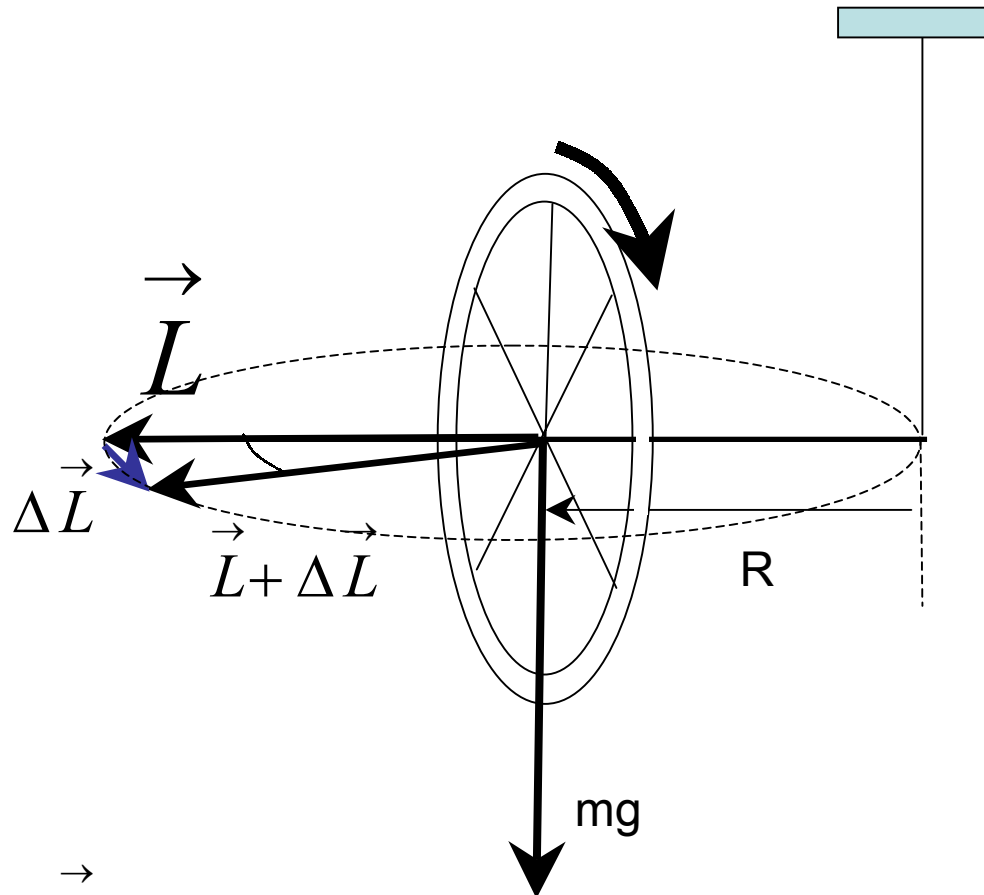


Precesja koła rowerowego



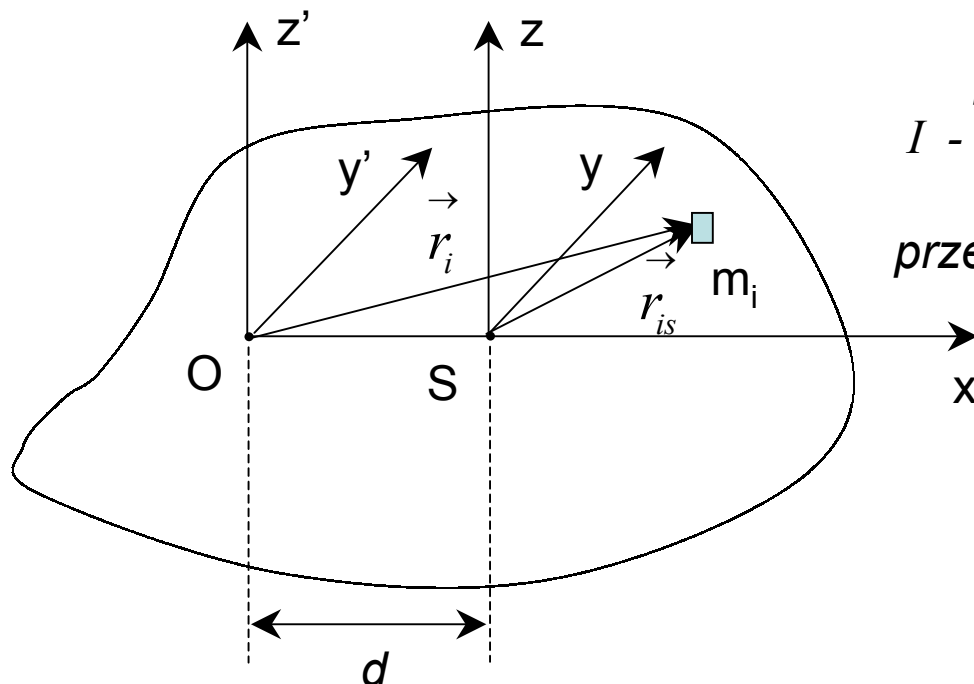
$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$



