektywnym } U_{\text{eff}}(r). \text{ Dla cząstki poru-}$$

szającej się po prostej, z takim jak powyższy potencjałem rzeczywistym, zmiany współrzędnej w czasie, byłyby identyczne ze zmianami współrzędnej r , ciała w polu centralnosymetrycznym, które **oczywiście** dodatkowo krąży. Krążenie to jest monotonicznym wzrostem, (gdy $J>0$), kąta azymutalnego.

Typowy wykres $U_{\text{eff}}(r)$, w szczególności dla pola niutonskiego przyciągającego, jest następujący.

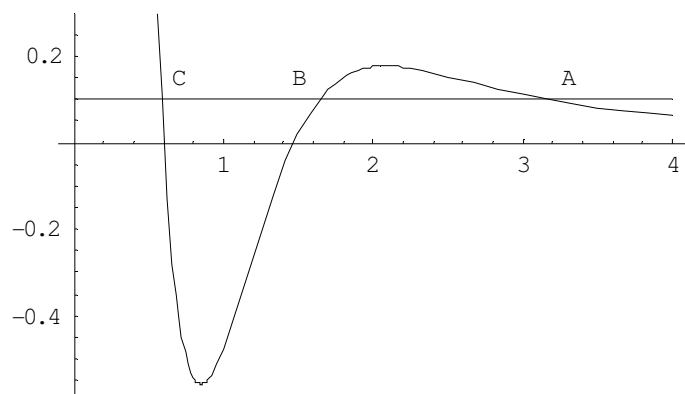


W pobliżu zera, przewagę przejmuje człon „centryfugalny” $\frac{J^2}{2mr^2}$, w dużych odległościach decyduje człon przyciągający $-\frac{\kappa}{r}$. Linie poziome odpowiadają dwóm wartościom energii: wyższa dodatniej, niższa ujemnej. Dostępny dla ruchu cząstki jest obszar, w którym potencjał efektywny jest **mniejszy** od wartości energii. (Zostaje „coś” na radialny wkład do energii kinetycznej).

Przy energii wyższej (w powyższym przykładzie dla każdej dodatniej), przeznaczeniem cząstki jest oddalić się do nieskończoności. Jeśli już porusza się od centrum, to będzie tak stale, bo znak $\dot{r} > 0$ nie ma jak się zmienić. Jeśli początkowo $\dot{r} < 0$, cząstka zbliża się do centrum – być może z nieskończoności – prędkość radialna maleje, bo coraz mniejsza jest różnica między E a potencjałem efektywnym. Wreszcie, w punkcie przecięcia wykresów (tzw. punkt zwrotny) $\dot{r}$ staje się zerem, a sama zmienna r osiąga **minimum**. Od tego miejsca pochodna zmienia znak (należy ją brać z plusem we wzorze $\dot{r} = \pm\sqrt{\dots}$) i cząstka zaczyna ucieczkę do nieskończoności.

Szalenie ważne jest wyznaczenie „**kąta rozproszenia**” jaki tworzą ze sobą asymptoty: ta pierwsza po której cząstka najpierw zaczynała ruch z bardzo dużej odległości ku centrum, i ta druga, po której cząstka się ostatecznie oddala.

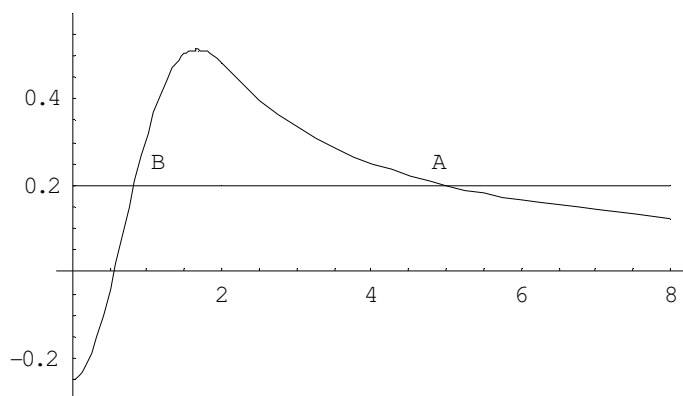
Typowy wykres potencjału efektywnego w fizyce jądrowej z siłami krótkozasięgowymi może wyglądać jak poniżej. Jest to wykres funkcji $1/r^2 - 4e^{-r^2}$. Taki mniej więcej potencjał trzyma uwięzione w jądrze neutrony.



