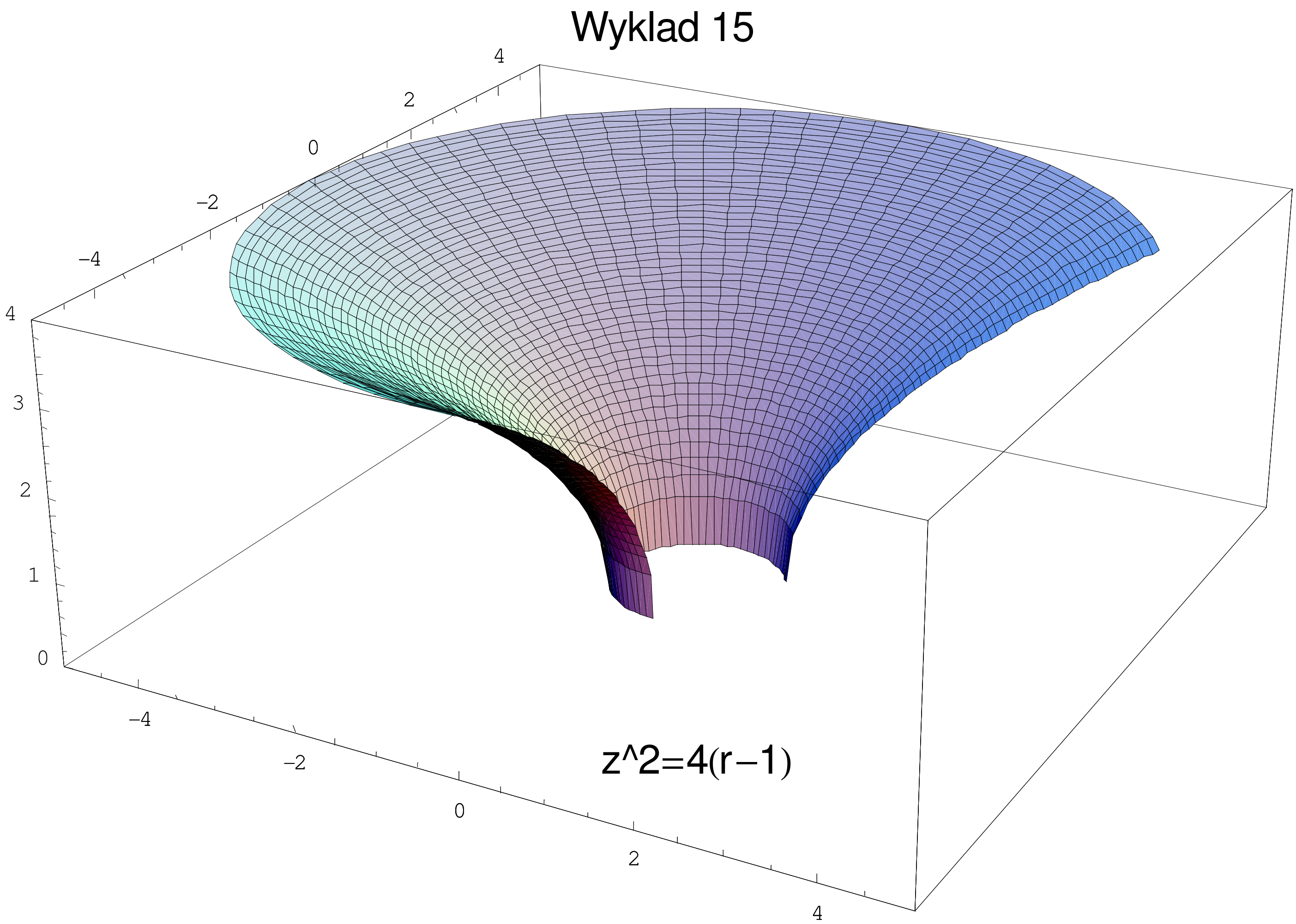


Obiecałem uchylić rąbka zasłony do magicznego obszaru współczesnej teorii grawitacji. Im dłużej się do tego zabieram, tym większe widzę możliwości pokazania istoty rzeczy w sposób **ścisły** (bez taniej popularyzacji), a zarazem wystarczająco przystępny już przy waszych, jeszcze skromnych umiejętnościach matematycznych. Wystarczy umieć różniczkować i z grubsza zdawać sobie sprawę, czym jest całka. Czeka nas dosyć daleka droga, ale wiele pośrednich etapów ma wielką wartość sama w sobie.