$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \perp \vec{R} \perp \vec{F}$$

Twierdzenie Steiner



I_s - moment bezwładności względem osi równoległej do osi z przechodzącej przez środek ciężkości S

I - moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy i i odległej od niej o d .

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Dobieramy osie układów wsp. tak aby:

$$x_i = x_{is} + d$$

$$y_i = y_{is}, \quad z_i = z_{is}$$

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i [(x_{is} + d)^2 + y_{is}^2] = \sum m_i [x_{is}^2 + 2x_{is}d + d^2 + y_{is}^2] = \\ &= \sum m_i (x_{is}^2 + y_{is}^2) + 2d \sum m_i x_{is} + d^2 \sum m_i \end{aligned}$$

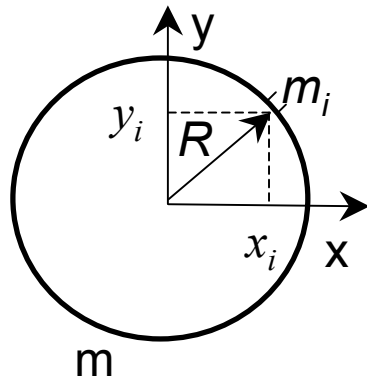
Z definicji układu środka masy: $\sum m_i x_{is} = 0$

Stąd:

$$I = I_s + md^2$$

Obliczanie momentów bezwładności prostych brył

- korzystanie z symetrii
- całkowanie
- skalowanie i tw. Steinera



Obręcz o promieniu R i masie m

Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości, prostopadłej do płaszczyzny obręczy.

Dzielimy obręcz na kawałeczki o masie m_i

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i R^2 = mR^2$$

Płaski krążek

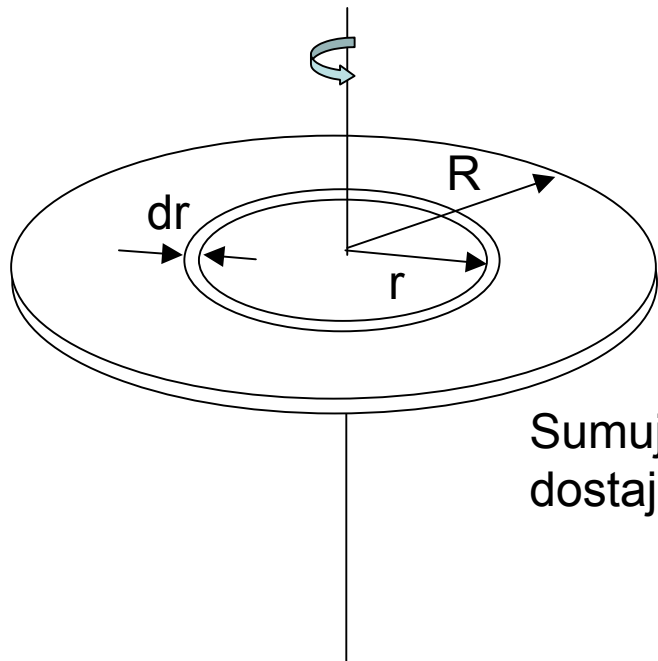
Dzielimy krążek na cienkie obręcze o promieniu r i szerokości dr .