Tworzy się kształt zwany „barierą potencjału”. Dla energii poniżej lokalnego maksimum potencjału, czyli w wierzchołku bariery, istnieją **dwa** obszary dozwolone. Gdy cząstka ma energię z tego właśnie przedziału, to, jeśli warunki początkowe lokują ją w jednym z tych obszarów, w tym przedziale pozostanie. Jeśli więc zbliża się z nieskończoności, zbliży się na odległość punktu A, zawróci i zacznie się oddalać do nieskończoności.

Jeśli na skutek warunków początkowych znajdzie się pomiędzy B i C, będzie bez końca, periodycznie odwiedzać swoje „perihelium” i „aphelium”.

Bariera potencjału może się też utworzyć dla cząstki α o zerowym momencie pędu, jeśli obok przyciągającego, krótkozasięgowego potencjału sił jądrowych, uwzględniać elektrostatische **odpychanie** cząstki i reszty jądra. Tu z kolei przedstawiam wykres funkcji $1/r - e^{-r^2}$ dla $r > 2$ i $3/4 - r^2/16 - e^{-r^2}$ (potencjał elektrostacyjny jest teraz wytwarzany przez kulę o skończonym promieniu).

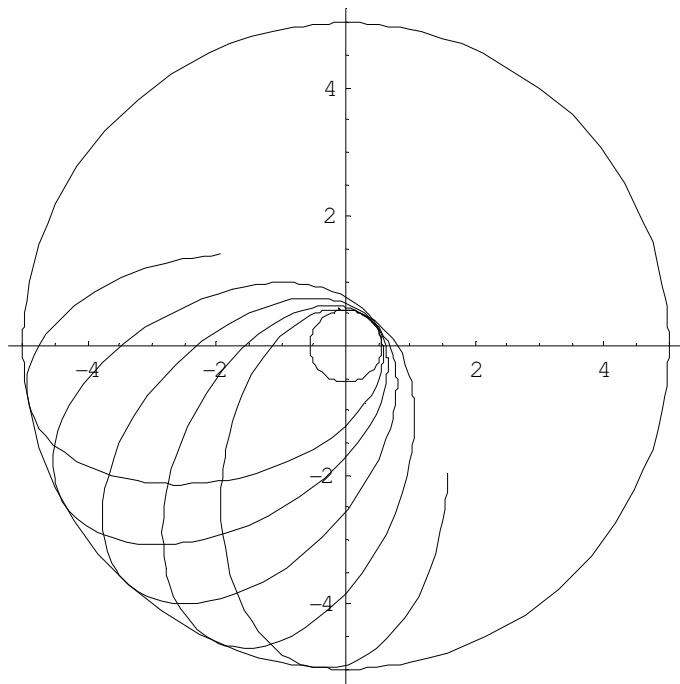


Teraz, cząstka może swobodnie przelatywać przez środek i odbijać się po przeciwnej stronie. Nadal, więc, dla wartości poniżej najwyższego punktu wału, istnieją **dwa dozwolone** obszary. Jeden to obszar na prawo od punktu zwrotnego A, drugi to obszar wnętrza kuli o promieniu B.

Taka jest przepowiednia mechaniki klasycznej.

W rzeczywistości badając energię cząstek α z rozpadu jąder atomowych stwierdzono, jako regułę, że ich energia nie wystarcza, by rzucając takie cząstki na jądra końcowe, jakie powstają w rezultacie badanego rozpadu, wtłoczyć je do środka. Odbijały się one na odległościach dużo większych od rozmiarów jądra, którego powierzchnia lokuje się w okolicach punktu B. To słynny efekt tunelowy, wskazujący na ograniczenia mechaniki klasycznej. Jeśli dopuścić **bardzo małe** prawdopodobieństwo przejścia cząstki (jako silnie tłumionej fali w obszarze klasycznie niedostępnym), to pozorna asymetria zachowań przy wychodzeniu z jądra i przy próbach jego penetracji, staje się zrozumiała. Cząstka α przebywając w jądrze atakuje punkt B biliony bilionów razy na sekundę, więc wreszcie jej się uda. Dodatkowo jąder w badanej próbce są biliony bilionów, więc w każdej sekundzie udawać się to może setkom, czy nawet milionom. Rzucając cząstkę na jądro, dajemy jej szansę **tylko raz**. A i cząstek w wiązce, jakimi dysponujemy, są może miliony, ale nie biliony bilionów!