Zaczynam (jak u Hitchcocka) od rysunku, jak się przekonacie **czarnej dziury właśnie!**.

A dalej napięcie już tylko będzie rosło

Ruch swobodny po zakrzywionej powierzchni obrotowej

Na razie, to skromna **paraboloida obrotowa**, tyle, że parabola obrócona jest nie wokół swej osi (jak w paraboloidach teleskopów, czy reflektorów samochodowych), a wokół osi do niej prostopadłej, akurat **kierownicy**[1] tej paraboli. Pomyślmy o punkcie materialnym zmuszonym do poruszania się po takiej powierzchni, **bez żadnych innych sił**. Możemy myśleć o

[1] Zgodnie z definicją paraboli odległość do osi pionowej, z, która na płaszczyźnie *x,z,* ma **być równa** odległości do ogniska (ulokowanego w punkcie x=2, z = 0), czyli: $x = \sqrt{(x-2)^2 + z^2}$ a po przekształceniu $z^2 = 4(x-1)$, czyli po zamieceniu w koło dostajemy powierzchnię: $z^2 = 4(r-1)$

punkcie powolnym (niutonowskim), albo piekielnie szybkim. To bez znaczenia. Sama realizacja takich więzów, wymagałaby chyba stworzenia dwóch takich powierzchni, minimalnie rozsuniętych. Po wyniesieniu ich w kosmos (albo zabraniu do windy!) zaczynamy puszczać w tej szczelinie punkt materialny z dowolną prędkością z dowolnego punktu, pod dowolnym katem.

Punkt porusza się w trzech wymiarach, ale do pełnego opisu jego położenia wystarczy wyłącznie znajomość r i φ, tj. współrzędnych biegunowych rzutu tego punktu na płaszczyznę x,y. Potrzebne z obliczymy z wzoru umieszczonego na wykresie. Dlaczego punkt nie opuszcza powierzchni i porusza się po linii krzywej? To akurat banalnie proste. Trochę tak jak przy wahadle matematycznym. Tam wprawdzie jest siła grawitacji, ale ona to by miotała tym punktem po różnych parabolach, jak piłką tenisową, ale (doskonała) sprężystość nici, czy pręta dostarcza siły **gwarantującej** potrzebne **dodatkowe** przyspieszenie dające tor zawsze kołowy. Gdy siły zewnętrznej nie ma (albo jest zrównoważona, jak dla punktu poruszającego się po stole, ale uwiązanego nicią, czy może szynami kolejowymi, jak pociąg na zakręcie), więzy produkują **całe** potrzebne przyspieszenie.

Dla okręgu, wiadomo od razu, jaki jest tor punktu. W przypadku więzów, jakie zaprezentowałem powyżej, możliwe są różne tory rozpoczynające się w danym punkcie. Nawet, gdy prędkość początkowa jest już wybrana, ciągle wydaje się, że można poprowadzić różne orbity styczne do wektora prędkości początkowej.

Zaznaczmy na jabłku krótką kreseczkę i przyłóżmy nóż wzdłuż tej kreseczki. Nadal mogę jeszcze wybrać dowolnie **pochylenie** noża i przekroić jabłko na różne sposoby. Albo odciąć mały plasterek, albo dziabnąć jabłko na połowy! Tym razem promień okręgu granicznego będzie największy możliwy. A przecież można w trakcie krojenia zmieniać pochylenie noża, uzyskując najdziwniejsze wzory linii, wzdłuż której podzielona zostaje skórka jabłka.

Tak się składa, że pchnięty punkt **wie** jak ma się poruszać. Każda z linii, po której poruszać się może punkt, pchnięty wzdłuż jednego z kierunków stycznych do powierzchni, jest linią możliwie najprostszą! Punkt zakrzywia się tyle ile bezwzględnie **musi**. Po czorta robić małe kółko w bok? Skąd brać siłę **styczną** do powierzchni? Nie ma takowej! Taka najprostsza linia nazywa się **geodezyjną.** Wykorzystując własność prostopadłości siły więzów możemy wykorzystać własności mechaniki, do wyznaczenia równania geodezyjnej.