Moment bezwładności takiego pierścienia:

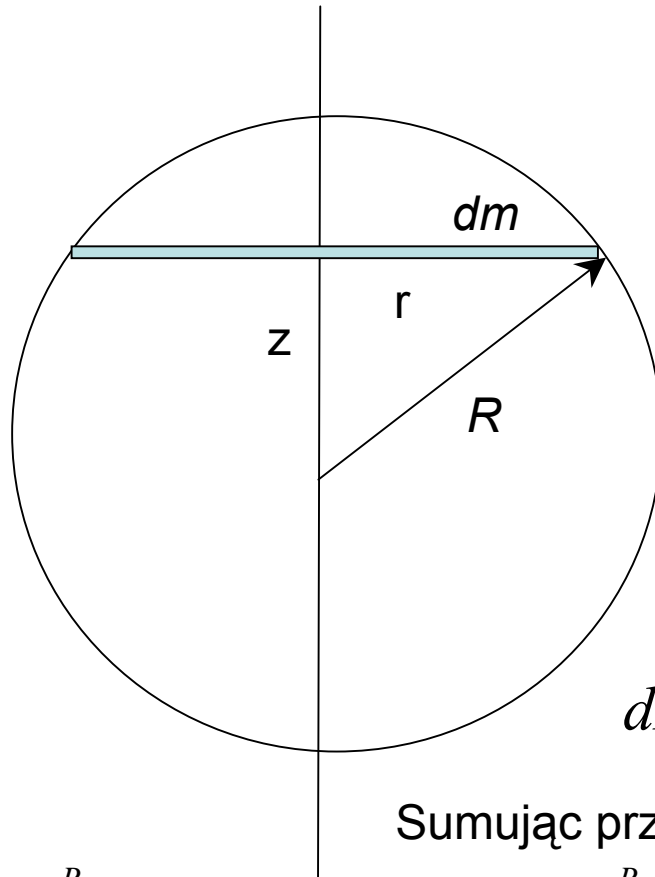
$$dI = dm r^2 = 2\pi r \frac{m}{\pi R^2} dr r^2 = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$

Sumując przyczynki od obręczy dla wszystkich r 0 do R dostajemy:

$$I = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{1}{4} (R^4 - 0^4) = \frac{1}{2} mR^2$$



Moment bezwładności kuli



Dzielimy kulę o masie m na cienkie krążki o promieniu r i wysokości dz każdy.

Masa takiego krążka

$$dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi r^2 dz = \frac{3m}{4R^3} r^2 dz$$

Moment bezwładności krążka:

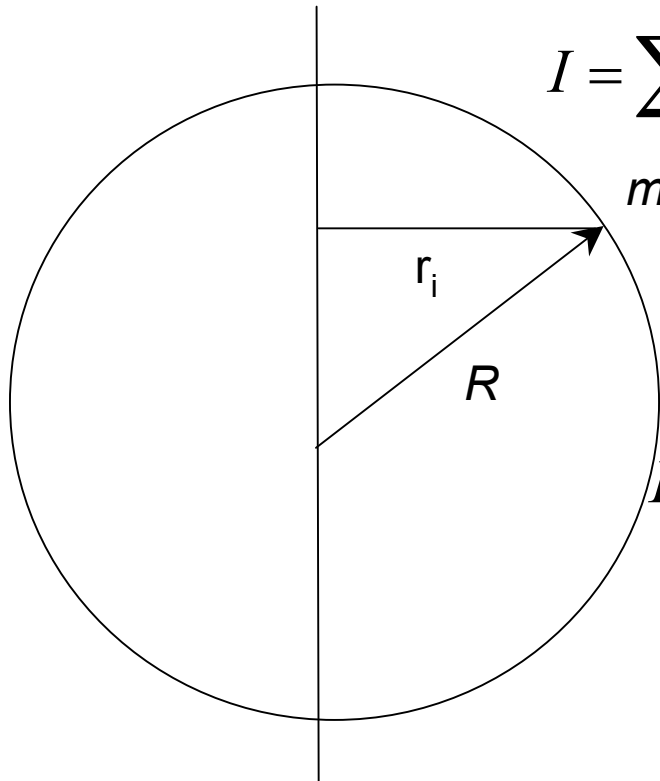
$$dI = \frac{1}{2} \frac{3m}{4R^3} r^4 dz = \frac{3m}{8R^3} (R^2 - z^2)^2 dz$$