Obraz ruchu jaki powstaje w przypadku stanu związanego jest taki, że cząstka cyklicznie zmienia odległość od $r_{\min}$ do $r_{\max}$ i (w ciągu tego samego czasu) od $r_{\max}$ do $r_{\min}$, zmiatając zarazem swym wektorem wodzącym **jednostajnie** powierzchnię na płaszczyźnie orbity.



Interesuje nas wyznaczenie toru, w tym takich pięknych rozet jak powyższa.

W tym celu zauważamy, że przyrosty:

$$dr = \dot{r} dt$$

$$d\phi = \dot{\phi} dt$$

można podzielić przez siebie uzyskując pochodną promienia r po kącie azymutalnym:

$$\frac{dr}{d\phi} \equiv r' = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}, \text{ czyli:}$$

$$\dot{r} = r' \dot{\phi}$$

Wstawiamy to do równania wyrażającego prawo zachowania energii:

$$\frac{m}{2}(r'^2 \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = E$$

$$\frac{m}{2}(r'^2 + r^2) \dot{\phi}^2 + U(r) = E$$

I eliminujemy prędkość kątową za pomocą prawa zachowania momentu pędu:

$$mr^2 \dot{\phi} = J$$

$$\dot{\phi} = \frac{J}{mr^2}$$

Wstawiając, dostajemy:

$$(r'^2 + r^2) \frac{J^2}{2mr^4} + U(r) = E$$

Dla potencjału pola sił odwrotnych kwadratów:

$$(r'^2 + r^2) \frac{J^2}{2mr^4} - \frac{\kappa}{r} = E$$

lub

$$\frac{(r'^2 + r^2)}{r^4} = (E + \frac{\kappa}{r}) \frac{2m}{J^2}$$

Występowanie licznych odwrotności promienia sugeruje, by zamiast wyznaczać zależność r od kąta, zająć się zależnością jego odwrotności:

$$w(\varphi) = 1/r(\varphi)$$

$$w'(\varphi) = -r'(\varphi)/r^2(\varphi)$$

Dostajemy równanie:

$$(w'^2 + w^2) = (E + \kappa w) \frac{2m}{J^2}$$

To już zaczyna wyglądać ładnie.

Ponieważ nie jesteście zbyt biegli w całkowaniu, zamiast więc rozdzielać zmienne pokażę wam sztuczkę, jaka tu pomaga. Różniczkujemy równanie stronami po φ i dzielimy przez w' .

$$(w'' + w) = \kappa \frac{m}{J^2}$$

Jak królika z kapelusza wyciągamy znów oscylator harmoniczny.

Rozwiązanie szczególne $w = \kappa m / J^2$

A ogólne

$$\frac{1}{r} = w = \frac{\kappa m}{J^2} + A \cos \varphi$$

Różniczkując zgubiliśmy wartość energii (ale za to dostaliśmy równanie liniowe), pojawiła się nowa stała A . Wstawiając powyższe rozwiązanie do wyjściowego równania pierwszego rzędu, łatwo wyznaczyć energię.

$$\frac{J^2}{2m} (A^2 \sin^2 \varphi + A^2 \cos^2 \varphi + 2A \frac{\kappa m}{J^2} \cos \varphi + \frac{\kappa^2 m^2}{J^4}) = \kappa \left(\frac{\kappa m}{J^2} + A \cos \varphi \right) + E$$

$$\frac{J^2}{2m} \left(A^2 + \frac{\kappa^2 m^2}{J^4} \right) = \frac{\kappa^2 m}{J^2} + E$$

$$\frac{J^2}{2m} A^2 = \frac{\kappa^2 m}{2J^2} + E$$

$$A^2 = \frac{\kappa^2 m^2}{J^4} + \frac{2mE}{J^2}$$

$$A = \frac{\kappa m}{J^2} \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\kappa^2 m}}$$

$$w = \frac{\kappa m}{J^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\kappa^2 m}} \cos \varphi \right)$$

Zbadajmy teraz ciekawszy przypadek relatywistycznego elektronu.