Rzut siły prostopadłej do powierzchni **obrotowej** na płaszczyznę (prostopadłą do osi obrotu) jest (w tej płaszczyźnie) **siłą centralną!** Zatem rzut ruchu opisywanego współrzędnymi r i φ zachodzi z zachowaniem **momentu pędu**.

$mr^2\dot{\varphi} = J$ (ewentualnie: $mr^2\dot{\varphi}/\sqrt{1-v^2/c^2} = J$, dla cząstki relatywistycznej)

A co z energią? Super prosto! Siła więzów, prostopadła do płaszczyzny stycznej, jest prostopadła do prędkości, więc ta **zachowuje** swą wartość bezwzględną. Zachowuje się po prostu energia kinetyczna – innej nie ma.

Ale uwaga Przemieszczaniu radialnemu towarzyszy zmiana współrzędnej z! Ten wkład do energii całkowitej musi być uwzględniany. Na wykresie, promień „dziury" powstały po obrocie, został przyjęty jako 1. No, ale on ma zapewne w „realu" ileś metrów, r_0. Liczby r i z na wykresie oznaczają krotność fizycznych odległości w takich przejściowych jednostkach. W „zwykłej" postaci, równanie powinno być:

$$z^2 = 4r_0(r - r_0)$$

$$2z\mathrm{d}z = 4r_0\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}z^2 = 4\frac{r_0^2}{z^2}\mathrm{d}r^2 = \frac{r_0}{r - r_0}\mathrm{d}r^2$$

Całkowite przemieszczenie w przestrzeni, które trzeba uwzględnić licząc energię kinetyczną wynosi

$$\mathrm{d}l^2 = r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2 = r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \left(1 + \frac{r_0}{r - r_0}\right)\mathrm{d}r^2 = r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{1}{1 - r_0/r}\mathrm{d}r^2$$

Tego typu wyrażenie nazywamy **metryką** przestrzeni zakrzywionej. Nasza paraboloida jest krzywa, jak diabli. Sąsiednie okręgi o obwodach $2\pi r$ i $2\pi(r - \mathrm{d}r)$ są **odległe** nie o $\mathrm{d}r$, jak by to było na płaszczyźnie, a o $\mathrm{d}l = \dfrac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r_0/r}}$. Jasne, że wybierając inną powierzchnię, i opisując ją jakimikolwiek **dwiema** współrzędnymi, dostalibyśmy inną metrykę. Np. dla półsfery, opisując ją współrzędnymi kartezjańskimi na płaszczyźnie podstawy:

$$z^2 = (R^2 - x^2 - y^2)$$

$$z\mathrm{d}z = -x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right)\mathrm{d}x^2 + \left(1 + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right)\mathrm{d}y^2 + \frac{2xy}{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

O wiele ładniej wygląda to w biegunowych:

$$\mathrm{d}l^2 = r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{1}{1 - r^2/R^2}\mathrm{d}r^2$$

Ogólniej, dla powierzchni obrotowej opisanej równaniem $z = z(r)$ będziemy mieć:

$$\mathrm{d}l^2 = r^2\mathrm{d}\varphi^2 + g_{rr}(\mathrm{r})\mathrm{d}r^2, \qquad \text{gdzie } g_{rr} = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)^2$$

Idea **takiej** przestrzeni krzywej nie budzi żadnych wątpliwości. Nie wymaga jakiegoś specjalnego treningu wyobraźni.

Chcąc zrobić milowy krok naprzód, musimy **nauczyć się abstrahować od zmiennej** z! To jest cała trudność w przyswojeniu sobie idei przestrzeni zakrzywionej! Gdy abstrahuję od z, mogę dopuścić, że **każda** z płaszczyzn trójwymiarowej przestrzeni ma taką metrykę. Przestrzeń trójwymiarowa, której **każdy przekrój** przez środek ma metrykę, od której zaczęliśmy, wymaga zastąpienia długości łuku na równiku długością łuku na dowolnym kole wielkim: $r^2 \mathrm{d}\varphi^2 \to r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)$.

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{1}{1 - r_0/r}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)$$

Czy taka metryka ma cos wspólnego z rzeczywistością? Zobaczymy, że tak.

