Wykład 19

Zagadnienie dwóch ciał.

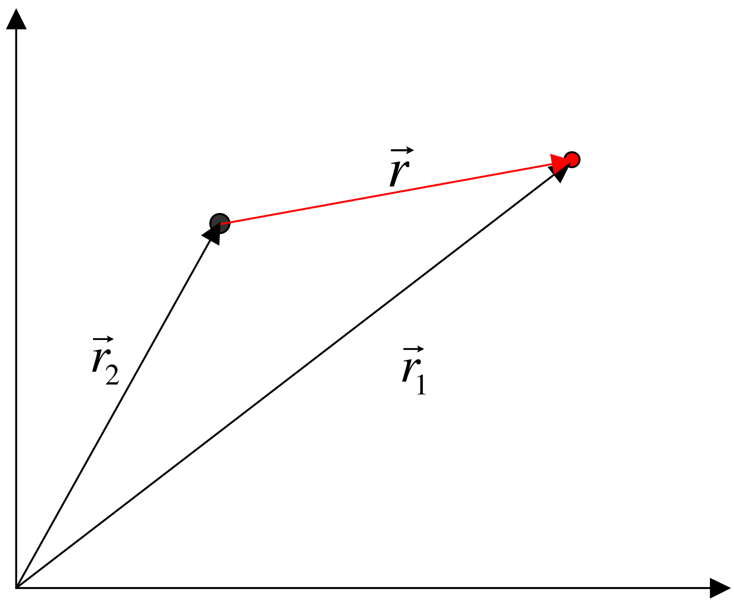
Realistyczny przykład oddziałującego układu fizycznego wymaga obecności, co **najmniej dwóch** ciał, w najprostszym przypadku, dwóch punktów materialnych. W dotychczasowych naszych rozważaniach dotyczących ruchów w polu centralnym, przyjmowaliśmy jedno z nich za wystarczająco masywne, w stosunku do drugiego, by wpływ tego drugiego na zachowanie tego masywnego, mógł być całkowicie zaniedbany. Przypomnę, że, przy tym założeniu, zbadaliśmy problem keplerowsko-kulombowski w przybliżeniu nierelatywistycznym, (wyprowadzając m.in. prawa Keplera, związek okresu z energią atomu, rozpraszanie Rutherforda), relatywistyczny problem kulombowski, co udaje się bez wychodzenia poza świat Minkowskiego, dostrzegając możliwość spadku na centrum, no i ostatnio, relatywistyczny problem grawitacyjny, co otworzyło zupełnie niesłychane nowe perspektywy na to, w jakim świecie żyjemy, gdy grawitacja jest traktowana serio. A w skali Kosmosu **musi** być ona traktowana serio. W przybliżeniu niutonowskim nie da się opisać ani Wielkiego Wybuchu, ani kształtowania się galaktyk (każda z czarną dziurą w środku, jak się wydaje), itp. Zbadaliśmy też pewne aspekty ruchów w obecności sił krótkozasięgowych, dostrzegając ich podwójną, niewspółmierną periodyczność (φ w koło od 0 do 2π i znów i znów, oraz *r* do aphelium do perihelium, znów do aphelium, i na nowo), a także istnienie rozłącznych obszarów dopuszczalnych przez ustaloną wartość energii i momentu pędu, (co otwiera temat kwantowego tunelowania)

Relatywistyczny problem **dwóch i więcej** ciał jest **trudny.** Bardzo trudny. Przy wyjściu poza niutonowskie przybliżenie, uwzględniana być musi suwerenna dynamika pola, czy to elektromagnetycznego, czy grawitacyjnego, łącznie z promieniowaniem. To trochę tak, jak przy **szybkim** ruchu tłoka w cylindrze. Gdy tłok ucieka cząstkom z prędkością porównywalną do prędkości termicznych samych cząstek, stan gazu daleki jest od stanu równowagi, jego opis wymaga, co najmniej, rozważenia fal dźwiękowych i rozważania ich ewolucji razem z ewolucją położeń tłoka.