Sumując przyczynki od krążków dla różnych z dostajemy :

$$I = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = 2 \frac{3m}{8R^3} \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{3m}{4R^3} \int_0^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz$$

$$I = \frac{3m}{4R^3} (R^4 R - 2R^2 \frac{1}{3} R^3 + \frac{1}{5} R^5) = \frac{3}{4} mR^2 (1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{2}{5} mR^2$$

Moment bezwładności sfery



$$I = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$$

m_i Z symetrii:

$$\sum m_i x_i^2 = \sum m_i y_i^2 = \sum m_i z_i^2$$

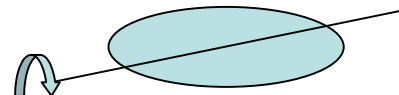
Zatem:

$$I = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = \frac{2}{3} \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

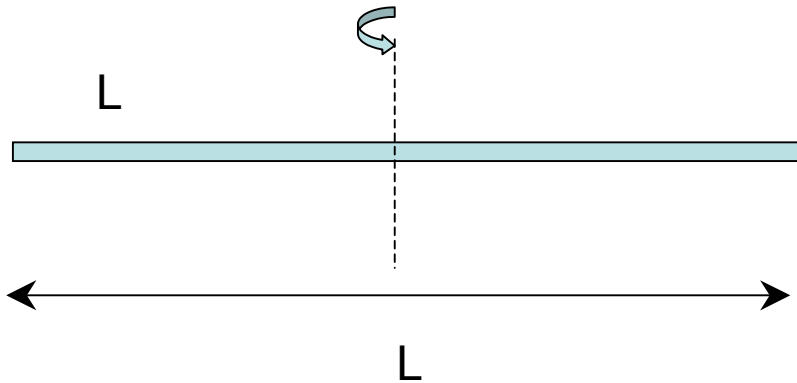
$$\text{Ponieważ: } x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = R^2$$

$$I = \frac{2}{3} R^2 \sum m_i = \frac{2}{3} m R^2$$

Ten sposób można stosować do obliczania momentów bezwładności innych brył, np.. do obliczenia momentu bezwładności krążka względem osi pokrywającej się z jego średnicą, wykorzystując fakt, że znamy moment bezwładności względem osi prostopadłej do jego powierzchni...



Symetria i skalowanie



Moment bezwładności można często wyznaczyć posługując się argumentami skalowania i tw. Steinera

Obliczmy moment bezwładności pręta o masie m i długości L , względem osi prostopadłej przechodzącej przez jego środek ciężkości

Korzystając z analizy wymiarowej dochodzimy do wniosku, że moment ten powinien mieć postać:

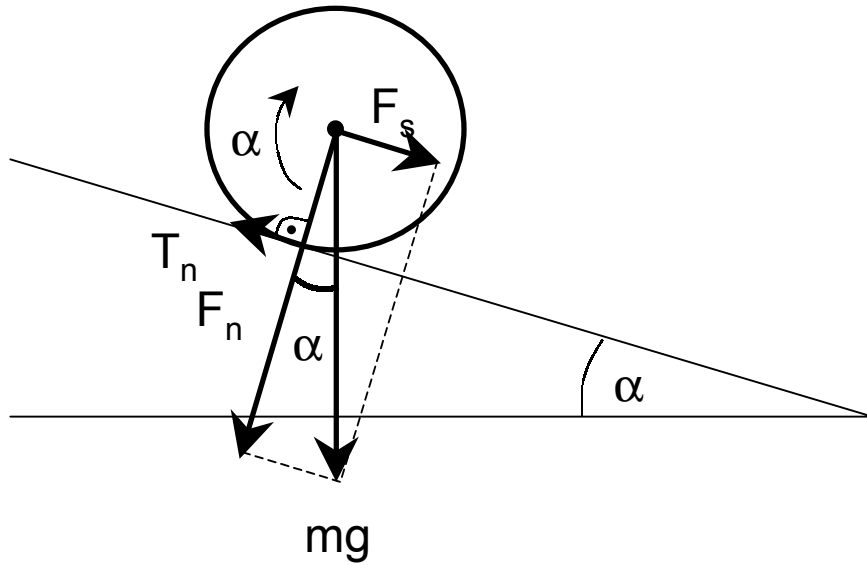
$$I = \alpha mL^2 \quad \alpha - \text{pewien współczynnik bezwymiarowy}$$

Podzielmy w myśli pręt na dwie równe części i obliczmy (korzystając z tw. Steinera) ich sumaryczny moment bezwładności względem środka pręta:

$$I_1 = 2 \left[\alpha \frac{m}{2} \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right] = \alpha \frac{mL^2}{4} + \frac{mL^2}{16}$$

$$\text{Ale } I = I_1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha mL^2 = \alpha \frac{mL^2}{4} + \frac{mL^2}{16} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{1}{12} mL^2$$

Toczenie bez poślizgu...