Można pomóc wyobraźni zauważając, że (przynajmniej w tym wysoce symetrycznym przypadku), omawiana trójwymiarowa przestrzeń zakrzywiona, może być traktowana też jako podzbiór „zwykłej” euklidesowej, ale **czterowymiarowej** przestrzeni o współrzędnych:

x, y, z, u

i metryce Pitagorasa:

$$\mathrm{d}l_4{}^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}u^2$$

której punkty spełniają warunek:

$$\begin{aligned} u^2 &= 4r_0(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r_0) \\ &= 4r_0(r - r_0) \end{aligned}$$

Ale wróćmy do geodezyjnej. Nawet w takiej podejrzanej przestrzeni trójwymiarowej, symetria obrotowa, powoduje, że każde warunki początkowe wyróżniają pewien dwuwymiarowy przekrój, więc wystarczy, że wyznaczymy geodezyjne na powierzchni, którą doskonale rozumiemy i dla której możemy stosować **poczciwą** mechanikę, obojętnie: nierelatywistyczną, czy relatywistyczną!.

Prawa zachowania momentu pędu (piszę je dla cząstki relatywistycznej):

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{J}{m/\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{a \cdot mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m/\sqrt{1 - v^2/c^2}} = av$$

(gdzie a to ramię wektora pędu daleko od centrum, w obszarze płaskim)

i energii, sprowadzające się do stałości prędkości:

$$\sqrt{r^2\dot{\varphi}^2 + g_{rr}\dot{r}^2} = v$$

dzielimy, po podniesieniu do kwadratu, stronami (drugie przez pierwsze) i wykorzystując to, że $\dot{r}/\dot{\varphi} = r' \equiv \mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi$, dostajemy równanie geodezyjnej, nadające się już wprost do konkretnego rozwiązywania

$$\frac{1}{r^2}+\frac{g_{rr}}{r^4}r'^2=\frac{1}{a^2}$$

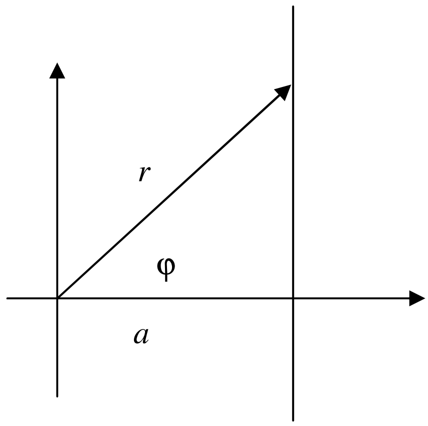
Krzywizna przestrzeni dostarcza nowy przykład ciekawych ruchów. I to bez żadnego potencjału[2]!

Dla naszej paraboloidy dostaniemy:

$$r^2+\frac{1}{1-r_0/r}r'^2=\frac{1}{a^2}r^4$$

Gdyby położyć $r_0=0$, powinniśmy dostać równanie prostej.

Istotnie, prosta z rysunku obok:



$$r=\frac{a}{\cos\varphi},$$

spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$r'=\frac{a\sin\varphi}{(\cos\varphi)^2},$$

$$r'^2+r^2=a^2\frac{(\sin\varphi)^2+(\cos\varphi)^2}{(\cos\varphi)^4}=\frac{r^4}{a^2}$$

Ruch cząstki był tu tylko narzędziem. Geodezyjna ma swój geometryczny sens i bez puszczania po niej punktów materialnych (czy promieni światła). A właśnie! Gdyby zrobić płytkę z materiału światłowodowego wygiętego tak, czy inaczej, to wpuszczona z boku wiązka **też** wędrowałaby po geodezyjnej. W końcu fotony to tez cząstki! A nasz poprzedni wywód stosuje się również do cząstek relatywistycznych, o prędkości dowolnie bliskiej *c*.

Otrzymane równanie można też przepisać w postaci:

$$\frac{(r'^2+r^2)}{r^4}=\frac{r_0}{r^3}+\frac{1}{a^2}-\frac{r_0}{a^2r},$$

którą, ktoś nieuświadomiony skąd równanie pochodzi, mógłby je uznać za zwykłe równanie w polu centralnym w przestrzeni płaskiej z siłą o potencjale będącym sumą członu $\sim 1/r$ i członu $\sim 1/r^3$

Na ćwiczeniach policzycie kąt, jaki w obszarze asymptotycznym tworzą kierunki geodezyjnej przed wejściem w obszar bliski centrum i po jego opuszczeniu.