Gdy względy potrzebnej precyzji, czy też zbliżona wielkość oddziałujących ciał, wymagają dokładniejszego podejścia, (my) możemy to uwzględnić i zająć się problemem dwóch (lub więcej) ciał, **jedynie ograniczając się do fizyki nierelatywistycznej**.

Zagadnienie **dwóch** ciał oddziałujących siłą centralną ma wyjątkowo ogólne, wyjątkowo eleganckie i wyjątkowo proste rozwiązanie! Teraz się tym zajmiemy.

Oznaczymy położenia dwóch ciał wektorami wodzącymi: $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, ich masy m_1 i m_2. Oznaczymy także wektor wodzący od ciała 2 do ciała 1 symbolem $\vec{r}$, a jego wartość r.



Oznaczmy siłę działającą na ciało 1 symbolem $\vec{F} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$. Siła działająca na ciało nr 2 to $-\vec{F}$. (Wyróżniliśmy tu ciało nr 1, w skromnym zakresie, nazywając symbolem bez znaku „minus" właśnie siłę działającą na to, a nie drugie ciało. Podobnie wektor $\vec{r}$ wskazuje położenie tego ciała względem drugiego. Pamiętamy tu o sytuacji, gdy ciało nr 1 było naprawdę **wyróżnione**, a ciało nr 2 uznawane za nieruchome. Teraz, myśląc o ciele nr 1 jako tym lżejszym, chcemy dostrzec zmiany wprowadzone przez **równoprawne**, *de facto,* już ich traktowanie.)

Równania ruchu są:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}$$

Równania wyglądają skomplikowanie, bo nie są to dwa **oddzielne** równania (wektorowe), na dwa wektory położeń, a układ równań, jak mówimy, sprzężony. Poprzez wektor $\vec{r}$ i jego wartość r, które są zależne od **obu** wektorów wodzących obu ciał, w równaniu na $\vec{r}_1$, po prawej stronie obecne jest też $\vec{r}_2$ i *vice versa.*

Kuszące jest przekształcić te **dwa** równania wektorowe, na **dwa** inne przez ich dodanie stronami:

$$m_1\ddot{\vec r}_1 + m_2\ddot{\vec r}_2 = 0$$

i odjęcie, po uprzednim podzieleniu przez masy:

$$\ddot{\vec r}_1 - \ddot{\vec r}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec F .$$

Pierwsze równanie jest jakieś banalne – zajmiemy się nim za chwilę. Prawa strona ostatniego równania jest funkcją wektora $\vec r$, a i lewa **także**, gdyż, przecież: $\ddot{\vec r}_1 - \ddot{\vec r}_2 = \ddot{\vec r}$. Wygodnie jest wprowadzić nową wielkość, **masę zredukowaną:**

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

i nadać ostatniemu równaniu postać:

$$\mu\ddot{\vec r} = \frac{\vec r}{r} F(r)$$

Wynik ten nazywa się czasami **redukcją zagadnienia dwóch ciał** do zagadnienia jednego ciała. Istotnie, matematyczna postać otrzymanego równania jest nie do odróżnienia od tego, co byśmy wypisali mając problem jednego ciała o masie μ w polu siły $\vec F(\vec r)$ o centrum nieruchomym (a więc nieskończenie masywnym) w pewnym układzie inercjalnym.

To, że wektor wodzący $\vec r$ jest faktycznie odmierzany od drugiego ciała, wykonującego ruch przyspieszony, jest w całości **kompensowane** wystąpieniem w równaniu masy zredukowanej. Wszak nowe równanie jest na pewno prawdziwe!

Gdy mamy wzory rozwiązujące problem jednego ciała o masie *m* w polu drugiego o masie nieskończonej, to wystarczy zastąpić stare *m* nowym μ i już. W ten sposób wyznaczamy bez żadnej dodatkowej pracy ruch **względny**.

