

# Wahadło torsyjne

Równanie ruchu obrotowego krążka

$$I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M$$

$I_0$  – moment bezwładności krążka

$M$  – moment siły

$D$  – moment kierujący

$$M = -D\alpha$$



$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{D}{I_0}\alpha = 0$$

Równanie oscylatora harmonicznego



$$\alpha = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Częstość kołowa

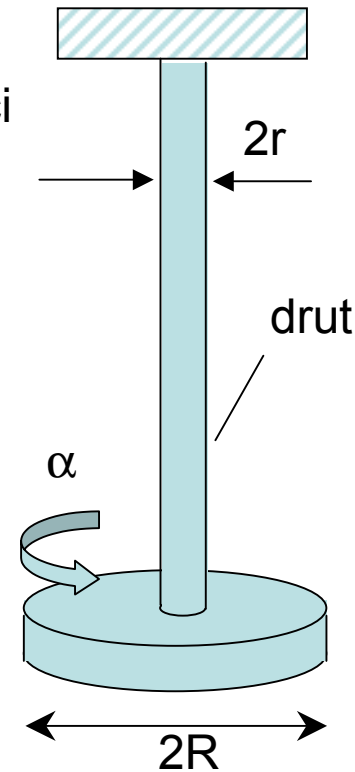
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}$$

Okres drgań

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}$$



- Informacja o momencie bezwładności
- Informacja o własnościach sprężystych drutu



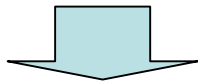
# Wahadło torsyjne

Nowy moment bezwładności  
z tw. Steinera:

$$I_1 = I_0 + 2[m(R - r)^2 + \frac{1}{2}mr^2]$$

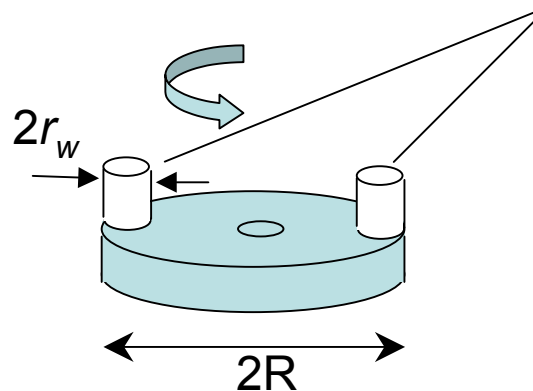
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{D}}$$



Wyznaczając doświadczalnie  $T_0$  oraz  $T_1$   
znajdziemy  $D$  oraz nieznaną moment  
bezwładności  $I_0$

Dwa walce o masie  $m$   
Moment bezwładności  
walca względem osi  
 $I_w = 1/2mr^2$



Podczas drgań wahadła zachodzi odkształcenie drutu polegające na ścinaniu...

# Odształcenia sprężyste

Sprężystość (elastyczność) – własność powodująca, że odkształcone ciało dąży do stanu początkowego.

Dla idealnie sprężystych ciał naprężenia w nich wywoływane są jednoznacznymi funkcjami odkształceń.

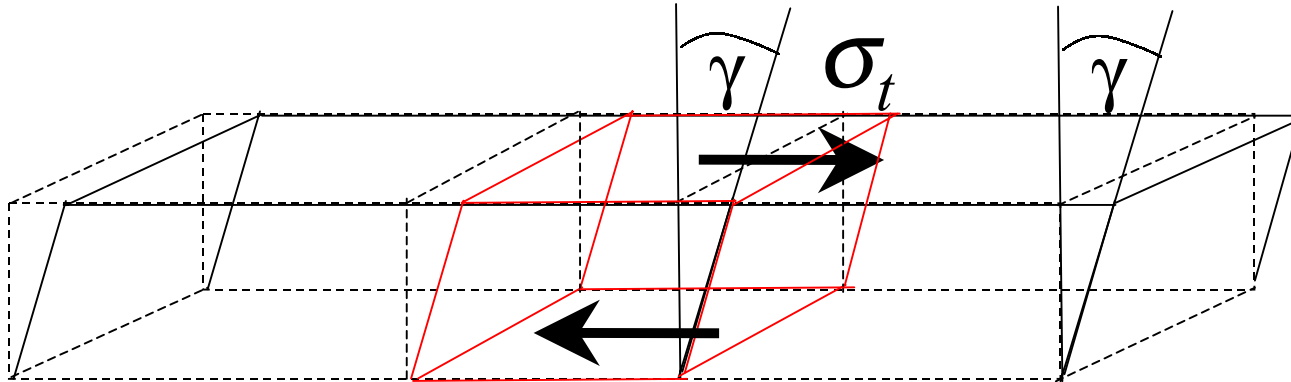
Przy niewielkich odkształceniach własności ciał stałych można opisywać traktując je jak ciała idealnie sprężyste.

Wtedy, jak to wykrył R. Hooke dla prostych odkształceń, odkształcenie jest proporcjonalne do naprężenia.

Ponieważ interesuje nas odkształcenie drutu zajmijmy się najpierw przypadkiem odkształcenia postaci bez zmiany objętości jakim jest tzw. ścinanie...

# Ścinanie

Rozważmy kostkę prostokątną przyklejonej do podłoża\*



Każdy element górnej powierzchni kostki poddany jest naprężeniu stycznemu...

$$\sigma_t = \frac{F}{S}$$

*F* – siła działająca stycznie do górnej powierzchni kostki  
*S* – powierzchnia górnej ścianki kostki

Odształcenie kostki polega przesunięciu górnej ścianki w kierunku naprężenia, bez zmiany kształtu tej ścianki. Ścianka przednia i tylna przyjmują kształt równoległoboków, ścianki boczne pochylają się o kąt  $\gamma$

W tym wypadku prawo Hooke'a ma postać:

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$

*G* – moduł sztywności

\*Aby naprężenia powstające na brzegach nie miały znaczenia wysokość kostki powinna znacznie mniejsza od pozostałych wymiarów

# Skręcanie (ściananie) pręta

Pręt dzielimy na rurki o promieniu  $r$  i grubości  $dr$ .  
Górny koniec rurki jest zamocowany.

Do dolnego końca przykładamy parę sił o tej samej wartości i przeciwnych zwrotach – tworzą one moment skręcający pręt, który równoważą naprężenia ścinające powstałe w przecie.

Każdy element rurki ulega ścinaniu o kąt  $\gamma$

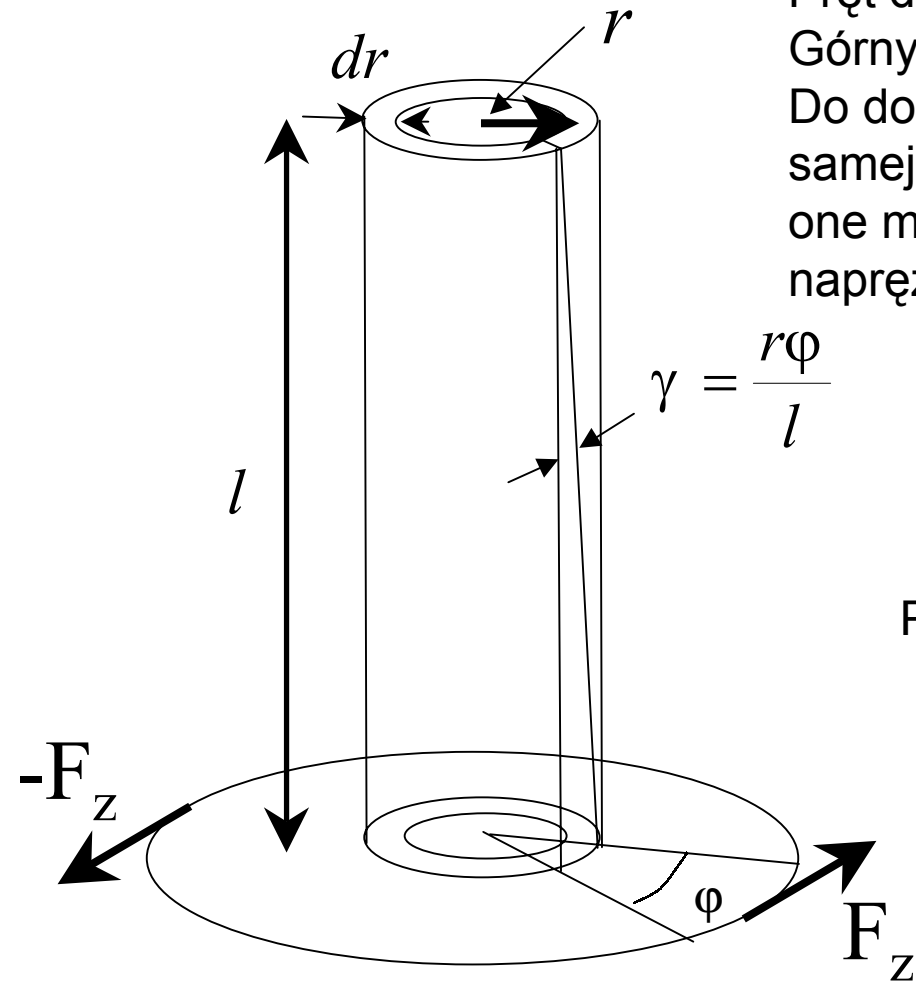
$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G} \quad G - \text{moduł sztywności}$$

Ponieważ

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l} \quad \begin{array}{l} \varphi - \text{kat skrecenia konca} \\ \text{rurki} \\ l - \text{dlugosc rurki} \end{array}$$

Zatem naprężenie ścinające:

$$\sigma_t = \frac{r\varphi}{l} G$$



# Skręcanie pręta

Moment sił sprężystości  
równoważący moment sił zewnętrznych:

$$dM = \Delta F r$$

$$dM = \sigma_t \Delta S r$$

$$dM = \sigma_t 2\pi r dr r$$

$$dM = \frac{r\varphi}{l} G 2\pi r^2 dr$$

$$dM = \frac{2\pi G}{l} \varphi r^3 dr$$

$F$  – siła styczna

$\Delta S$  – powierzchnia  
przekroju rurki

Sumując przyczynki od rurek o różnych promieniach  
dostajemy całkowity moment sił sprężystości równoważący  
moment sił zewnętrznych

$$M = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{G}{l} \frac{\pi R^4}{2} \varphi = D \varphi$$

$$D = \frac{G}{l} \frac{\pi R^4}{2} = \frac{G}{l} J$$

$D$  – moment kierujący

$J$  – geometryczny moment bezwładności

$$J = \iint_S r^2 dS$$

Badając drgania torsyjne wahadła fizycznego możemy wyznaczyć moduł sztywności  $G$  materiału z którego wykonany jest drut...

Materiał	Moduł sztywności GPa	Współczynnik Poissona GPa
guma	$1.6 \cdot 10^{-3}$	0.46-0.49
miedź	40-48	0.35
stal	82	0.29
wolfram	132	0.17
szkło	17-30	0.2-0.3

# Sprężyna

Przy rozciąganiu sprężyny drut, z którego jest ona wykonana ulega skręceniu o kąt  $\varphi$

$$\varphi = \frac{\Delta h}{R_s} \quad R_s - \text{promień sprężyny}$$

(Ta część analizy rozciągania sprężyny wymaga dokładniejszej analizy...)