...jako obrót względem chwilowej osi obrotu

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M \quad I\varepsilon = M$$

$$M = R_{\perp} F = R F_{\perp} = mgR \sin(\alpha)$$



$$\varepsilon = \frac{mgR \sin(\alpha)}{I}$$

toczenie bez poślizgu to

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{mR^2}{I} g \sin(\alpha)$$

I – moment bezwładności względem chwilowej osi obrotu

Z tw. Steinera

$$I = I_s + mR^2 \quad \longrightarrow$$

$$I = \frac{3}{2} mR^2$$

dla walca

Obręcz toczy się wolniej!

I_s – moment bezwładności
Względem środka masy

$$I = 2mR^2$$

dla obręczy

Toczenie jako złożenie ruchu obrotowego i postępowego...

$$\begin{cases} ma = mg \sin(\alpha) - T & \leftarrow \text{ruch postępowy} \\ I\varepsilon = TR & \leftarrow \text{ruch obrotowy względem środka masy} \end{cases}$$

toczenie bez poślizgu $\varepsilon = \frac{a}{R}$

$$\begin{cases} ma = mg \sin(\alpha) - T \\ T = \frac{I_s}{R^2} a \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{mR^2}{I_s + mR^2} g \sin(\alpha) \\ T = \frac{I_s}{R^2} a \end{cases}$$

Walec

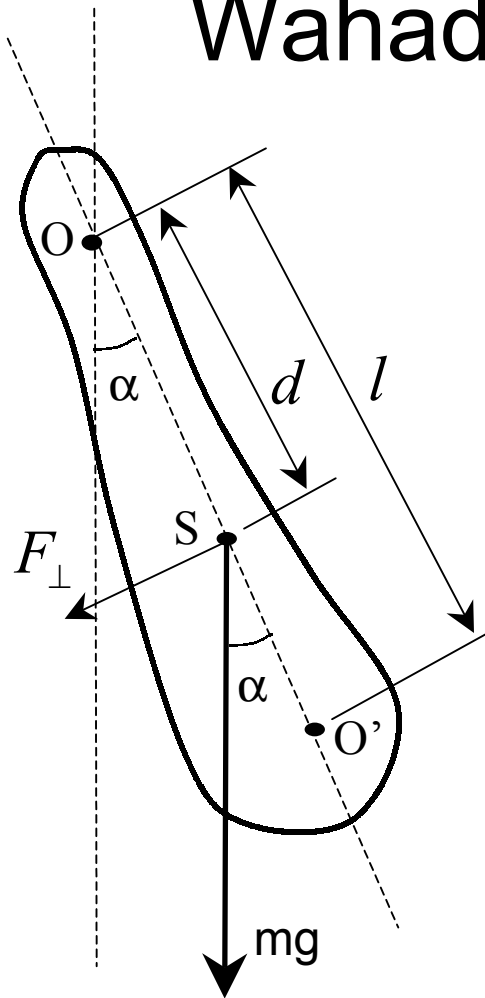
$$\begin{cases} a = \frac{2}{3} g \sin(\alpha) \\ T = \frac{1}{3} mg \sin(\alpha) \end{cases}$$

Obręcz

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} g \sin(\alpha) \\ T = \frac{1}{2} mg \sin(\alpha) \end{cases}$$

Żeby toczenie odbywało się bez poślizgu, siła tarcia musi mieć odpowiednią wartość! Zwiększając kąt α przy danym współczynniku tarcia f można doprowadzić do poślizgu... Wtedy siła tarcia przyjmuje maks. wartość $T_{max} = fmg \cos(\alpha)$

Wahadło fizyczne



O – punkt zawieszenia wahadła
 d - odległość od punktu zawieszenia do
środkła masy
 I – moment bezwładności względem O

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M \quad M = -F_{\perp} d$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} \sin(\alpha)$$

Dla małych kątów α :