Dla wyznaczenia ruchu bezwzględnego i związku stałych ruchu problemu zredukowanego, mającemu z lekka formalny charakter, z wielkościami fizycznymi ujawniającymi się, np. w energii wysłanego fotonu, który wynosi energię **atomu**, a nie abstrakcyjnej „masy zredukowanej", trzeba zająć się tym pierwszym równaniem powstałym z **dodania** równań ruchu. Jest ono bardzo proste:

$m_1\ddot{\vec r}_1 + m_2\ddot{\vec r}_2 = 0$, co można **po dwakroć** scałkować:

$$m_1\dot{\vec r}_1 + m_2\dot{\vec r}_2 = \vec P = \text{const}$$
$$m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 = \vec P t + \text{const}'$$

Dzieląc ostatnie równanie przez sumę mas dostajemy:

$$\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}=\frac{\vec{P}}{m_1+m_2}t+\text{const}''$$

Wektor wodzący $\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}\equiv\vec{R}$, będący „średnią ważoną” wektorów wodzących obu ciał, wskazuje punkt na odcinku łączącym masy m_1 i m_2, dzielący ten odcinek w proporcji odwrotnej do mas. Aby to wykazać, obliczmy wektory wodzące obu punktów **względem tego punktu.**

$$\vec{\rho}_1=\vec{r}_1-\vec{R}=\vec{r}_1-\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}=\frac{(m_1+m_2)\vec{r}_1-m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{\rho}_2=\vec{r}_2-\vec{R}=\vec{r}_2-\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}=\frac{(m_1+m_2)\vec{r}_2-m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

Punkt ten zwie się **środkiem masy**.

Stała $\vec{P}$ jest sumą pędów obu ciał. Jest to doskonale nam znane prawo zachowania pędu. Odczytujemy też, że ruch środka masy jest ruchem **jednostajnym.**

$$\vec{R}=\frac{\vec{P}}{m_1+m_2}t+\frac{\text{const}'}{m_1+m_2}=\vec{V}_{SM}t+\vec{R}(0),$$

oraz, że pęd całkowity jest iloczynem **sumarycznej** masy i prędkości ruchu środka masy.

Ostatecznie położenia bezwzględne ciał są:

$$\vec{r}_1=\vec{R}+\vec{\rho}_1=\vec{V}_{SM}t+\vec{R}(0)+\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2=\vec{R}+\vec{\rho}_2=\vec{V}_{SM}t+\vec{R}(0)-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

Policzmy (podwojoną, by uniknąć niektórych ułamków) całkowitą energię kinetyczna obu ciał:

$$m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}+m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}=m_1(\dot{\vec{R}}+\dot{\vec{\rho}}_1)^2+m_2(\dot{\vec{R}}+\dot{\vec{\rho}}_2)^2=$$

$$=(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2+2\dot{\vec{R}}(m_1\dot{\vec{\rho}}_1+m_2\dot{\vec{\rho}}_2)+m_1(\dot{\vec{\rho}}_1)^2+m_2(\dot{\vec{\rho}}_2)^2$$

$m_1\dot{\vec{\rho}}_1+m_2\dot{\vec{\rho}}_2$, jak zresztą i $m_1\vec{\rho}_1+m_2\vec{\rho}_2$ są równe zeru, co wynika wprost z tego jak wyrażają się poprzez wspólny wektor $\vec{r}$. Można tez inaczej powiedzieć, że z definicji, są to wielkości pędu oraz położenia środka masy, w układzie **środka masy**!

Mamy, więc:

$$\frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}+m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2}=\frac{(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2}{2}+\frac{m_1(\dot{\vec{\rho}}_1)^2}{2}+\frac{m_2(\dot{\vec{\rho}}_2)^2}{2}$$

Jest to przypadek szczególny ogólnego **twierdzenia Königa**, mówiącego, że;

Energia kinetyczna zbioru punktów materialnych, jest sumą energii w układzie środka masy plus energia ciała traktowanego jako całość, tj. jak punktu materialnego o masie sumarycznej składników i prędkości środka masy.

Dowód jest praktycznie taki sam, jak dla dwóch ciał.