Skręcenie to wywoła pojawienie się momentu siły:

$$M = \frac{\pi r^4}{2} \frac{G}{l} \varphi \quad \begin{array}{l} r - \text{promień drutu} \\ l - \text{długość drutu} \end{array}$$

Moment sił sprężystości równoważy moment siły zewnętrznej  $F$  przyłożonej dokładnie wzdłuż osi sprężyny

$$M = R_s F$$

Łącząc powyższe wzory i biorąc pod uwagę, że długość drutu sprężyna wynosi  $l = 2\pi N R_s$  (gdzie  $N$  – liczba zwojów sprężyny) dostajemy ostatecznie:

$$F = \frac{Gr^4}{4R_s^3 N} \Delta h \quad F_z = -k\Delta h \quad k = \frac{Gr^4}{4R_s^3 N}$$

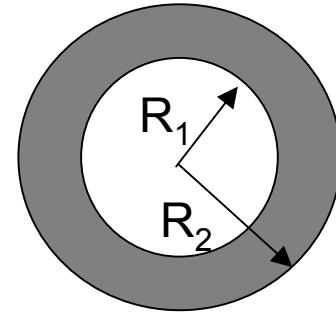


# Skrećanie wałów napędzających maszyny

Moc przekazywana przez wał:

$$P = M\omega$$

Zamiast wałów stosuje się czasem rury...



$$M = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{G}{l} \frac{\pi (R_2^4 - R_1^4)}{2} \varphi = \frac{G}{l} J_r \varphi$$

$$J_r = \frac{\pi (R_2^4 - R_1^4)}{2}$$

Jaki powinien być promień zewnętrzny  $R_2$  rury o promieniu wewnętrznym  $R_1$ , aby dawała ona taki sam moment skręcający jak pręt o promieniu  $R_1$

$$\frac{\pi R_1^4}{2} = \frac{\pi (R_2^4 - R_1^4)}{2}$$

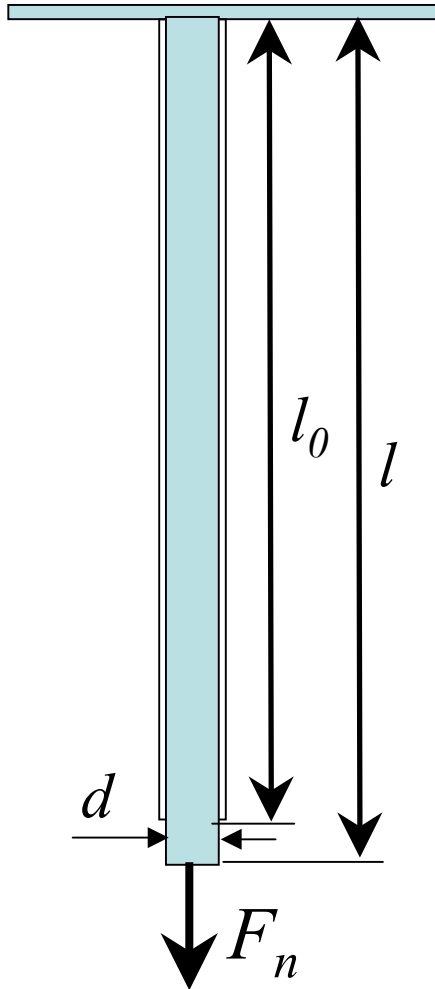


$$R_2 = \sqrt[4]{2} R_1 \cong 1,19 R_1$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\sqrt{2} R_1^2 - R_1^2}{R_1^2} = \sqrt{2} - 1$$

Warto używać pustych wałków!

# Rozciąganie drutu



Wydłużenie względne: 
$$\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$$

Prawo Hooke'a (dla niewielkich odkształceń)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$\sigma$  - naprezenie normalne  
 $E$  - moduł Younga

$$\sigma = \frac{F_n}{S}$$

$$F_n = SE \frac{\Delta l}{l_0}$$

Przewężenie względne:

$$\varepsilon_t = -\frac{\Delta d}{d_0}$$

Dla odkształceń sprężystych:

$$\varepsilon_t = \mu \varepsilon \quad \text{lub}$$

$$\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

$\mu$  - współczynnik Poissona

# Moduł Younga

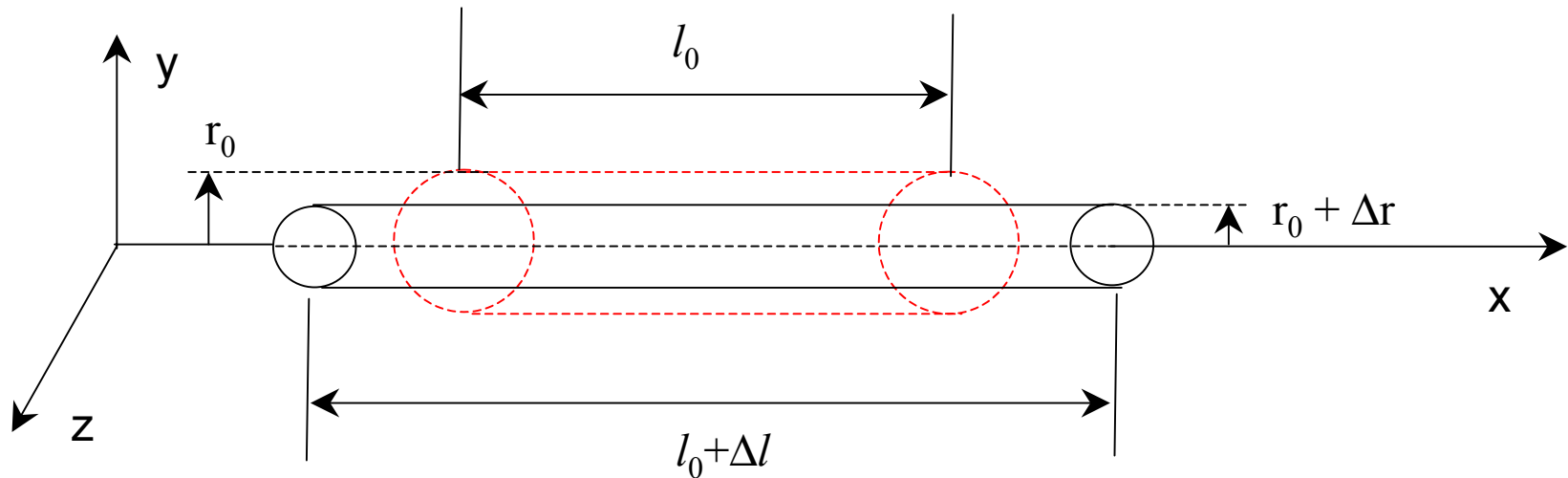
Materiał	Moduł Younga (E) GPa
<b>guma</b>	<b>0,01-0,10</b>
<u>Polietylen</u> (LDPE)	0,2
<u>Polipropylen</u> (PP)	1,5-2,0
Oślonka <u>wirusa</u>	1-3
<u>Poli(tereftalan etylenu)</u> (PET)	2,0-2,5
<u>Polistyren</u> (PS)	3,0-3,5
<u>Nylon</u>	<b>2-4</b>
<u>Drewno dębowe</u> (wzdłuż włókien)	11
<u>Beton</u> wysokiej wytrzymałości (ściskany)	30
<u>Magnez</u> (Mg)	45
Stop <u>glinu</u> ( <u>aluminium</u> ) (Al)	69
<u>Szkło</u> ( <u>SiO<sub>2</sub></u> , <u>Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub></u> , <u>CaCO<sub>3</sub></u> )	72

Materiał	Moduł Younga (E) GPa
<u>Szkło</u> ( <u>SiO<sub>2</sub></u> , <u>Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub></u> , <u>CaCO<sub>3</sub></u> )	72
<u>Mosiądz</u> ( <u>Cu</u> , <u>Zn</u> ) i <u>Braz</u> ( <u>Cu</u> , <u>Sn</u> )	103-124
<u>Tytan</u> (Ti)	105-120
<u>Kompozyt z włókna węglowego</u>	150
<u>Żelazo kute</u> i <u>stal</u>	<b>190-210</b>
<u>Wolfram</u> (W)	400-410
<u>Węglik krzemu</u> (SiC)	450
<u>Węglik tytanu</u> (TiC)	450-650
<u>Miedź</u>	100-115
<u>Cynk</u>	84
<u>Ołów</u>	16
<u>Cyna</u>	47
<u>Nanorurka</u> <sup>[1]</sup>	<b>&gt;1 000</b>
<u>Diamant</u> (C)	<b>1 050-1 200</b>

# Współczynnik Poissona

Material	$\mu$
Guma	0,46-0,49
Ołów	0,45
Aluminium	0,34
Stal	0,29
Szkło	0,2-0,3
Kwarc	0,2
Wolfram	0,17

# Zmiana objętości pręta przy rozciąganiu



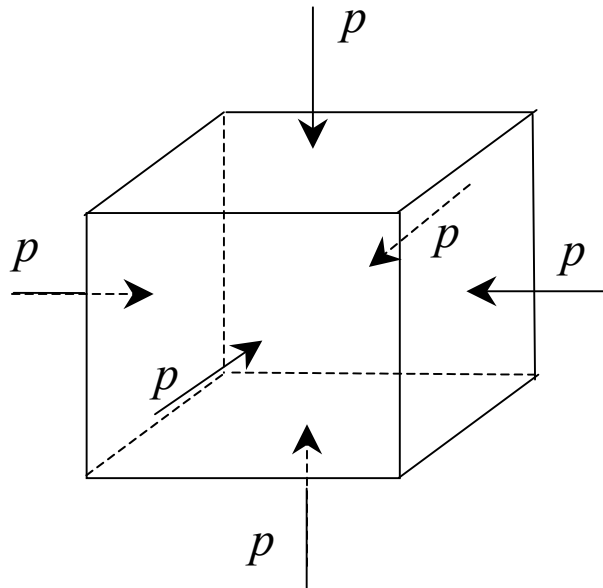
Zmiana objętości przy rozciąganiu:

$$\begin{aligned}\Delta V &= \pi(r_0 + \Delta r)^2(l_0 + \Delta l) - \pi r_0^2 l_0 = \\ &\approx \pi r_0^2 l_0 \left( \frac{\Delta l}{l_0} + 2 \frac{\Delta r}{r_0} \right) = V_0 \left( \frac{\sigma}{E} - 2\mu \frac{\sigma}{E} \right) = V_0 \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)\end{aligned}$$

Doświadczenie pokazuje, że  $\Delta V/V \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \mu \leq 1/2$

# Odształcenie objętości

Względna zmiana objętości:



$$\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = -\kappa p$$

$$K = \frac{1}{\kappa}$$

$p$  – ciśnienie

$\kappa$  – współczynnik scisliwosci

$K$  – modul scisliwosci

Doświadczenie myślowe:

- każda z krawędzi ulega skróceniu o czynnik

$$(1 - p/E)$$

- jednocześnie w wyniku działania ciśnienia

w kierunku poprzecznym poissonowskim

w stosunku  $(1 + \mu p/E)(1 + \mu p/E)$

$$\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

Długość krawędzi po deformacji:

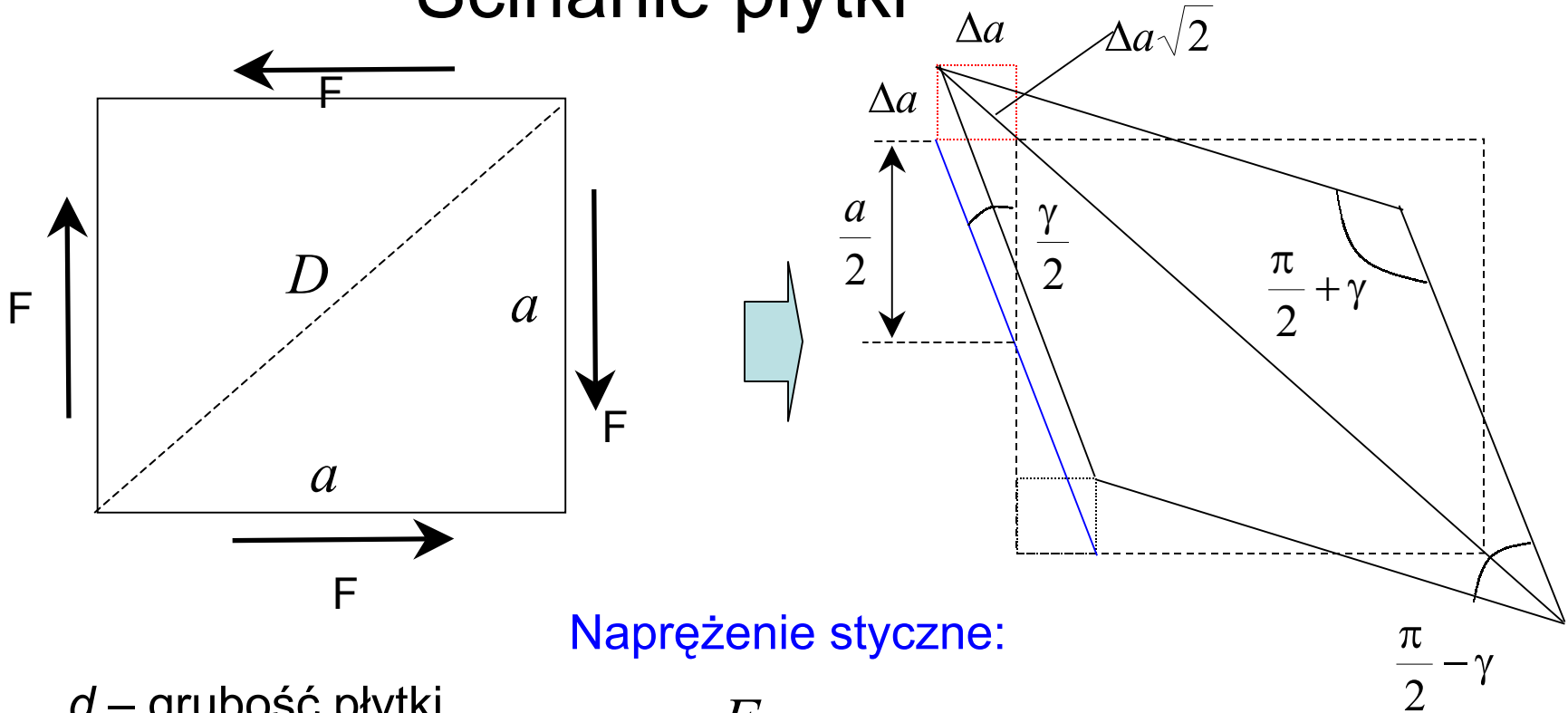
$$l = l_0 (1 - p/E) (1 + \mu p/E)^2$$

$$V = l_0^3 \left(1 - \frac{p}{E}\right)^3 \left(1 + \frac{\mu p}{E}\right)^6 \cong V_0 \left(1 - 3 \frac{p}{E}\right) \left(1 + 6 \frac{\mu p}{E}\right) \cong V_0 \left(1 - \frac{3(1 - 2\mu)}{E} p\right)$$

$$-\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} p$$

$$\kappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \text{ lub } K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

# Ścinanie płytki



$d$  – grubość płytki

Naprężenie styczne:

$$\sigma_t = \frac{F}{ad}$$

Naprężenie normalne:

$$\sigma_n = \frac{F\sqrt{2}}{ad\sqrt{2}} = \frac{F}{ad} = \sigma_t$$

Naprężenia normalne rozciąga przekątną

Zmiana kąta pomiędzy bokami

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$

$G$  – moduł sztywności

$$2\Delta D = 2\Delta a\sqrt{2}$$

Zmiana długości przekątnej:  
- rozciąganie „podłużne”  
- rozciąganie poissonowskie

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2} = \frac{\Delta a}{a/2} = \frac{2\Delta a}{a}$$



$$2\Delta D = \frac{\sigma_n}{E} D + \mu \frac{\sigma_n}{E} D = \frac{1+\mu}{E} \sigma_n D$$

$$\frac{2\Delta a}{a} = \frac{\sigma_t}{2G}$$

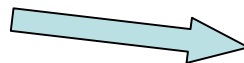


$$2\Delta a\sqrt{2} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_t a\sqrt{2}$$

$$\frac{\sigma_t}{2G} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_t$$



$$\frac{2\Delta a}{a} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_t$$



$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$



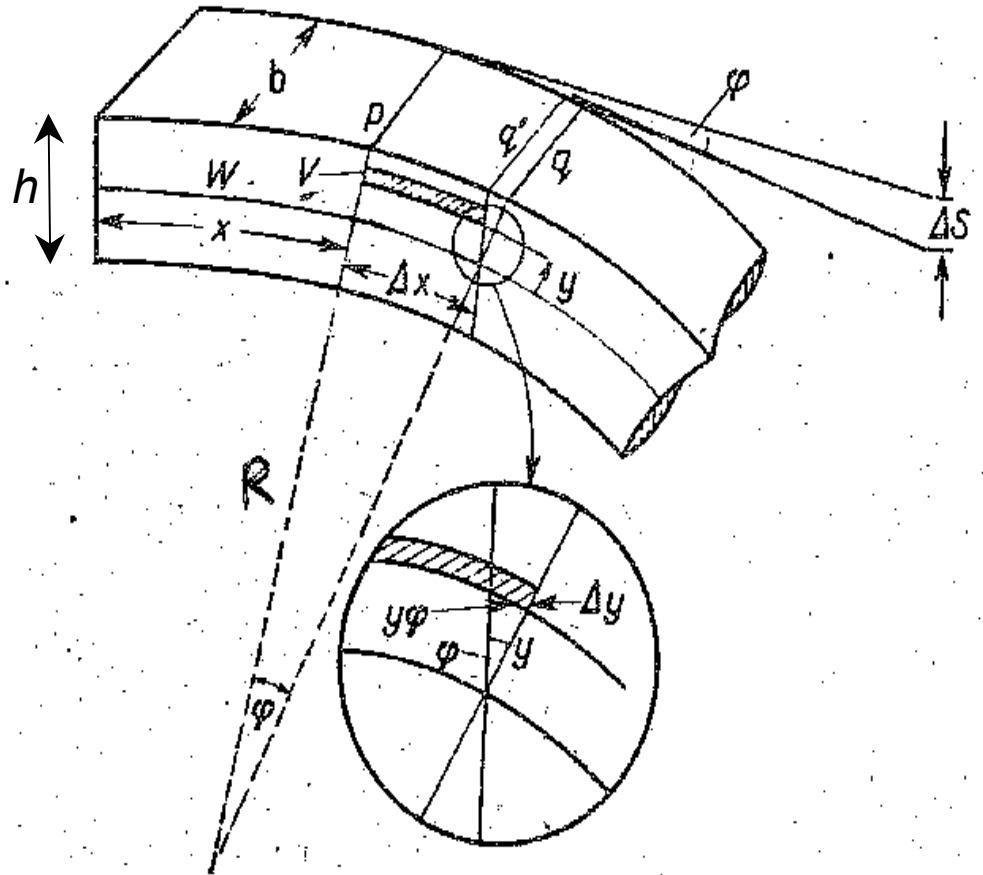
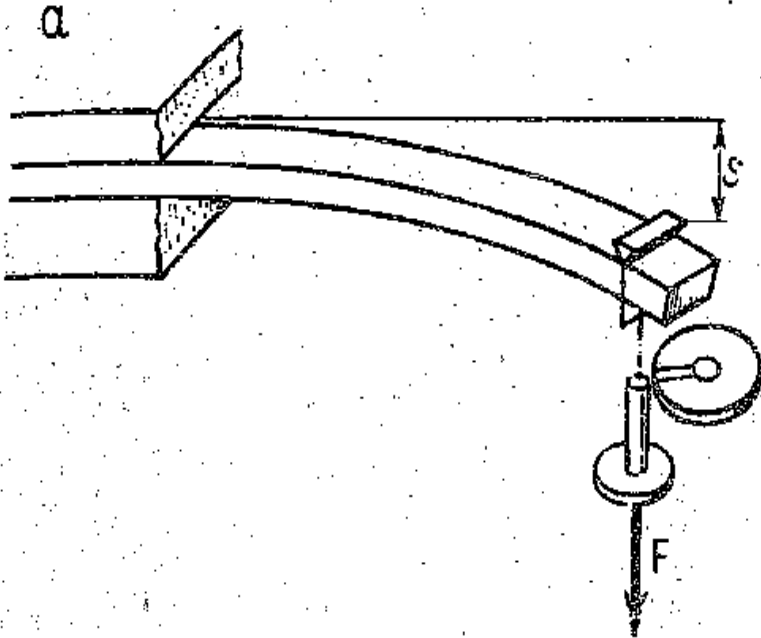
$G$  mniejsze niż  $E$  (od  $1/3$  do  $1/2 E$ )

ograniczenie na wsp. Poissona

$$\mu > -1$$



# Zginanie belki



- przed odkształceniem przekroje  $p$ ,  $q$  były równoległe (odległe od punktu zamocowania o  $x$ ,  $x + \Delta x$ )
- po ugięciu przekroje tworzą kąt  $\varphi$
- warstwa  $V$  znajdująca się w odległości  $y$  od warstwy  $W$  (neutralnej) wydłuża się o  $\varphi y$
- element belki o długości  $\Delta x$  i grubości  $\Delta y$  i szerokości  $b$  jest odkształcany pod wpływem siły  $F_n = \sigma \Delta S$

$$\Delta F_n = \sigma \Delta S = E \varepsilon \Delta S$$

Powierzchnia elementu  $V$ :

$$\Delta S = b \Delta y$$

Wydluzenie wzgledne (rysunek):  $\varepsilon = \frac{\varphi y}{\Delta x}$

Stad: 
$$\Delta F_n = E \frac{\varphi y}{\Delta x} b \Delta y$$

Moment tej sily wzgledem warstwy  $W$

$$\Delta M = y \Delta F_n = E \frac{\varphi}{\Delta x} b y^2 \Delta y$$

Sumujac przyczynki od wszystkich warstw mamy:

$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = E \frac{\varphi}{\Delta x} J$$