Krzywizna przestrzeni jest **jakimś** sposobem realizowania **nietrywialnej** dynamiki **odmiennym** od niutonowskiej siły potencjalnej. Zostało to wykorzystane (jest **jednym** ze składników) w einsteinowskiej teorii grawitacji.

[2] Suma $\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2$ **nie jest** oczywiście stała. Jej określona zmienność wraz z położeniem decyduje o rozwiązaniu, i w szczególności o kącie rozproszenia. Można to interpretować i tak, że składowa siły reakcji na płaszczyznę r,φ jest niezerowa i decyduje o zmienności rzutu prędkości na tę płaszczyznę.

Na fakt, że krzywizna przestrzeni, **symuluje** jakby pole siłowe, zwrócili uwagę uczeni niemieccy: Jacobi, Cristoffel, Riemann. Rzeczą **pierwszorzędnej wagi** jest to, iż trajektorie nie zależą od masy. Gdyby krzywizna miała być odpowiedzialna za jakieś pole, to oczywistym uprzywilejowanym kandydatem jest grawitacja.

Można powiedzieć, że fizycy ci mieli dobre intuicje, ale brak świadomości iż czasoprzestrzeń **lokalnie** jest pseudoeuklidesowa, uniemożliwiał skonsumowanie owej idei. Technicznie rzecz biorąc, geodezyjna jest wyznaczona tylko przez punkt początkowy i końcowy, a tor cząstki zależy **jeszcze** od wartości prędkości początkowej (czy ogólniej, od energii cząstki).

Ideę geodezyjnej ucieleśnił dopiero Einstein, jako **geodezyjną w czasoprzestrzeni.** Większość ludzi sądzi, że całe odchylenie światła w pobliżu gwiazdy jest efektem krzywizny trójwymiarowej przestrzeni, czym dowodzą, że słyszeli, że dzwoni, ale nie wiedzą, w którym kościele! Sądzą oni błędnie, że światło w teorii grawitacji porusza się po geodezyjnych w przestrzeni. Moim celem będzie zbadanie równania toru i światła i innych cząstek, a także porównanie ich z geodezyjną w przestrzeni trójwymiarowej. Grawitacja zarazem **zakrzywia przestrzeń, ale** i **ściąga z geodezyjnej** trójwymiarowej i cząstki z masą i fotony.

Różne ciała spadają jednakowo.

Cóż to jest, zatem, grawitacja? Jak pogodzić grawitację ze szczególną teorią względności? Mówiąc technicznie, jak prędkość światła wchodzi do praw grawitacyjnych?

Kluczem do rozpatrzenia tych pytań, jest **zasada równoważności.** Skąd się ona bierze?

Początki sięgają praw Keplera! Przecież III prawo porównuje okresy i rozmiary orbit nie jednej planety w różnych sytuacjach (toż to było i jest niemożliwe. Jednak dzisiaj, wysyłając **identyczne** satelity na różne orbity możemy – przy okazji – sprawdzać zależność od odległości przyspieszenia dośrodkowego **takiego samego ciała**.) Rodzaje planet, ich masy, skład chemiczny (bardzo różny) nie mają jak widać znaczenia dla ich ruchu!

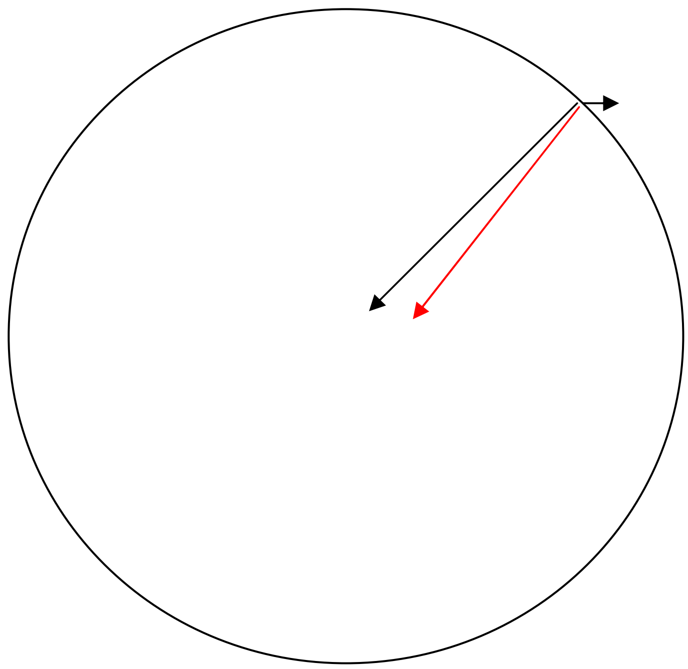
Również Galileusz, badając spadek ciał, podkreślił identyczność przyspieszenia spadku swobodnego różnych ciał. Przenosi się to bezpośrednio na niezależność okresu wahań wahadła od materiału użytego do wykonania ciężarka. Fakt ten formułuje się jako identyczność masy grawitacyjnej i masy bezwładnej[3].