Dla dwóch ciał, możemy udowodnić więcej:

$$\frac{m_1(\dot{\vec{\rho}}_1)^2}{2}+\frac{m_2(\dot{\vec{\rho}}_2)^2}{2}=\frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2+m_2\left(\frac{-m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}^{\,2}=\frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

Energia w środku masy **pokrywa się** z wyrażeniem, które formalnie grałoby rolę energii w zagadnieniu jednego ciała o masie zredukowanej.

Podobnie przedstawia się sprawa z momentem pędu.

$$\vec{r}_1\times m_1\dot{\vec{r}}_1+\vec{r}_2\times m_2\dot{\vec{r}}_2=m_1(\vec{R}+\vec{\rho}_1)\times(\dot{\vec{R}}+\dot{\vec{\rho}}_1)+m_2(\vec{R}+\vec{\rho}_2)\times(\dot{\vec{R}}+\dot{\vec{\rho}}_2)=$$

$$=(m_1+m_2)\vec{R}\times\dot{\vec{R}}+m_1\vec{\rho}_1\times\dot{\vec{\rho}}_1+m_2\vec{\rho}_2\times\dot{\vec{\rho}}_2+$$

$$+\vec{R}\times(m_1\dot{\vec{\rho}}_1+m_2\dot{\vec{\rho}}_2)+(m_1\vec{\rho}_1+m_2\vec{\rho}_2)\times\vec{R}$$

Wyrazy w ostatnim wierszu są zerami, więc:

$$\vec{r}_1\times m_1\dot{\vec{r}}_1+m_2\times m_2\dot{\vec{r}}_2=\vec{R}\times\vec{P}+m_1\vec{\rho}_1\times\dot{\vec{\rho}}_1+m_2\vec{\rho}_2\times\dot{\vec{\rho}}_2$$

Uzyskanie powyższego rezultatu dla wielu ciał przebiega niemal identycznie.

Całkowity moment pędu układu wielu punktów materialnych względem układu inercjalnego, jest sumą momentu pędu ciał policzonego w układzie środka masy, względem centrum w środku masy i momentu pędu „środka masy" policzonego względem początku układu inercjalnego.

Dla dwóch ciał, ponadto, ów moment pędu względem środka masy jest **identyczny** z formalnym momentem pędu „masy zredukowanej":

$$m_1\vec{\rho}_1\times\dot{\vec{\rho}}_1+m_2\vec{\rho}_2\times\dot{\vec{\rho}}_2=$$

$$=m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\times\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2+m_2\left(\frac{-m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\times\frac{-m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2$$

$$=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

W problemie Keplera, z nieskończenie ciężkim centrum, dzięki równości masy bezwładnej i grawitacyjnej, masa lekkiego ciała znikła ze wzorów wiążących okres obiegu z rozmiarem orbity. Pozostał jedynie iloczyn *GM*. Pamiętając, że owo *GM* w trzecim prawie Keplera powstało z podzielenia *GMm* występującego w wyrażeniu na siłę, przez *m* mnożącą przyspieszenie po lewej[1] stronie równania, teraz tylko ta ostatnia masa ma być zastąpiona przez μ, więc podstawienie powinno być:

$$GM = \frac{GMm}{m} \Rightarrow \frac{GMm}{\mu} = GMm\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) = G(M + m)$$

Poprawione trzecie prawo Keplera jest:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{G(M + m)}$$

W historii fizyki, nasi wielcy poprzednicy mieli, trzeba przyznać, sporo szczęścia! Gdyby, powiedzmy, planety Jowisz i Saturn były wyraźnie cięższe niż są i miały nie 1/1000 i ~1/2000 masy Słońca, a coś koło 1/50 czy 1/20, III prawo Keplera o **proporcjonalności** kwadratów okresów i trzecich potęg średnich odległości od Słońca realnych, różnych planet, było by **wyraźnie** nieprawdziwe. Współczynnik mnożący trzecią potęgę odległości jest **naprawdę** inny dla każdej planety, ale na tyle mało, że niezauważalnie. Dzięki temu, w pierwszym niejako przybliżeniu, udało się sformułować prawo Keplera prowadzące wprost do „odwrotnych kwadratów" Newtona, i do jego równań. Dopiero potem, stało się jasne, że musi być poprawka. Gdy dokładności pomiarów wzrosły, poprawki zostały potwierdzone. Jakieś drobne rozbieżności nadal pozostały! To wykryto następne planety. Jeszcze część się nie zgadzała. Przyszedł Einstein ze swoja teorią. Co będzie dalej?