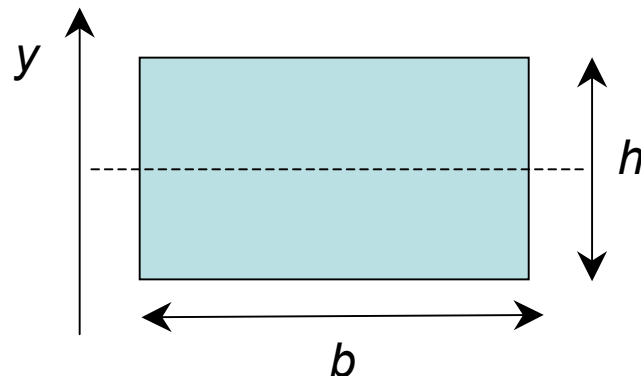
gdzie geometryczny moment  
bezwladnosci

(element powierzchni zamiast masy)

$$J = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy \equiv \int_s y^2 dS$$

Dla belki o przekroju prostokątnym (zginanej prostopadle do  $h$ )

$$J = \frac{1}{12}bh^3$$



Moment sił sprężystości  
wytworzony w elemencie belki o  
długości  $\Delta x$  :

$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} J \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{M}{EJ} \Delta x$$

Belkę odkształca moment siły  
zewnętrznej  $F$

$$M = (l - x)F \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{F}{EJ} (l - x) \Delta x$$

Ponieważ pomiędzy stycznymi do belki w punktach  $p$ ,  $q$  wynosi  $\varphi$ , to  
przyczynek  $\Delta S$  do ugięcia belki wyniesie:

$$\Delta S = \varphi (l - x) \quad \longrightarrow \quad \Delta S = \frac{F}{EJ} (l - x)^2 \Delta x$$

Sumując ugięcia od wszystkich przyczynków  $\Delta x$  dostajemy:

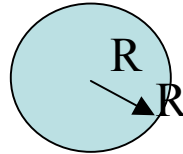
$$S = \frac{F}{EJ} \int_0^l (l-x)^2 dx = \frac{1}{3} \frac{F}{EJ} l^3$$

Dla belki o przekroju prostokątnym:

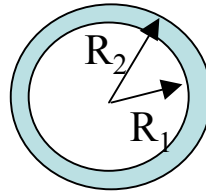
$$S = \frac{4}{bh^3} \frac{l^3}{EJ} F$$

Ugięcie zależy od kształtu przekroju!

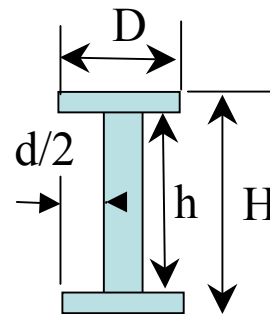
$$J_p = \frac{\pi}{4} R^4$$



$$J_r = \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$



$$J_t = \frac{1}{12} (DH^3 - 2dh^3)$$

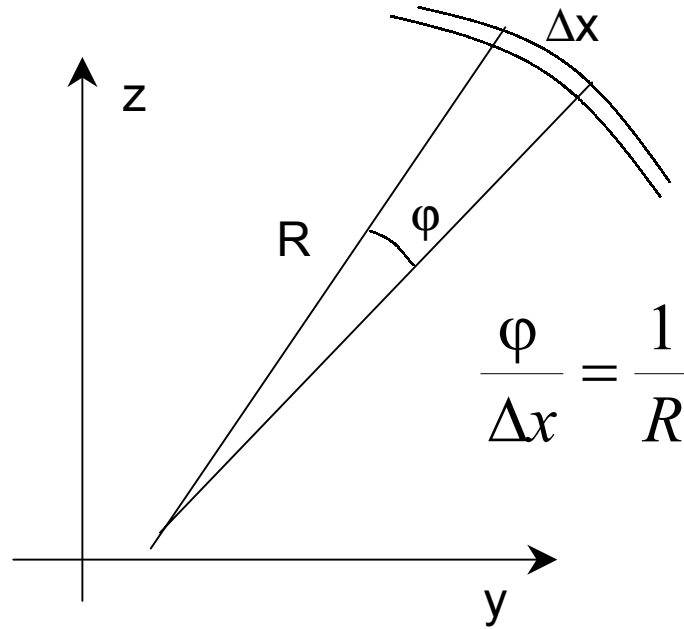


Im większy moment Geometryczny, tym trudniej zginać!  
Materiał powinien być więc jak najdalej od osi zginania.  
Puste w środku wytrzymalsze?  
**Mosty, konstrukcje i kości...**

Moment sily jeszcze raz...

$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} J$$

$$M(x) = \frac{EJ}{R(x)}$$



Promień krzywizny

$$\frac{\varphi}{\Delta x} = \frac{1}{R}$$

Z matematyki wiadomo, że krzywizna

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Dla małych ugięć:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$M(x) = EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \text{równanie na kształt belki}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{F}{EJ} (l - x) \quad \text{dla } x = 0 \quad z = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Strzałka ujęcia belki zamocowanej na jednym z końców

$$z(l) = \frac{1}{3} \frac{F}{EJ} l^3$$

# Mikroskop AFM

mikroskop  
optyczny  
z kamerą

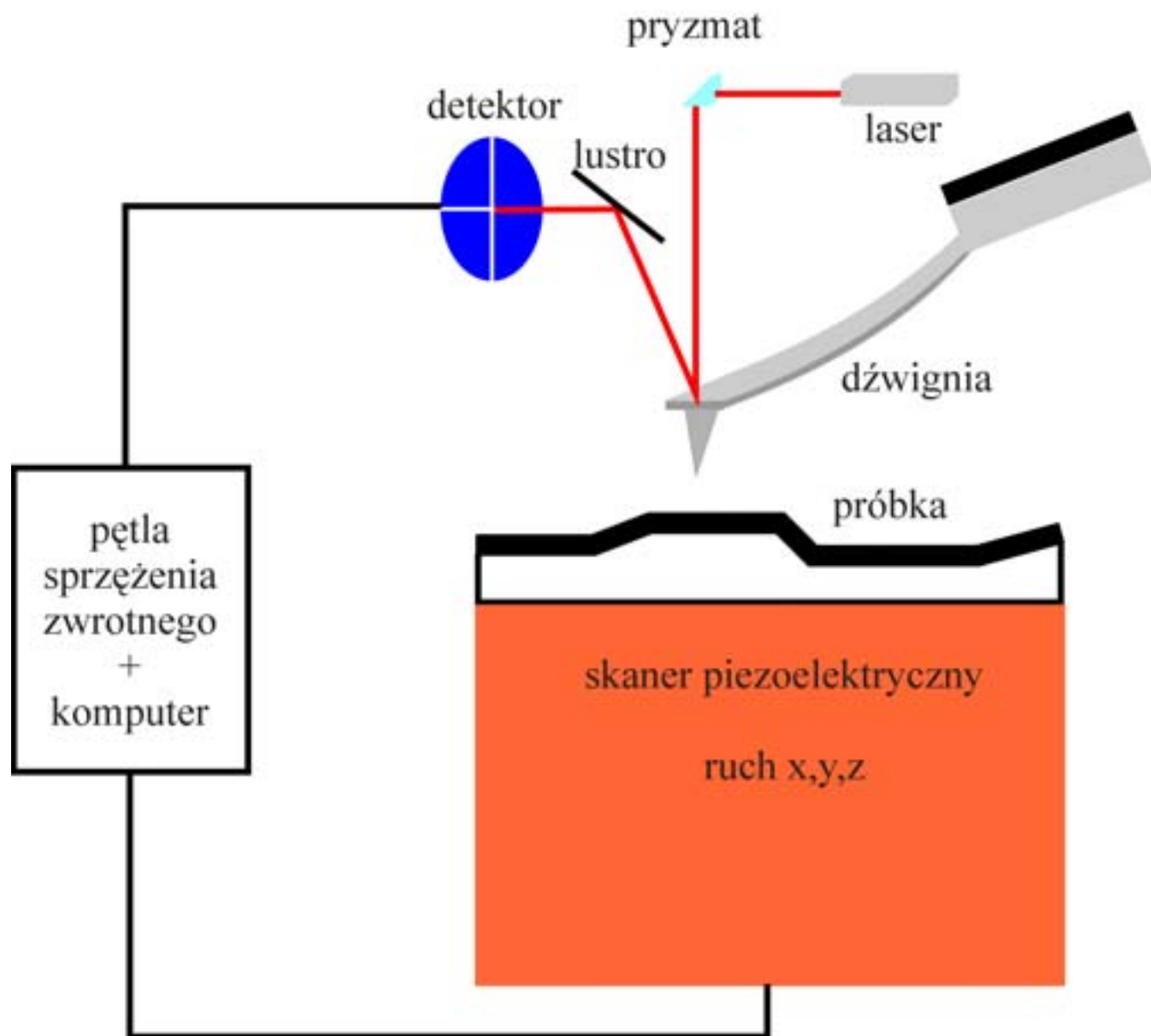
AFM  
~25cm

podstawa



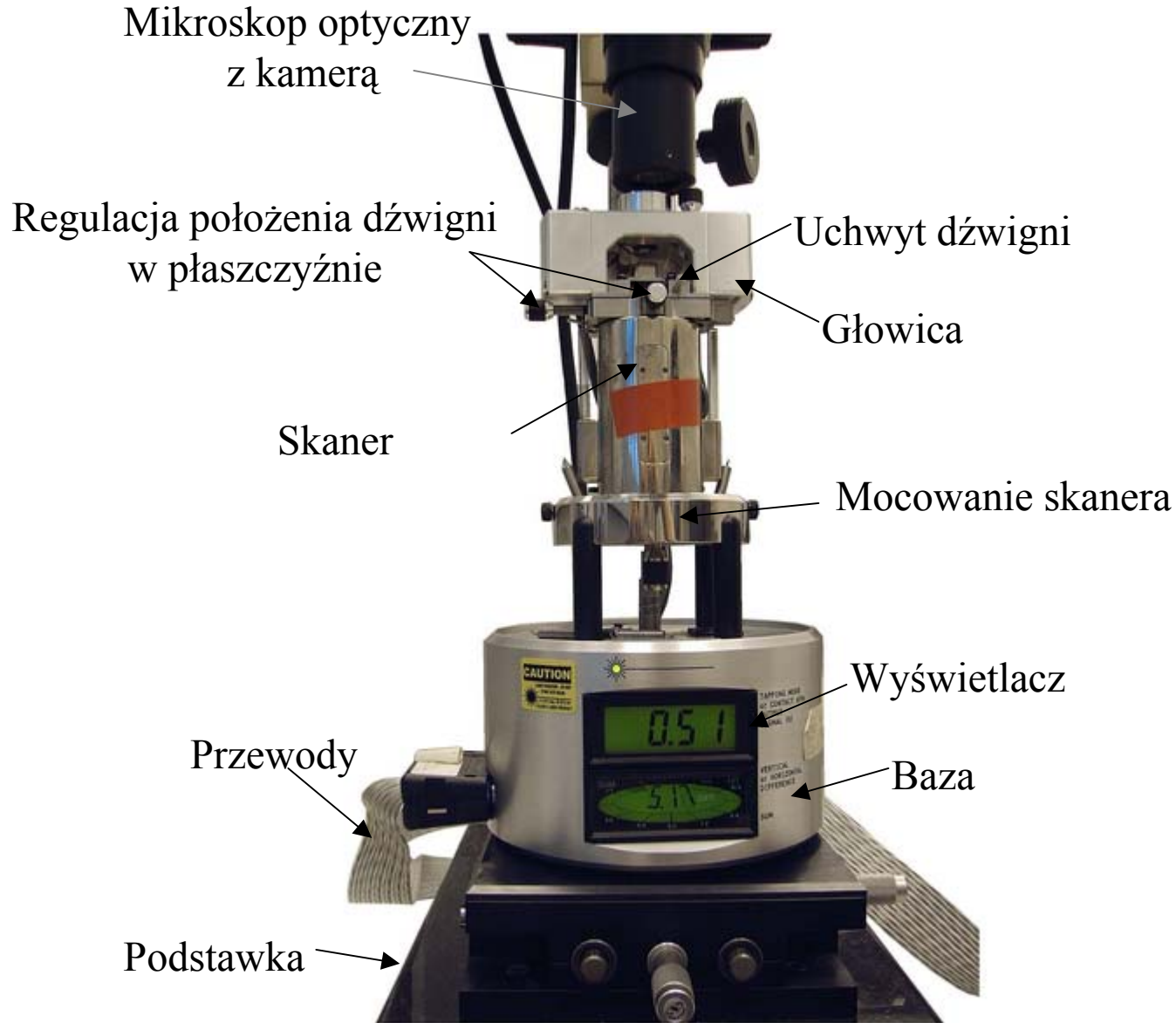
MultiMode AFM  
+Nanoscope IIIa  
Digital Instruments  
(obecnie Veeco)