Rachunki nie są – o paradoksie – dużo trudniejsze niż dla przypadku rozpatrzonego przed chwilą.

$$v^2 = (r'^2 + r^2) \dot{\phi}^2$$

$$\frac{m^2 r^4 \dot{\phi}^2}{1 - \frac{(r'^2 + r^2) \dot{\phi}^2}{c^2}} = J^2$$

$$\frac{m^2 c^4}{1 - \frac{(r'^2 + r^2) \dot{\phi}^2}{c^2}} = \left(\tilde{E} + \frac{\kappa}{r} \right)^2$$

Dzieląc stronami dostajemy:

$$\frac{c^4}{r^4 \dot{\phi}^2} = \left(\tilde{E} + \frac{\kappa}{r} \right)^2 / J^2 \quad (*)$$

Biorąc odwrotność równania z momentem pędu:

$$\frac{1 - \frac{(r'^2 + r^2) \dot{\phi}^2}{c^2}}{m^2 r^4 \dot{\phi}^2} = \frac{1}{J^2} = \frac{1}{m^2 r^4 \dot{\phi}^2} - \frac{(r'^2 + r^2)}{m^2 c^2 r^4}$$

$$\frac{c^4}{r^4 \dot{\phi}^2} = \frac{m^2 c^4}{J^2} + \frac{(r'^2 + r^2) c^2}{r^4}$$

wyliczyliśmy odwrotność $\dot{\phi}^2$, które mogę wstawić do równania z energią (*):

$$\frac{m^2 c^4}{J^2} + \frac{(r'^2 + r^2) c^2}{r^4} = \left(\tilde{E} + \frac{\kappa}{r} \right)^2 / J^2$$

Przenosząc stały wyraz na prawą stronę i dzieląc przez c^2 dostaję:

$$\frac{(r'^2 + r^2)}{r^4} = \frac{(\tilde{E} - mc^2 + \frac{\kappa}{r})(\frac{\tilde{E} + mc^2}{c^2} + \frac{\kappa}{rc^2})}{J^2}$$

Energia relatywistyczna liczona jest razem ze spoczynkową. Mierząc energię od tego samego poziomu co w teorii nierelatywistycznej, muszę położyć

$$\tilde{E} = mc^2 + E$$

$$\frac{(r'^2 + r^2)}{r^4} = (E + \frac{\kappa}{r}) \frac{2m}{J^2} (1 + \frac{E}{2mc^2} + \frac{\kappa}{2mc^2} \frac{1}{r})$$

Porównując z równaniem nierelatywistycznym

$$\frac{(r'^2 + r^2)}{r^4} = (E + \frac{\kappa}{r}) \frac{2m}{J^2}$$

widzimy dodatkowy czynnik.

Z matematycznego punktu widzenia, po stronie prawej doszedł człon odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości. Ale taki człon **i tak występuje** w równaniu nierelatywistycznym. Zmiany w ostatecznym równaniu będą stosunkowo drobne:

To samo podstawienie $w = 1/r$ prowadzi do:

$$w'' + w = \kappa \frac{m}{J^2} (1 + \frac{E}{2mc^2}) + (E + \kappa w) \frac{1}{J^2} \frac{\kappa}{c^2}$$

$$w'' + w(1 - \frac{1}{J^2} \frac{\kappa^2}{c^2}) = \kappa \frac{m}{J^2} (1 + \frac{3E}{2mc^2})$$

Zmiana ostatecznego równania przez teorię względności jest zdumiewająco niewielka! Nadal jest równanie oscylatora harmonicznego!!!

Najważniejsza zmiana polega na tym, że teraz „częstość”, czyli współczynnik stojący przy w różni się od jedynki.