Podobny „fart" wystąpił w fizyce atomowej! I to na różnych płaszczyznach. Po pierwsze, w przeciwieństwie do planet, które słabiutko na siebie wpływają, więc dominujący jest wpływ Słońca, a problem rzeczywisty bliski problemowi dwuciałowemu, elektrony w atomie działają na siebie siłami podobnymi jak siły oddziaływania z jądrem. Np. w helu, przy tej samej odległości, siła miedzy elektronem a jądrem jest tylko dwa razy mniejsza od siły oddziaływania z drugim elektronem. Już w atomie helu **nic nie jest** proste. Ale przyroda dostarczyła **atom wodoru.** Idealny materiał do zagadnienia dwóch ciał. Jeśli chodzi o wpływ ruchu centrum (teraz jądra atomowego), to podobnie jak w astronomii Układu Słonecznego, masa zredukowana jest bardzo bliska masie elektronu.

---

[1] Gdyby masy bezwładna i ważka były odróżnialne, powiedzielibyśmy, że w procesie redukcji masę ważką pozostawiamy bez zmiany (tak jak ładunek elektryczny, o czym za chwilę), a na masę zredukowaną zamieniamy tylko masę „bezwładną". To nie żaden dogmat, czy zasada, a jedynie stwierdzenie tego, jakie operacje matematyczne dokonaliśmy, by uprościć wyjściowe równania.

Najistotniejszy wynik dla atomu wodoru (Z = 1), lub wodoropodobnego, np. jednokrotnie zjonizowany atom helu (Z = 2), itp., rzutujący na jego poziomy energetyczne po uwzględnieniu zasad kwantowych, ma związek energii atomu z okresem obiegu. Otrzymaliśmy:

$$T = \pi\kappa\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \qquad \kappa = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

Wiedziony genialną intuicją Bohr, wyprowadził z tego wzór na poziomy energetyczne. Z założenia, miał to być wzór poprawny **przynajmniej** dla wysokich poziomów, w praktyce okazał się (nie mówiąc o poprawkach relatywistycznych) całkiem ścisły, tzn. identyczny z wynikiem dawanym potem przez nierelatywistyczne równanie mechaniki kwantowej, równanie Schroedingera:

$$E = -\frac{m\kappa^2}{(h/2\pi)^2}\cdot\frac{1}{2n^2}$$

Oczywiście, przez masę m należy rozumieć masę zredukowaną elektronu i jądra, a nie masę elektronu. Zatem:

$$E_n = -\frac{m_\mathrm{e}\kappa^2}{(h/2\pi)^2(1+m_\mathrm{e}/M_\mathrm{J})}\cdot\frac{1}{2n^2}$$

gdyż $\mu = \dfrac{M_J m_e}{M_J + m_e} = \dfrac{m_e}{1+m_e/M_J}$

Istotnie, zwiększając czułość obserwacji widm, zaobserwowano, że każdej linii widmowej wodoru, wcześniej zaobserwowanej, towarzyszy słaba linia o długości fali przesuniętej o czynnik $\cong 1{,}00025 = \dfrac{1+1/2000}{1+1/4000}$, co odpowiada stosunkowi mas zredukowanych w lekkim wodoru, i w deuterze. Tak odkryto izotopy. Przy okazji wyjaśniono też, dlaczego w widmie wodoropodobnym jednokrotnie zjonizowanego helu, linie odpowiadające przejściom miedzy parzystymi liczbami kwantowymi, odpowiadały niemal ściśle liniom wodoru, ale właśnie „niemal” gdyż różniły się czynnikiem $\cong \dfrac{1+1/2000}{1+1/8000}$