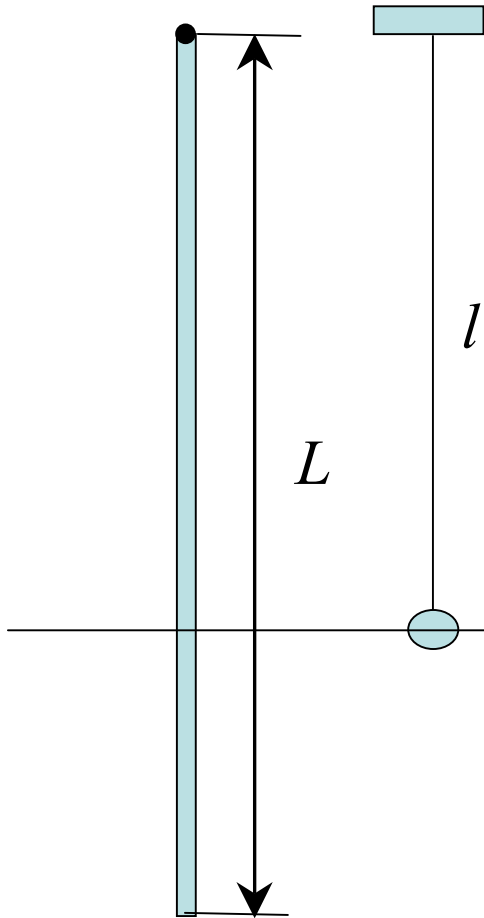
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \alpha = 0$$

Równanie oscylatora harmonicznego

Częstość drgań $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$

Okres drgań $T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I}{mgd}}$

Długość zredukowana dla pręta zawieszonoego na jednym z końców



$$T_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

$$I = \frac{1}{3} mL^2 \quad d = \frac{L}{2}$$

$$T_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

okres wahań pręta

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

okres wahadła matematycznego



$$l = \frac{2}{3} L$$

Zawieszając obok siebie pręt i kulkę na nitce o długości $\frac{2}{3} L$ można się przekonać, że okresy ich drgań są równe...

Wahadło rewersyjne

Jaką długość l musi mieć wahadło matematyczne, aby miało okres identyczny z wahadłem fizycznym?

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I}{mgd}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \longrightarrow \quad l = \frac{I}{md} \quad \text{długość zredukowana wahadła fizycznego}$$

Jaki okres będzie miało wahadło fizyczne jeśli zawiesimy je w punkcie O' odległym o l od punktu O ?

$$T' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I'}{mg(l-d)}} \quad \begin{array}{l} I' - \text{moment bezwładności względem } O' \\ \text{z twierdzenia Steinera:} \\ I' = I_s + m(l-d)^2 \quad I = I_s + md^2 \end{array}$$

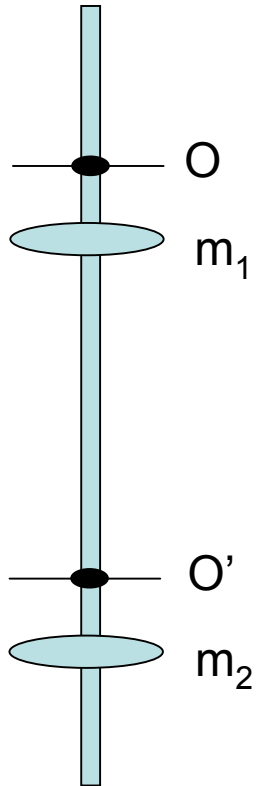
Czyli: $I_s = I - md^2 = lmd - md^2 = md(l-d)$

$$I' = md(l-d) + m(l-d)^2 = m(l-d)l$$

Zatem:

$$T' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m(l-d)l}{mg(l-d)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{g}} = T$$

Wahadło rewersyjne



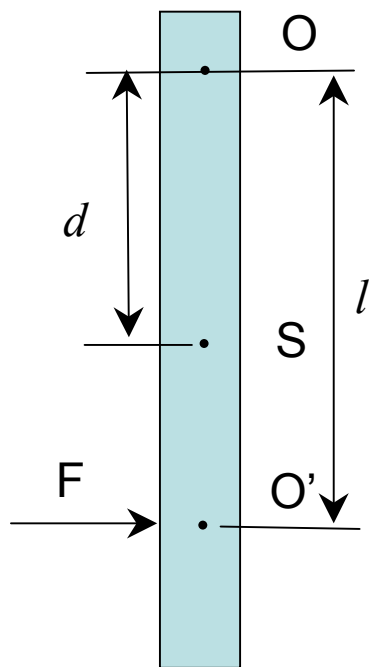
Wahadło składa się z pręta zaopatrzonego w dwie stałe osie pryzmatyczne O i O' (osie pryzmatów zwrócone do środka)