Rozwiązaniem jest:

$$w = 1/r = \frac{\kappa \frac{m}{J^2} (1 + \frac{3E}{2mc^2})}{(1 - \frac{1}{J^2} \frac{\kappa^2}{c^2})} + A \cos \left(\sqrt{(1 - \frac{1}{J^2} \frac{\kappa^2}{c^2})} \varphi \right)$$

Gdy kąt φ osiągnie wartość 360° , argument cosinusa jeszcze nie osiągnie kąta pełnego. Perihelium zostanie osiągnięte dla kąta $2\pi + \delta$ takiego, że:

$$\sqrt{(1 - \frac{1}{J^2} \frac{\kappa^2}{c^2})} (2\pi + \delta) = 2\pi, \text{ czyli:}$$

$$\delta = \frac{2\pi\kappa^2}{2J^2c^2} = \frac{\pi GM}{a(1 - \varepsilon^2)c^2}$$

samo perihelium przesunie się po jednym obiegu o δ .

Problem poprawek relatywistycznych do ruchu w polu grawitacyjnym jest dużo trudniejszy pojęciowo, ale modyfikacja równania orbity, **czego nie będę dowodził**, jest też stosunkowo skromna:

$$\frac{(r'^2 + r^2)}{r^4} = (E + \frac{GMm}{r}) \frac{2m}{J^2} + \frac{2GM}{c^2 r^3} + \frac{E^2}{c^2 J^2}$$

Żeby podkreślić niezależność orbity od masy planety, przepismy równanie w postaci

$$\frac{(r'^2 + r^2)}{r^4} = (\frac{E}{m} + \frac{GM}{r}) \frac{2}{(J/m)^2} + \frac{2GM}{c^2 r^3} + \frac{(E/m)^2}{c^2 (J/m)^2}$$

Jeśli przy tej samej prędkości i tym samym położeniu początkowym, zwiększymy masę, w tej samej proporcji wzrosną i energia i moment pędu, więc stałe E/m i J/m wchodzące do równania nie ulegną zmianie.

Dodatkowy człon ma taki efekt, jaki w przypadku nierelatywistycznym miałby dodatkowy potencjał spadający jak trzecia potęga odległości. Daje on ruch peryhelionowy orbit, którego nie powinno być (w zasadzie!) w teorii Newtona.

Owo „w zasadzie”, wymaga pewnego komentarza. Po pierwsze, wpływ innych planet wprowadza poprawki do wyidealizowanego zagadnienia Słońce + **pojedyncza** planeta. Ale ruch innych planet jest znany i może być uwzględniony. Duża część obserwowanego ruchu peryhelionowego Merkurego, Wenus i Ziemi jest w ten właśnie sposób wyjaśniona. Pozostaje jednak **dodatkowy** ruch peryhelionowy: $43,11'' \pm 0,45''$ na sto lat dla Merkurego i $5,0'' \pm 1,2''$ dla Ziemi.

Podane powyżej równanie przewiduje 43,03 i 3,8 dla tych dwóch planet. Zabawne, że spłaszczenie Słońca wywołane jego ruchem wirowym, daje człon, tzw. kwadrupolowy, też malejący jak $1/r^3$, który, potencjalnie, mógłby wyjaśniać ów ruch na gruncie teorii Newtona. Od początku jednak (jeszcze przed Einsteinem) takie wyjaśnienie napotykało na kłopoty. Dodatkowy moment kwadrupolowy GQ/r^3 w potencjale, wnosi

do równania wkład $\frac{2GQ}{r^3} \frac{1}{(J/m)^2}$. Jeśli dobierzemy wartość Q , tak by dla Merkurego

było $\frac{2GQ}{(J/m)^2_{\text{Merkury}}} = \frac{2GM}{c^2}$, to dla Ziemi, której orbita jest prawie 3 razy większa, ty-

leż samo większy jest $(J/m)^2$ i przewidywanie byłoby 3 razy mniejsze, czyli ok. $1''$ na sto lat, w całkowitej niezgodzie z obserwacją. To był argument podawany, zanim mo-

del Słońca został w późniejszych latach dokładnie opracowany, tak by zgadzał się z wieloma obserwowanymi własnościami Słońca. Jest ten moment znikomy, i prawie cały ruch peryhelionowy tych dwóch planet, pochodzi z OTW.

Podstawiając $w=1/r$, dostajemy równanie:

$$w'^2 + w^2 = \left(\frac{E}{m} + GMw\right) \frac{2}{(J/m)^2} + \frac{2GM}{c^2} w^3 + \frac{(E/m)^2}{c^2 (J/m)^2}$$

a po zróżniczkowaniu i podzieleniu przez $2w'$ równanie zaburzonego oscylatora:

$$w'' + w = \frac{GM}{(J/m)^2} + 3 \frac{GM}{c^2} w^2$$

Dla orbity Newtona (która jest doskonałym przybliżeniem orbity rzeczywistej), stała po prawej stronie to pocziwe $\frac{1}{p} = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)}$.