Około 100 lat temu, serię pięknych doświadczeń potwierdzających ten fakt z ogromną dokładnością wykonał baron Ëtvos. Idea polega na obserwacji, iż to, co na Ziemi utożsamiamy z przyspieszeniem ziemskim i pionem, w danym miejscu, (i co automatycznie wyznaczamy mierząc te wielkości) to nie jest wyłącznie siła z prawa Newtona!!!!

I wcale nie jest skierowana do środka Ziemi!

[3] Pedanci mówią o proporcjonalności. Ścisła proporcjonalność pozwoliłaby, tak czy inaczej, zmienić jednostkę masy ważkiej tak, by stała się liczbowo **równa** masie bezwładnej określonej w kilogramach.

Jakże, bowiem, oddzielić sumę sił od poszczególnych kawałków globu, z teorii Newtona od siły bezwładności! Ta siła bezwładności to siła odśrodkowa o wartości $m\omega^2 R$. Nie jest to może bardzo dużo (ok. 4cm/s^2), ale przy czułości metody, o której za chwilę, wystarczająco dużo.



Siła będąca sumą wkładów (proporcjonalnych do iloczynu mas i odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości) od poszczególnych fragmentów globu, skierowana jest ku środkowi[4] globu, a siła bezwładności prostopadle do osi obrotu i na zewnątrz! Na równiku jest to ten sam kierunek, tylko inny zwrot, na biegunie znika siła odśrodkowa, ale na szerokościach geograficznych pośrednich (np. Budapesztu), siła odśrodkowa wpływa wyraźnie na kierunek **pionu**. Pionem nazywamy **oczywiście** kierunek siły wypadkowej.

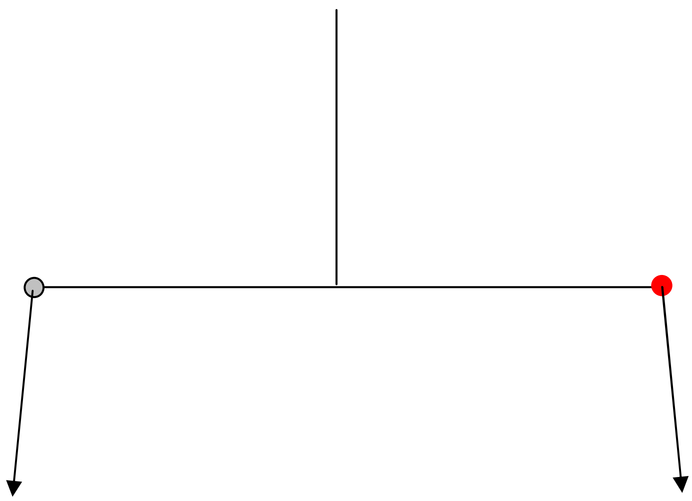
Gdyby(!), gdyby masa bezwładna nie była tożsama z grawitacyjną, to nie dałoby się wybrać jednostek masy jednej i drugiej tak, by były one identyczne. Gdyby jednostka masy (grawitacyjnej) aluminium w zderzeniu z jednostką masy (grawitacyjnej) miedzi (równość takich mas można by ustalić na wadze umieszczonej na biegunie) zachowywałaby się jakby miała masę o 1% większą, to próbując uzgodnić jednostki masy bezwładnej, musielibyśmy arbitralnie wybrać, czy miedź ważąca tyle samo, co aluminium jest jednostką masy bezwładnej, czy jest to trochę bardziej bezwładne aluminium.