# ZASADA DZIAŁANIA MIKROSKOPU SIŁ ATOMOWYCH

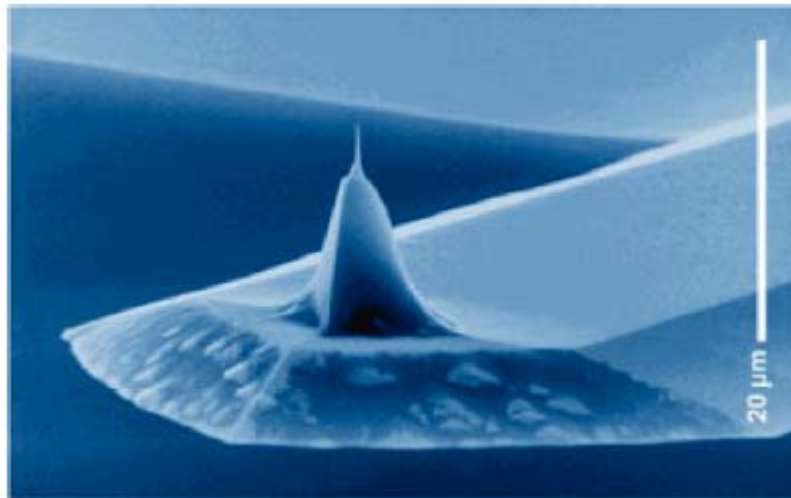
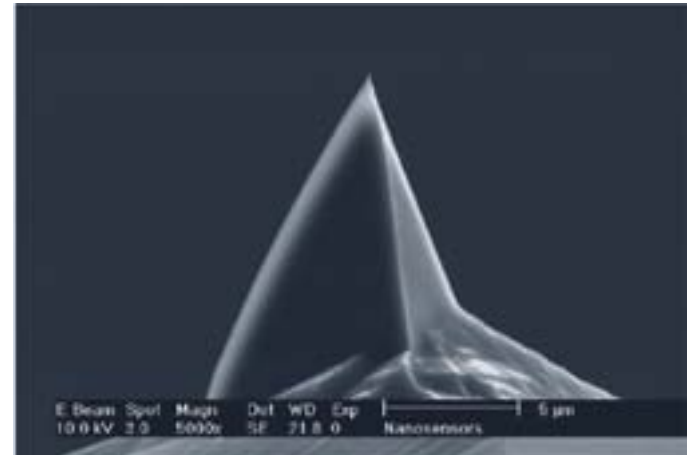
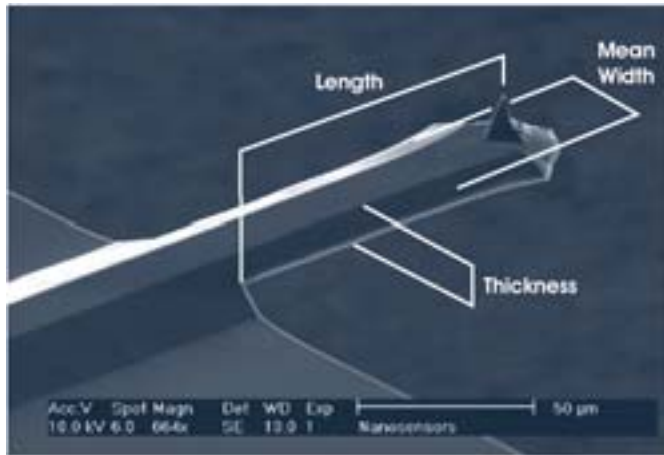