Przesuwając masy m_1 oraz m_2 można zmienić położenie środka ciężkości wahadła. Masy przesuwamy dopóty, dopóki okresy wahań wokół osi O i O' nie zrównają się, wtedy odległość OO' będzie odpowiadała długości wahadła fizycznego l . Znając odległość $OO' = l$ oraz okres drgań T można wyznaczyć przyspieszenie ziemskie, tak jak zrobił to H. Kater w 1818 r...

$$g = \frac{l}{4\pi^2 T^2}$$

Uderzenie bryły

W jakiej odległości od punktu O należy uderzyć bryłę, aby bryła podczas uderzenia dokonała obrotu wokół punktu O?



Ruch postępowy środka masy:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow Fl = ml \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aby ruch środka masy można było opisać jako obrót wokół punktu O to powinien być spełniony związek:

$$\Delta v = d \Delta \omega$$

d – odległość środka masy od punktu O
 $\Delta \omega$ - przyrost prędkości obrotowej bryły

$$Fl = mld \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

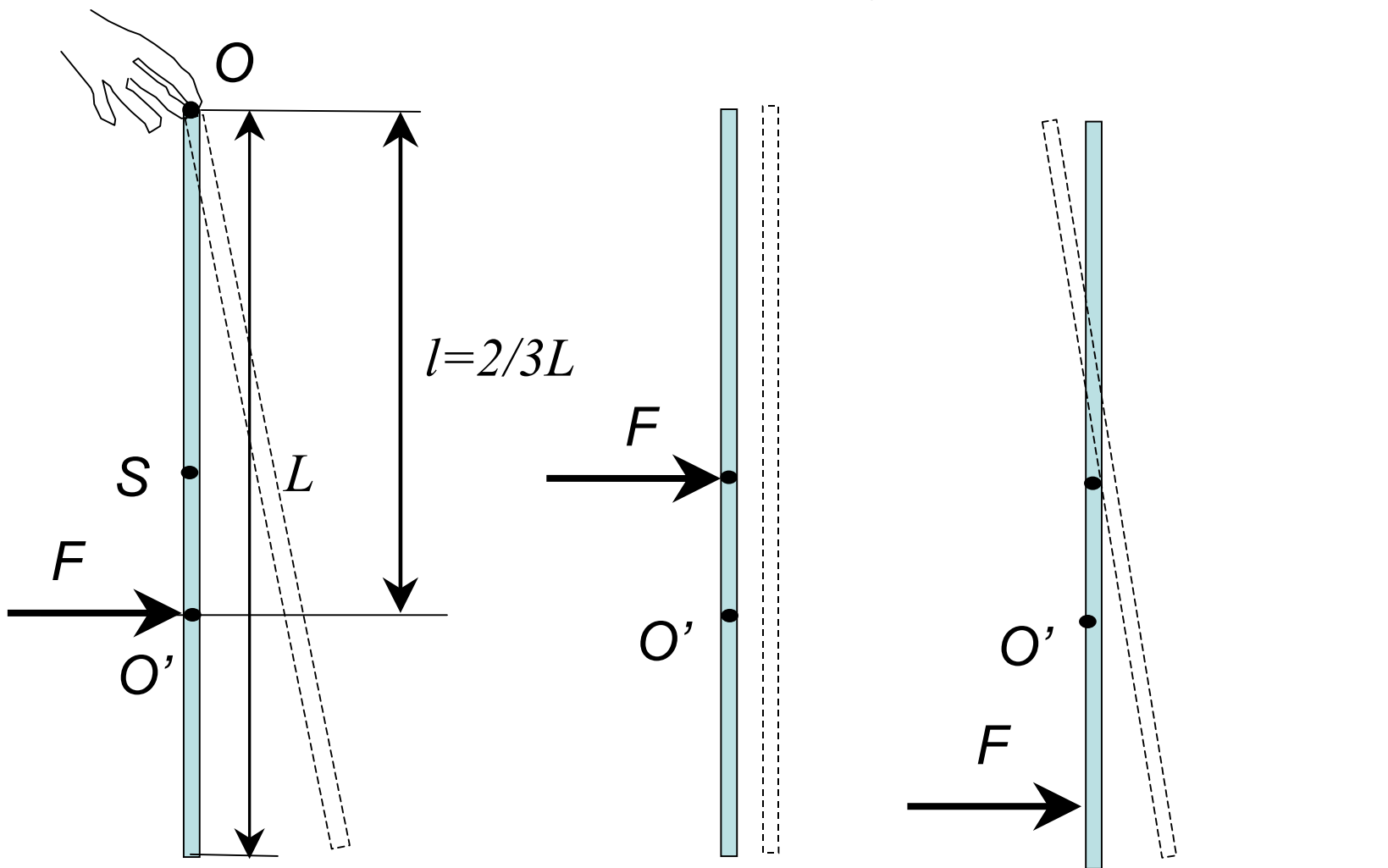
Fl – moment siły F względem punktu O, więc powinno być spełnione dla ruchu obrotowego bryły...
$$Fl = I \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Zatem:

$$l = \frac{I}{md}$$

Czyli bryłę należy uderzyć dokładnie w odległości równej długości zredukowanej wahadła fizycznego...

Uderzenie pręta



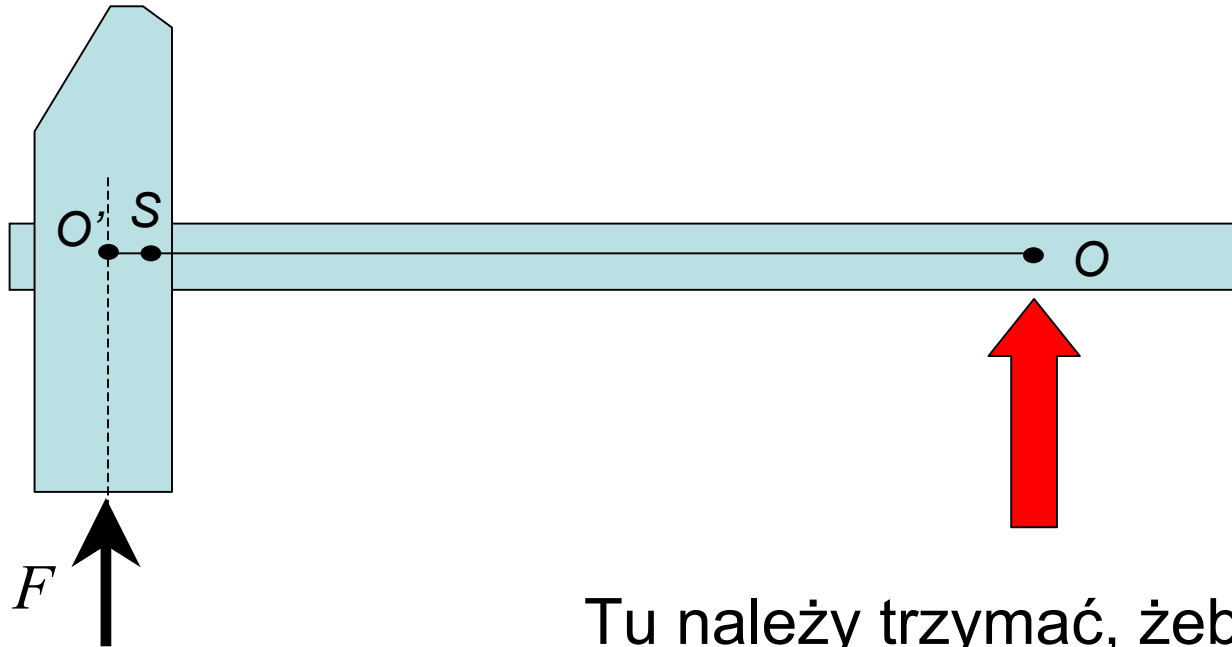
obrót wokół końca

ruch postępowy

koniec pręta się cofa...

O' – środek uderzenia pręta (trzymanego na końcu)

Trzeba uważać gdzie się trzyma młotek...



Tu należy trzymać, żeby nie bolało!