[4] Ziemia nie jest kulą, a bryłą spłaszczoną, podobną do elipsoidy, więc ta wypadkowa jest trudna do policzenia, a jej kierunek nie pokrywa się idealnie z kierunkiem do środka elipsoidy

Wypadkowa siła Newtona i bezwładności składałaby się dla tych dwóch substancji, z **identycznych** sił ku środkowi Ziemi i **różniących się o 1%** składowych w płaszczyźnie skierowanej do równika niebieskiego. Wypadkowy kierunek pionu wskazywany przez aluminium, byłby odchylony ku południu w stosunku do pionu wskazywanego przez miedź!

Czy można dwa ciężarki z takich dwóch substancji przyczepić do końców beleczki zawieszonej w środku na kwarcowej nici i uzyskać równowagę?

Można .Metodą prób(na tym polega ważenie) można tak dobrać ilości substancji by ich **wypadkowe** siły były, co do wartości, równe. Pozostaną różne kierunki pionu, a układ poszczególnych kierunków będzie jak na rysunku: Płaszczyzna rysunku jest płaszczyzna **południka.**



Pomyślmy teraz, co się stanie, gdy cały aparat (obudowę i – przede wszystkim punkt zawieszenia nici) obrócimy o 90ºi ustawimy w płaszczyźnie Wschód – Zachód.

Względem aparatu nowe siły obrócą się o 90º i, przyjmując, że sami się obróciliśmy i patrzymy na tę co poprzednio ścianę aparatu, stwierdzimy, że siły uzyskają składowe **ku nam jedna i on nas druga.**

Pojawi się moment siły, który **skręci nieco nić**. Jeśli do nici przyczepione jest lusterko, to odpowiedni zajączek na doczepionej do aparatu listwie, przesunie się!

Żadnego przesunięcia nie zaobserwowano.

Można podwyższyć czułość bardzo znacznie obracając równomiernie aparatem z okresem równym okresowi oscylacji takiego **wahadła skrętnego**. Jeśli by piony dla dwóch ciężarków były rzeczywiście rozbieżne, moment obrotowy, o którym mówiłem, oscylowałby z okresem obrotu i nawet znikomy moment, wskutek **rezonansu** uległby znacznemu wzmocnieniu.

Summa summarum, **ewentualna dysproporcja** między owymi dwoma masami została ograniczona do ok. 10^{-12}. To nie znaczy, że taka dysproporcja jest, tylko, że tak małej nie bylibyśmy w stanie(na razie) wykryć.

Zasada równoważności, w najprostszym ujęciu znaczy cos takiego: Skoro siła grawitacji jest proporcjonalna do tej samej wielkości, co siła bezwładna, (a współczynnik proporcjonalności to jest raz przyspieszenie spadku, a drugi raz **minus** przyspieszenie układu nieinercjalnego), to można łatwo uzyskać dwa efekty:

- Pozwalając windzie spadać swobodnie, uzyskać kasowanie dwóch sił i tym samym efektywny stan **nieważkości**
- Przyspieszając kabinę w Kosmosie (daleko od wszelkich ciał) z przyspieszeniem $-\vec{g}$ uzyskać dla zachowania się wszelkich ciał w kabinie stan **identyczny** jak na Ziemi, gdzie działa „prawdziwe[5]" przyspieszenie $\vec{g}$

W teorii Newtona, w czasoprzestrzeni Galileusza, zasada równoważności jest mało płodna. Jest to innymi słowy wypowiedziana równość owych piekielnych mas, ale żadne konstruktywne wnioski z tego nie wynikają[6].

Nadzwyczajne rzeczy zaczynają się dziać, gdy zasadę równoważności zderzymy z własnościami czasoprzestrzeni opisywanymi w Szczególnej Teorii Względności.

[5] Przynajmniej w 99,6% „prawdziwe" Reszta to też siła „pozorna"

[6] Gdy pierwszy raz, jako dziecko, zetknąłem się z zagadnienie rzutów w polu ciężkości, to Autor książki „Zajmująca Fizyka" operował, de facto, zasadą równoważności. Pozwalał jabłku, do którego mierzono z karabinu, zacząć spadać równocześnie z wylotem pocisku z poziomej lufy. Bez żadnego liczenia, było oczywiste, że pocisk trafi w jabłko! Cóż! Obserwator związany ze spadającym jabłkiem **wyeliminował** siłę ciężkości, więc pocisk, lecąc **po prostej** a dobrze wycelowany, musiał trafić w jabłko.