# Budowa mikroskopu AFM: ruchoma próbka

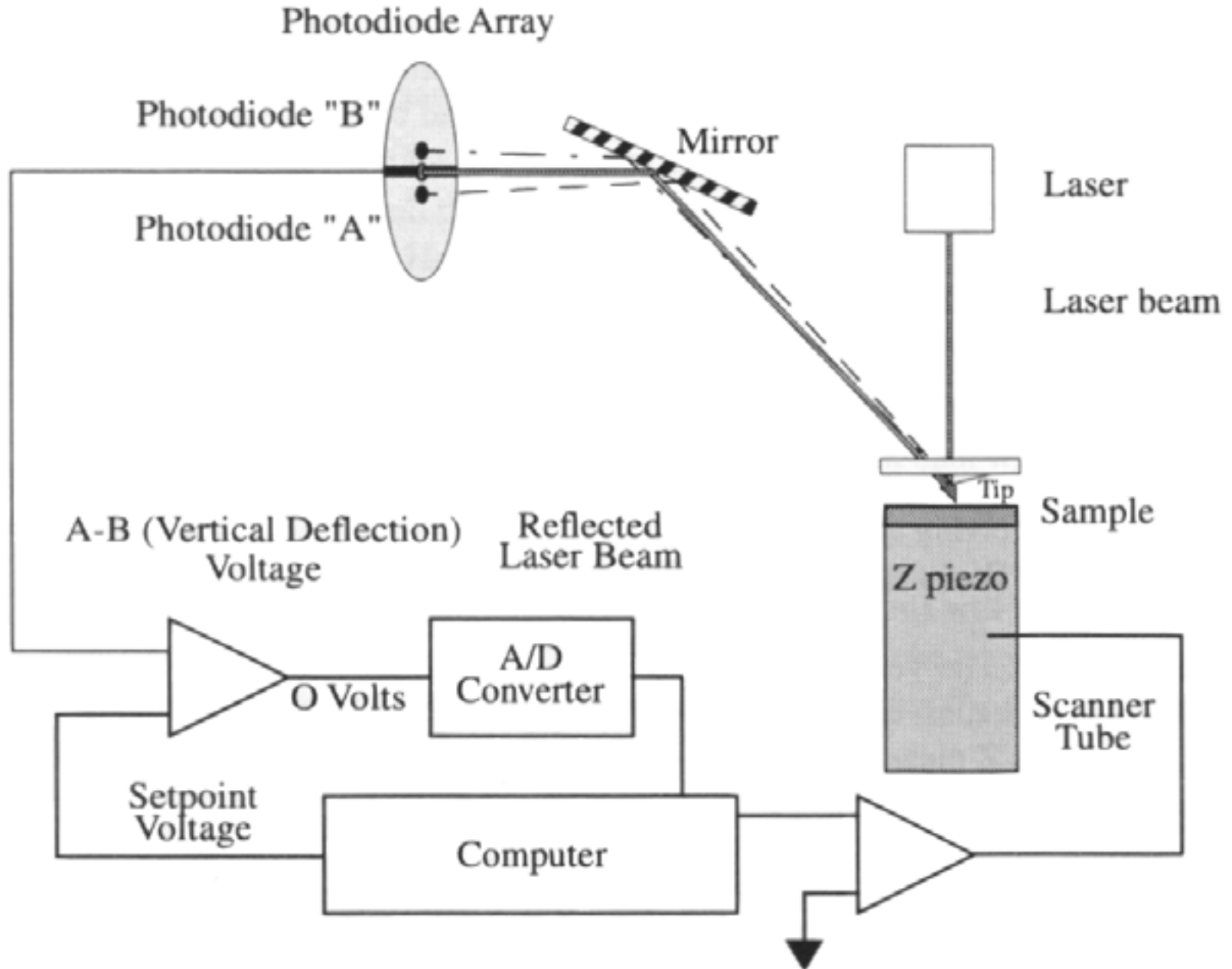


# Dźwignia „tapping mode”

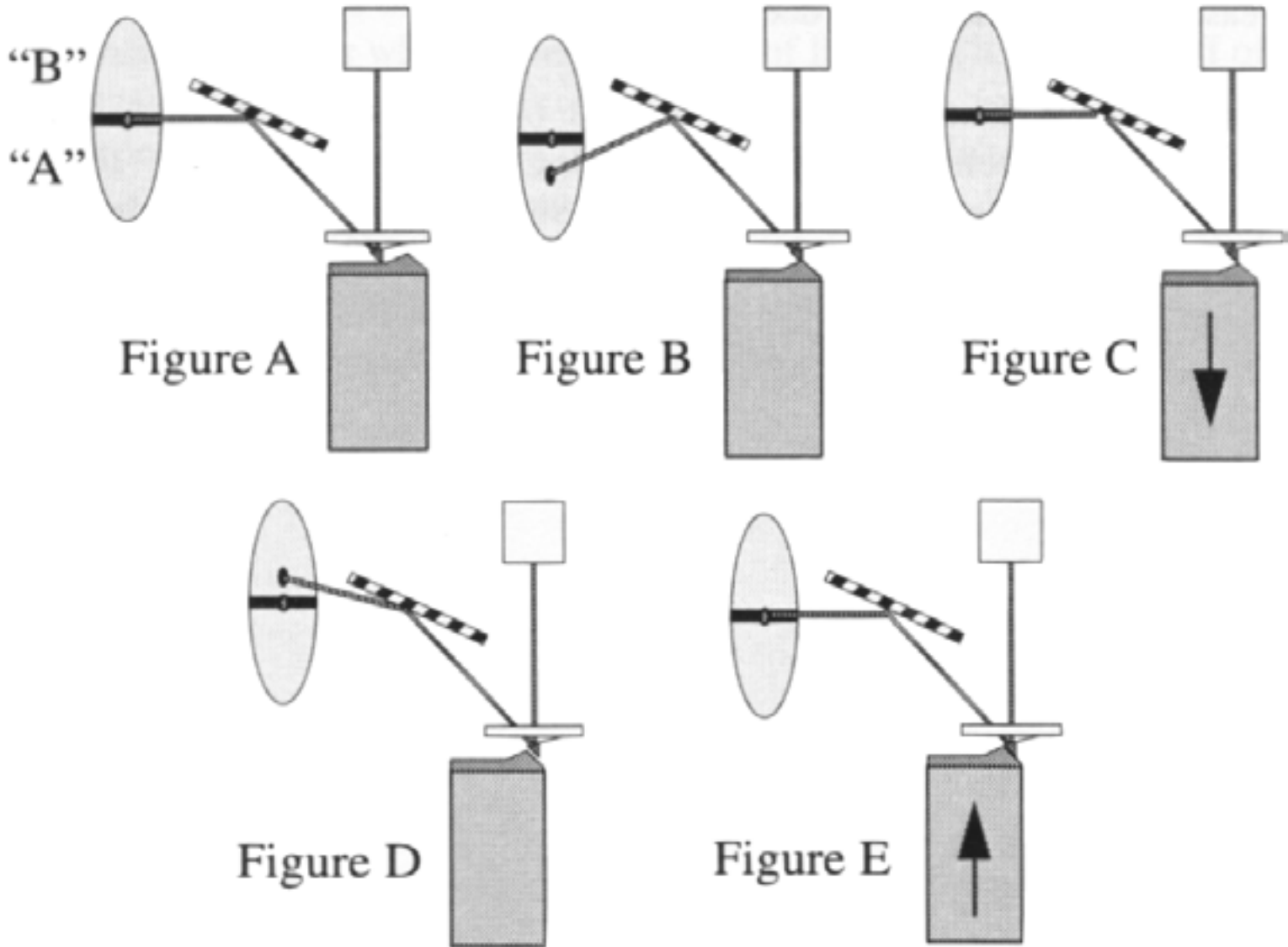


<b>Długość</b>	<b>125 µm</b>
<b>Szerokość</b>	<b>30 µm</b>
<b>Grubość</b>	<b>3 µm</b>
<b>Wysokość</b>	<b>10 µm</b>
<b>Stała sprężystości</b>	<b>100 N/m</b>
<b>Częstość rezonansowa</b>	<b>~300 kHz</b>
<b>Promień krzywizny</b>	<b>10 nm</b>
<b>Kąt rozwarcia stożka</b>	<b>30°</b>

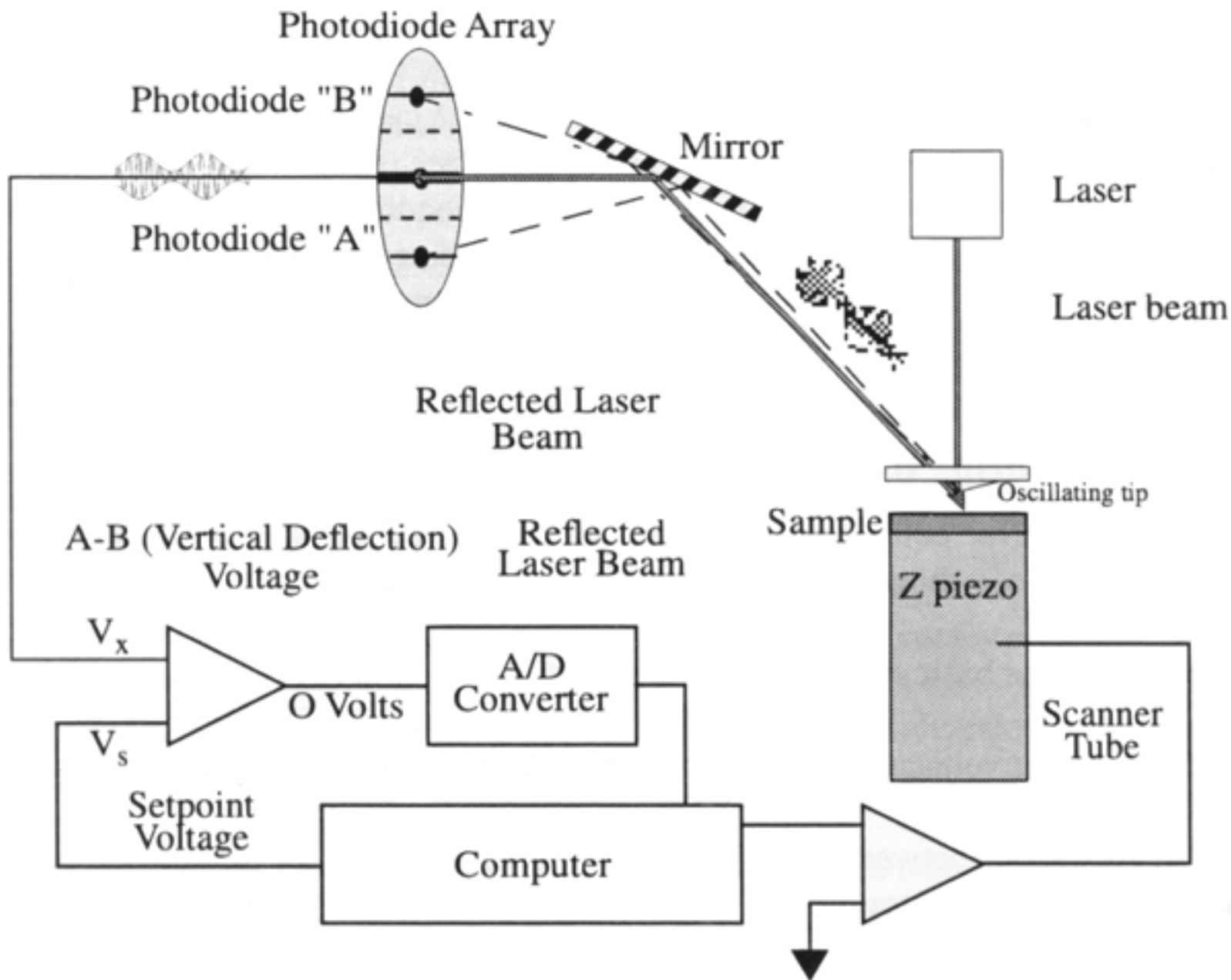
# Tryb kontaktowy („contact mode”)



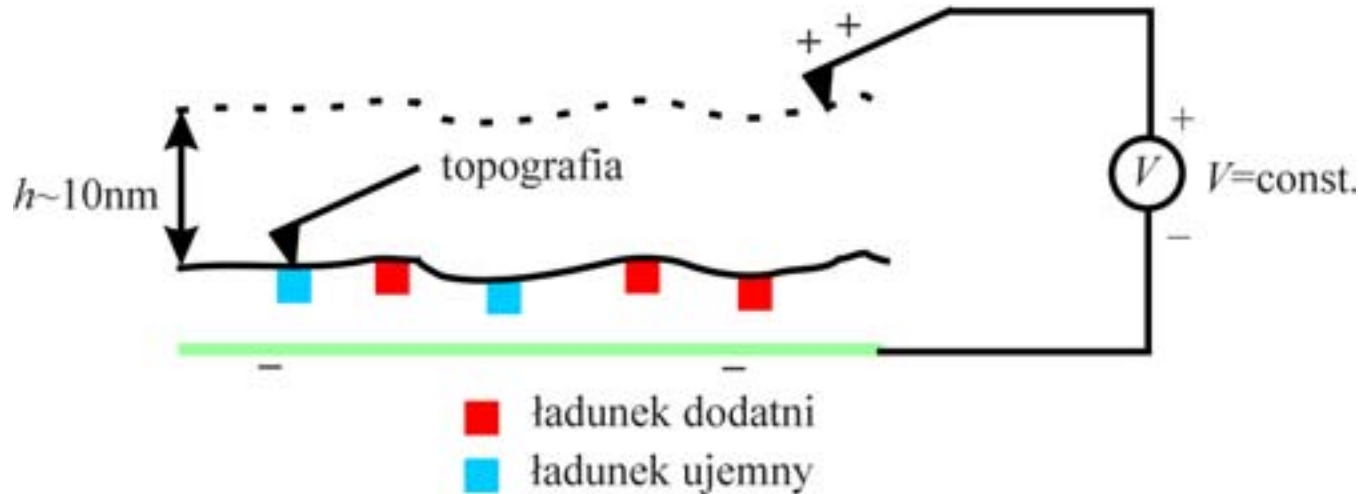
# Tryb kontaktowy („contact mode”)



# (TappingMode™ AFM)



# EFM – Electric Force Microscopy



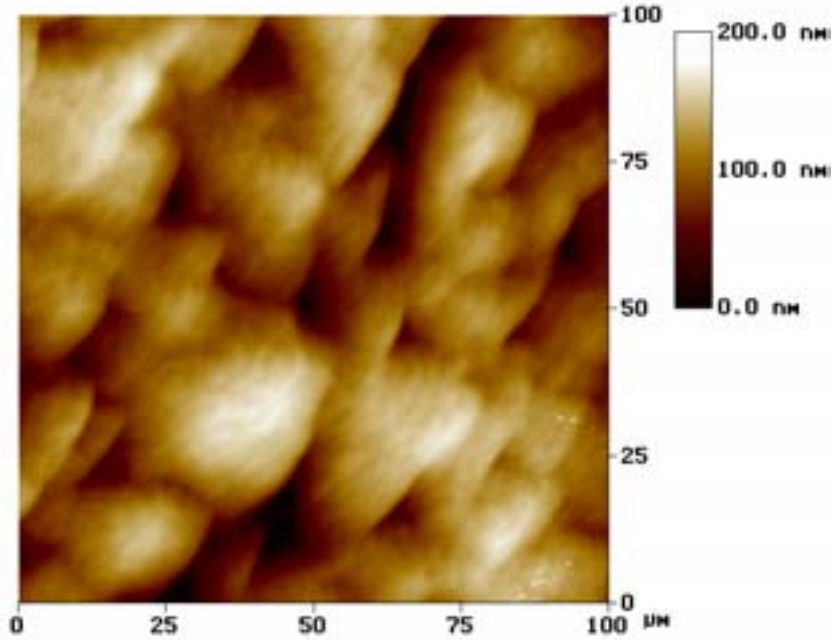
$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + \dots$$

$$\Delta f_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{f_0}{k}$$

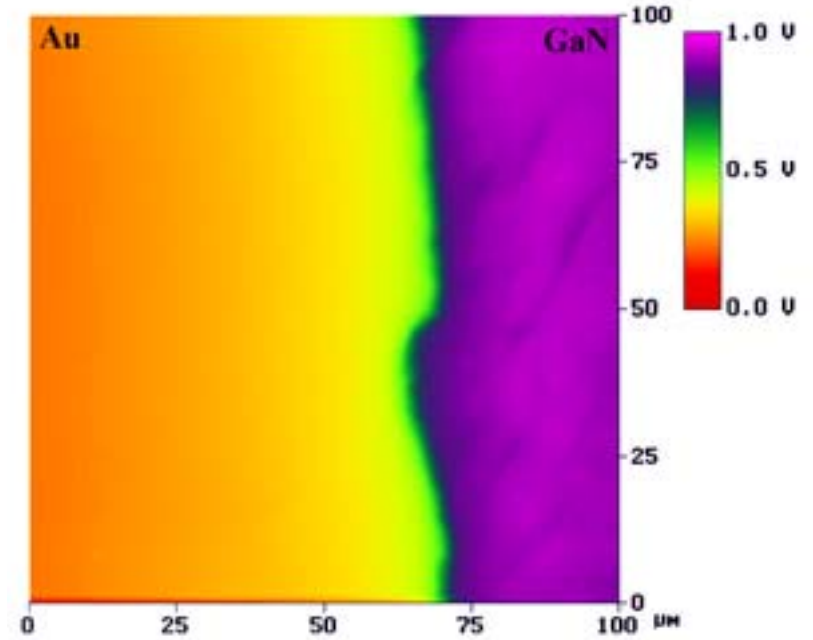
Siła elektryczna (gradient)  $\Leftrightarrow$  zmiana częstości rezonansowej