Stała o wymiarze długości $2GM/c^2$, to słynny promień Schwarzschilda, dla Słońca równy, dość dokładnie, 3km.

Równanie jest:

$$w'' + w = \frac{1}{p} + \frac{3}{2} r_0 w^2$$

Nauczeni doświadczeniem z zaburzonym potencjałem kulombowskim, szukamy rozwiązania w postaci³

$$w = \frac{1}{p'} (1 + \epsilon \cos(\omega\varphi))$$

Wstawiamy do rozwiązania otrzymując:

$$-\frac{\omega^2}{p'} \epsilon \cos(\omega\varphi) + \frac{1}{p'} (1 + \epsilon \cos(\omega\varphi)) = \frac{1}{p} + \frac{3}{2} r_0 \frac{1}{p'^2} (1 + 2\epsilon \cos(\omega\varphi) + \epsilon^2 / 2 + \cos(2\omega\varphi) / 2)$$

³ Moglibyśmy, bardziej prostodusznie, szukać poprawki **addytywnej**, tj. $w = (1/p)(1 + \epsilon \cos \varphi) + w_1$ uży-

skując dla w_1 równanie $w_1'' + w_1 = \frac{3}{2p^2} r_0 (1 + 2\epsilon \cos \varphi + \epsilon^2 \cos^2 \varphi)$. Teraz człon $\frac{3}{p^2} r_0 \epsilon \cos \varphi$, choć z

małą amplitudą, jest członem **rezonansowym**. Przez czas skończony daje małą poprawkę, którą się kumuluje.

Jak pamiętamy jest ona $\propto -r_0 \varphi \sin \varphi$ i jest jawnie nieokresowa. Z drugiej strony, dla małych $(\omega-1)\varphi$,

$\cos \omega\varphi = \cos((\omega-1)\varphi + \varphi) = \cos((\omega-1)\varphi) \cos \varphi - \sin((\omega-1)\varphi) \sin \varphi \approx \cos \varphi - (\omega-1)\varphi \sin \varphi$,

dlatego **modyfikacja** częstości ma ten sam skutek dla krótkich czasów, a zarazem daje rozwiązanie okresowe. A wiadomo z góry, że rozwiązanie **jest okresowe**.

Po to, żeby skasować człon $\cos 2\omega\varphi$, należałoby w rozwiązaniu od razu dopuścić człon tego typu z małym współczynnikiem rzędu r_0 , co wygenerowałoby z kolei, po wstawieniu do równania członów z kwadratem tej małej wielkości i $\cos 4\omega\varphi$, zupełnie już zaniedbywalne. Ale człon typu $\cos 2\omega\varphi$ **nie zmienia wartości kąta** azymutalnego, po której promień wraca do peryhelium! Dlatego możemy się nim nie przejmować zupełnie.

Przyrównując członów przy cosinusach, dostajemy:

$$-\frac{\omega^2}{p'}\varepsilon + \frac{1}{p'}\varepsilon = \frac{3}{2}r_0 \frac{1}{p'^2} 2\varepsilon$$

czyli:

$$\omega^2 = 1 - \frac{3}{p'}r_0$$

$$\omega = 1 - \frac{3}{2p'}r_0 = 1 - \frac{3}{a(1-\varepsilon^2)} \frac{GM}{c^2}$$

Po pełnym obiegu, peryhelium przesunie się o $6\pi \frac{GM}{a(1-\varepsilon^2)c^2}$ radianów.

Przyrównanie członów stałych da nam lekko zmieniony związek między wartością p' a momentem pędu. Ale w ostatnim wzorze, a , to jest po prostu obserwowana wartość, której zresztą wcale nie musimy znać dokładnie. Kąt przesunięcia się perihelium jest zresztą maleńki, błąd jego wyznaczenia jest ok. 1%, więc troska o poprawną wartość a na dalekim miejscu (8-mym) po przecinku nie miałby żadnego sensu.