Pętla sprzężenia zwrotnego: utrzymanie rezonansu

# Dioda Schottky'ego Au/GaN



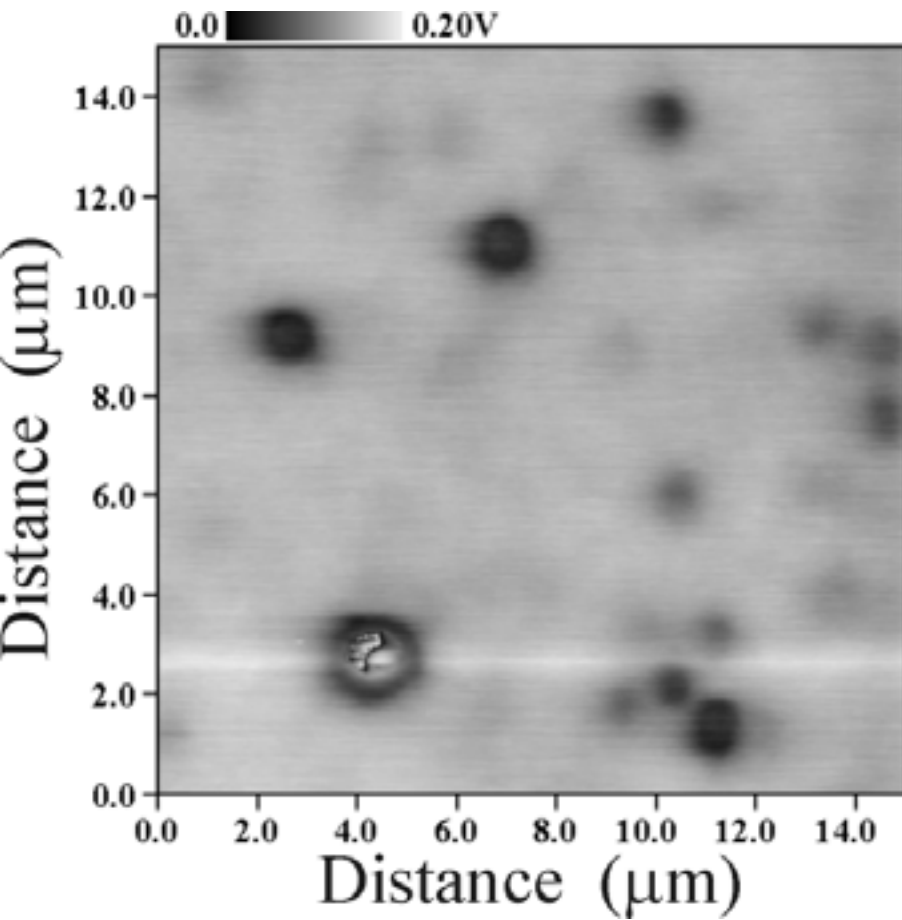
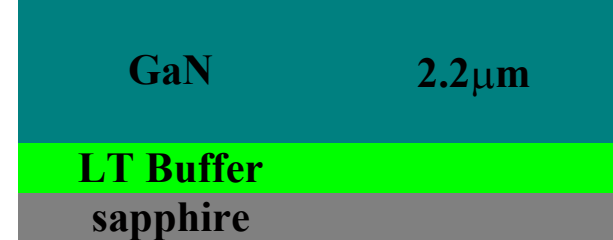
topografia



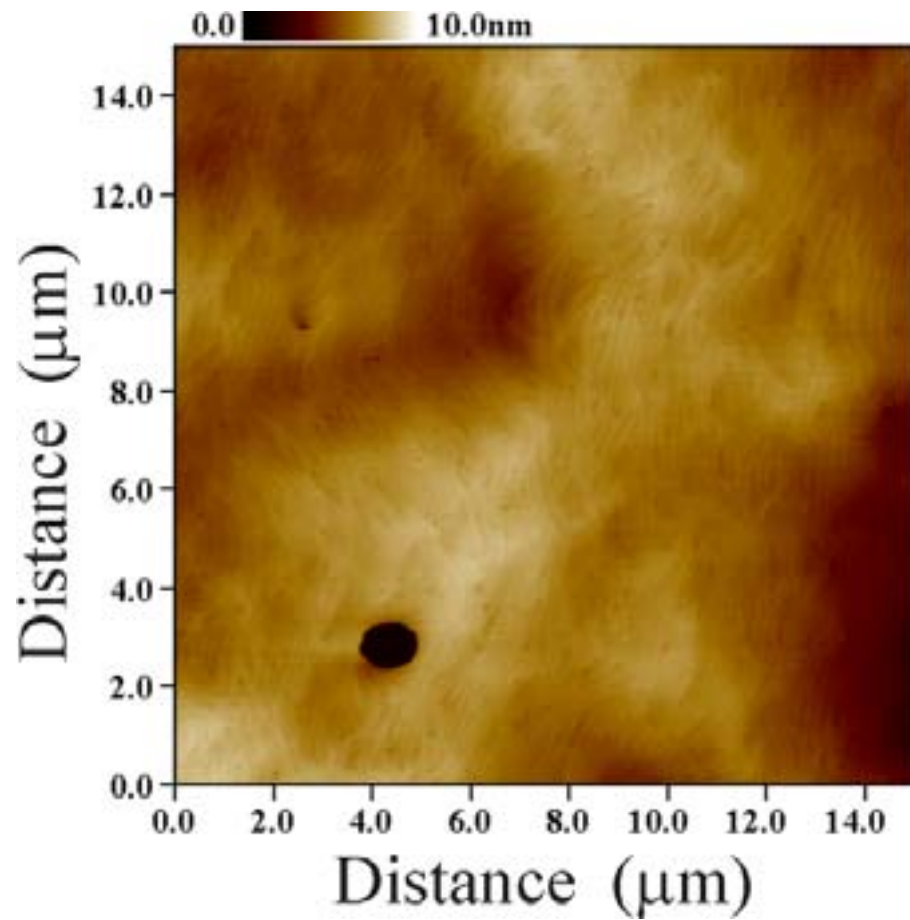
potencjał

granica półprzezroczystej warstwy Au

# GaN



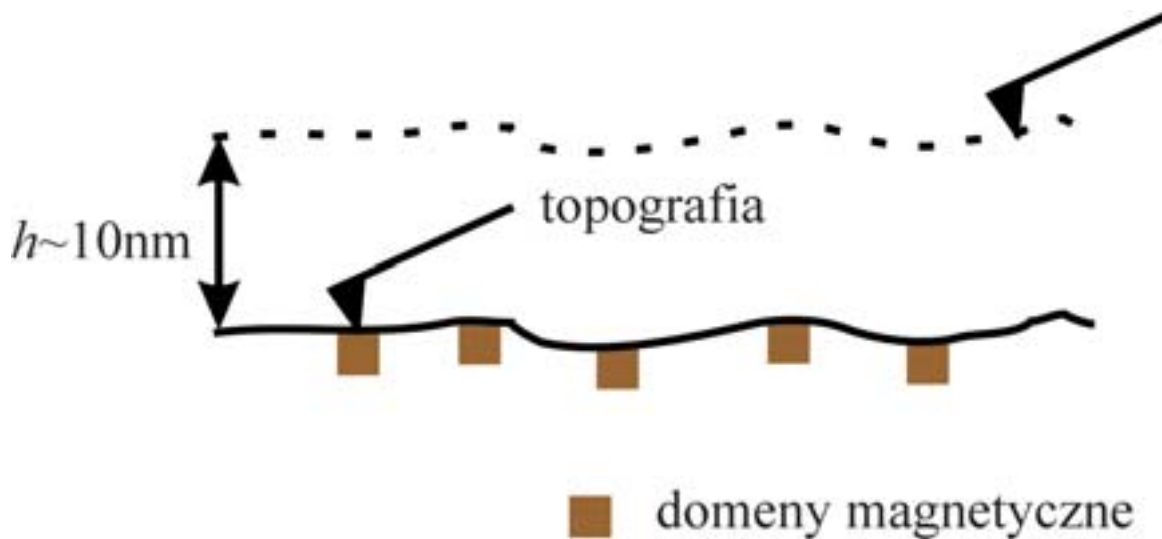
**potecjał (KPFM)**



**topografia (AFM)**



# MFM – Magnetic Force Microscopy

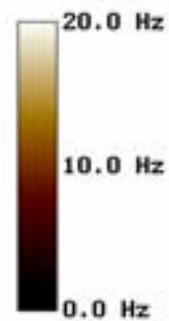
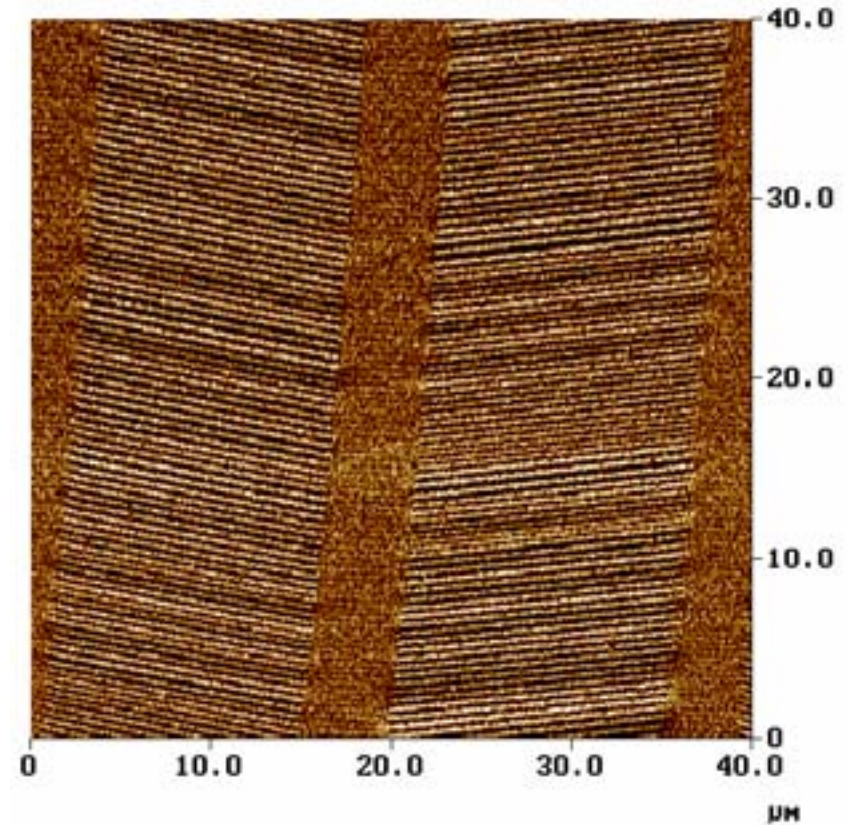
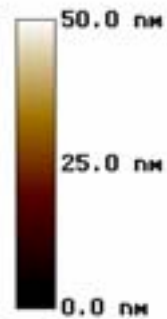
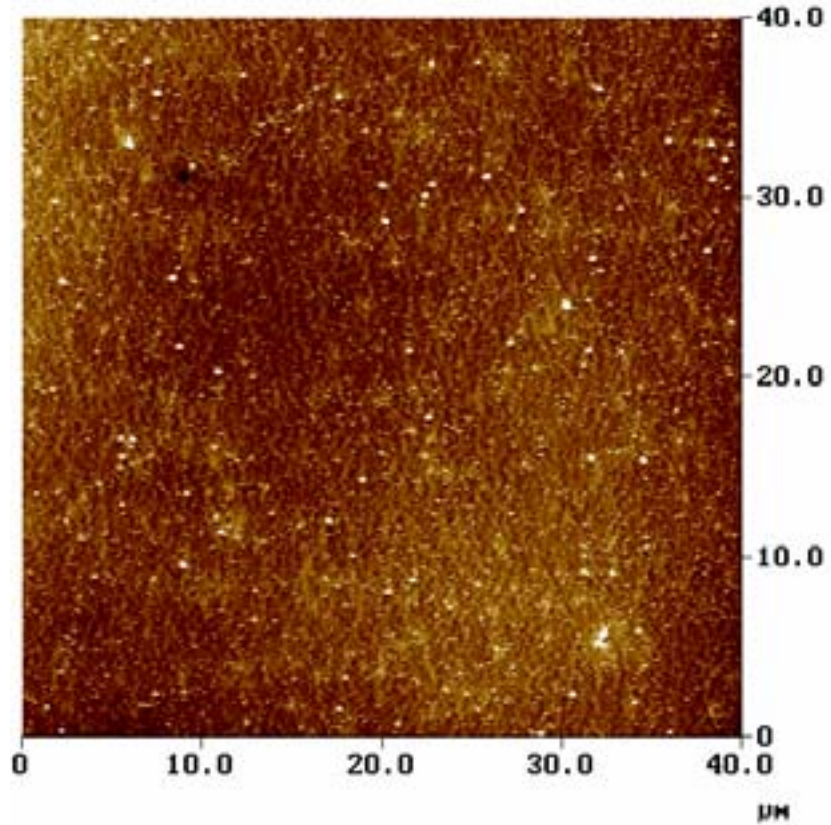


$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + \dots \quad \Delta f_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{f_0}{k}$$

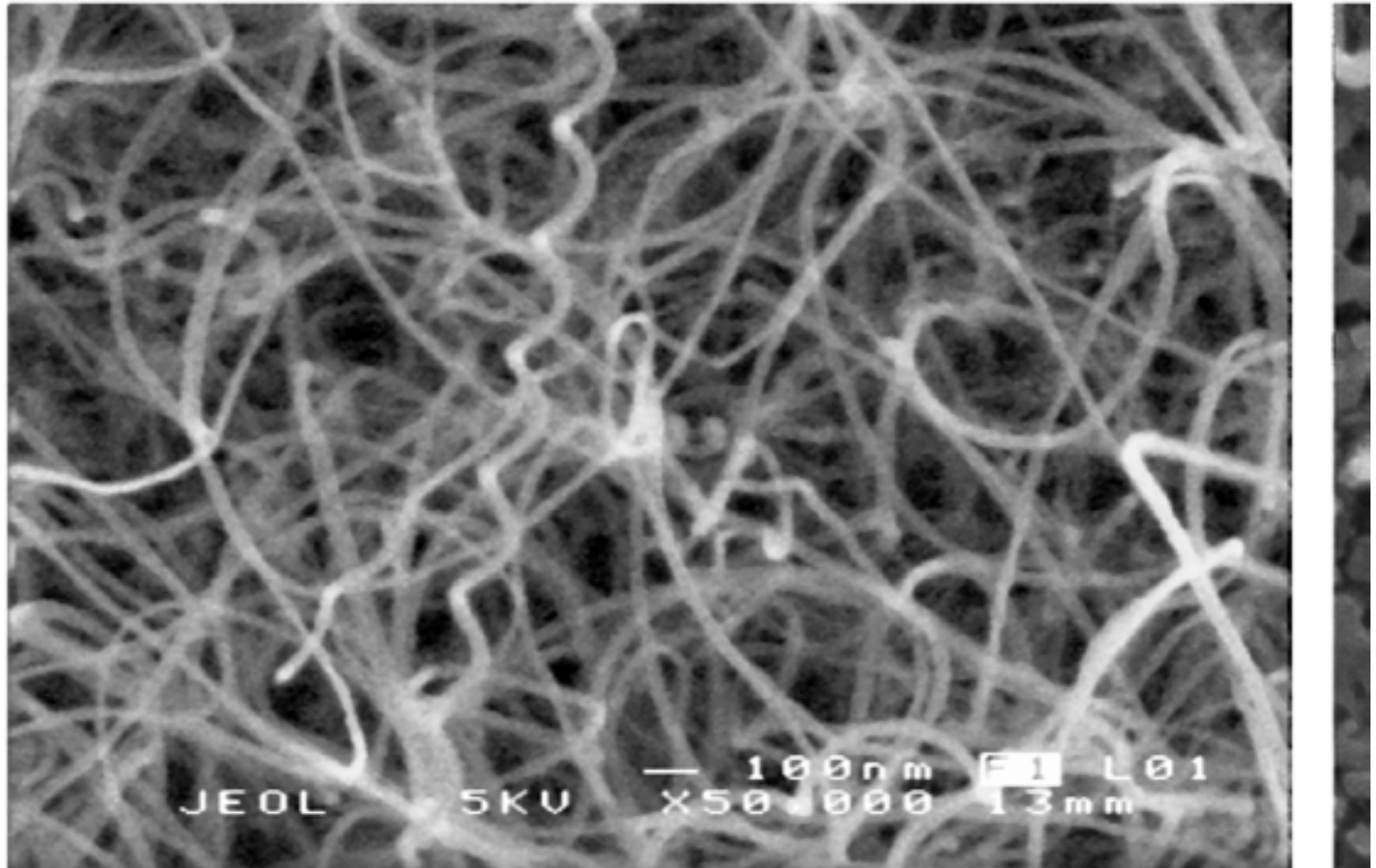
Siła magnetyczna (gradient)  $\Leftrightarrow$  zmiana częstości rezonansowej

Pętla sprzężenia zwrotnego: utrzymanie rezonansu

# Mikroskop sił magnetycznych (MFM)



# Nanorurki węglowe



**Figure 3.** Scanning electron (SEM) micrographs of MWNTs

L. Forrero et al. *Electronic and mechanical properties of carbon nanotubes,*

# Moduł Younga dla nanorurki

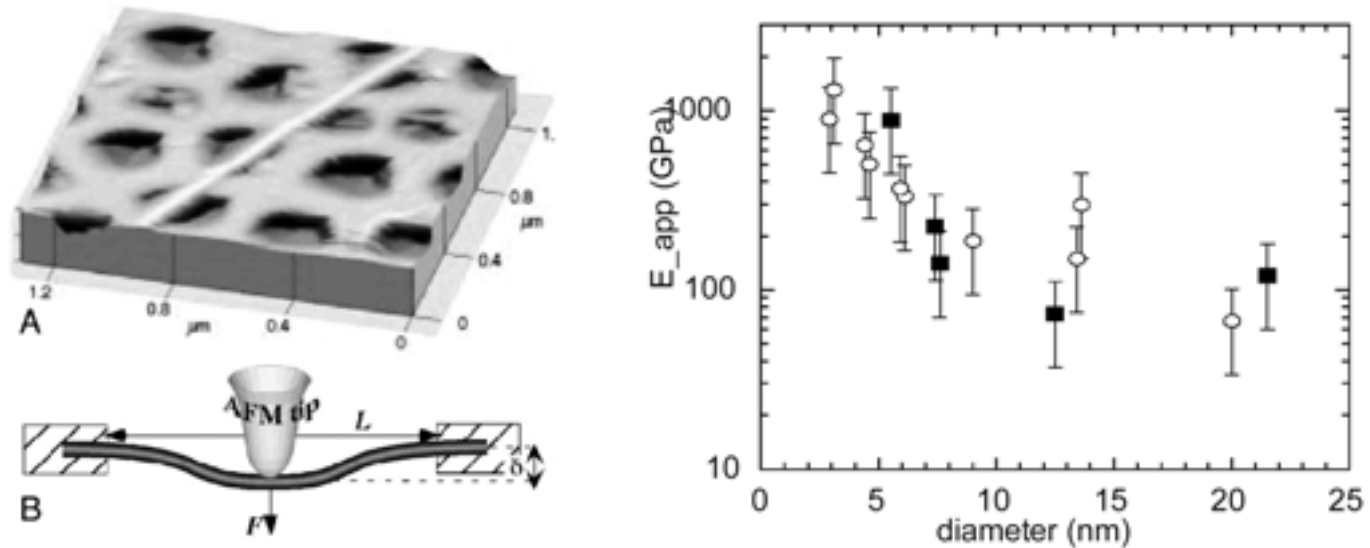


Figure 5. Dependence of the apparent Young's modulus ( $E_{app}$ ) on the diameter of SWNT bundles measured using AFM. The untreated bundles are represented by the open circles and the hydrogenated and irradiated bundles by the filled squares.

L. Forrero et al. *Electronic and mechanical properties of carbon nanotubes* (Wikipedia)

A. Volodin et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 3342 (2000)

Palaci et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 175502 (2005)

# NT-MDT sets new standards for SPM solutions



The widest range of Scanning Probe Microscopes and related products

**New**



Soltek RT



Soltek P47M



Soltek S300M



Soltek S3



Comprehensive AFM tool with 200 nm range and 200 pm vertical resolution and resolution of 1000 lines/mm. AFM image resolution: 200 nm.



AFM image of polymer surface with 200 nm range in 200 nm resolution. AFM image resolution: 200 nm.



AFM image of polymer surface with 200 nm range in 200 nm resolution. AFM image resolution: 200 nm.



Distributed through NanoTech America  
511 South Cooper Road, Suite 101  
Allen, TX 75013  
P: 972-474-8014, F: 972-474-8014, E: [info@nt-mdt.com](mailto:info@nt-mdt.com)



For more information, see [www.veeco.com](http://www.veeco.com)



## Nanosurf<sup>®</sup> Mobile S The Next Generation AFM



Nanosurf AG  
Grammetstrasse 14  
CH-4410 Liestal  
Tel. +41-61-927 56 46 Fax +41-61-927 56 47 [www.nanosurf.com](http://www.nanosurf.com)



[www.veeco-europe.com](http://www.veeco-europe.com)