

Oscylator harmoniczny tłumiony – drgania wymuszone

Oscylator swobodny
tłumiony

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\Gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = e^{-1/2\Gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2$$

Jeśli $\frac{1}{2}\Gamma \ll \omega_0 \Rightarrow$ **Słabe tłumienie:**

$e^{-1/2\Gamma t}$ Praktycznie stałe dla jednego okresu, energia układu praktycznie stała...

Po wielu okresach, zanik wykładniczy :

$$E(t) = E_0 e^{-\Gamma t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

Czas zaniku
(czas życia oscylatora)

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

Czy badając drgania wymuszone oscylatora można uzyskać informacje o czasie życia oscylatora? Tak! Zbadajmy drgania stacjonarne pod wpływem harmonicznej siły wymuszającej...

Drgania stacjonarne oscylatora tłumionego – harmoniczna siła wymuszająca

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\Gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t) \quad *$$

Szeroką klasę funkcji $F(t)$ możemy przedstawić jako:

$$F(t) = \sum F(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

a potem skorzystać z zasady superpozycji...

Drgania stacjonarne:

- drgania niestacjonarne wytłumione po czasie kilku τ
- amplituda oscylacji proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej F_0
- przesunięcie fazowe wyznaczone przez przesunięcie fazowe siły wymuszającej

$$x_s(t) = C \cos(\omega t + \varphi) = C \sin(\varphi) \sin(\omega t) + C \cos(\varphi) \cos(\omega t)$$

$$x_s(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Bezpośrednie podstawienie do równania * daje warunki na A i B :

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \equiv A_{ab}$$

$$B = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \equiv A_{el}$$

A_{ab} – amplituda absorpcyjna,

A_{el} – amplituda elastyczna:

Jak absorbowana jest energia?

Rozważmy uśrednioną w czasie (jednego okresu) moc pobieraną przez oscylator:

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \frac{dx_s}{dt} dt$$

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x_s(t) = A_{ab} \sin(\omega t) + A_{el} \cos(\omega t) \quad \frac{dx_s(t)}{dt} = \omega A_{ab} \cos(\omega t) - \omega A_{el} \sin(\omega t)$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F_0 \cos(\omega t) [\omega A_{ab} \cos(\omega t) - \omega A_{el} \sin(\omega t)] dt$$

$$\langle P_s \rangle = F_0 \omega A_{ab} \langle \cos^2(\omega t) \rangle - F_0 \omega A_{el} \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle$$

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right] dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{Gdyż } \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t) dt = 0 \quad \text{Podobnie: } \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$$

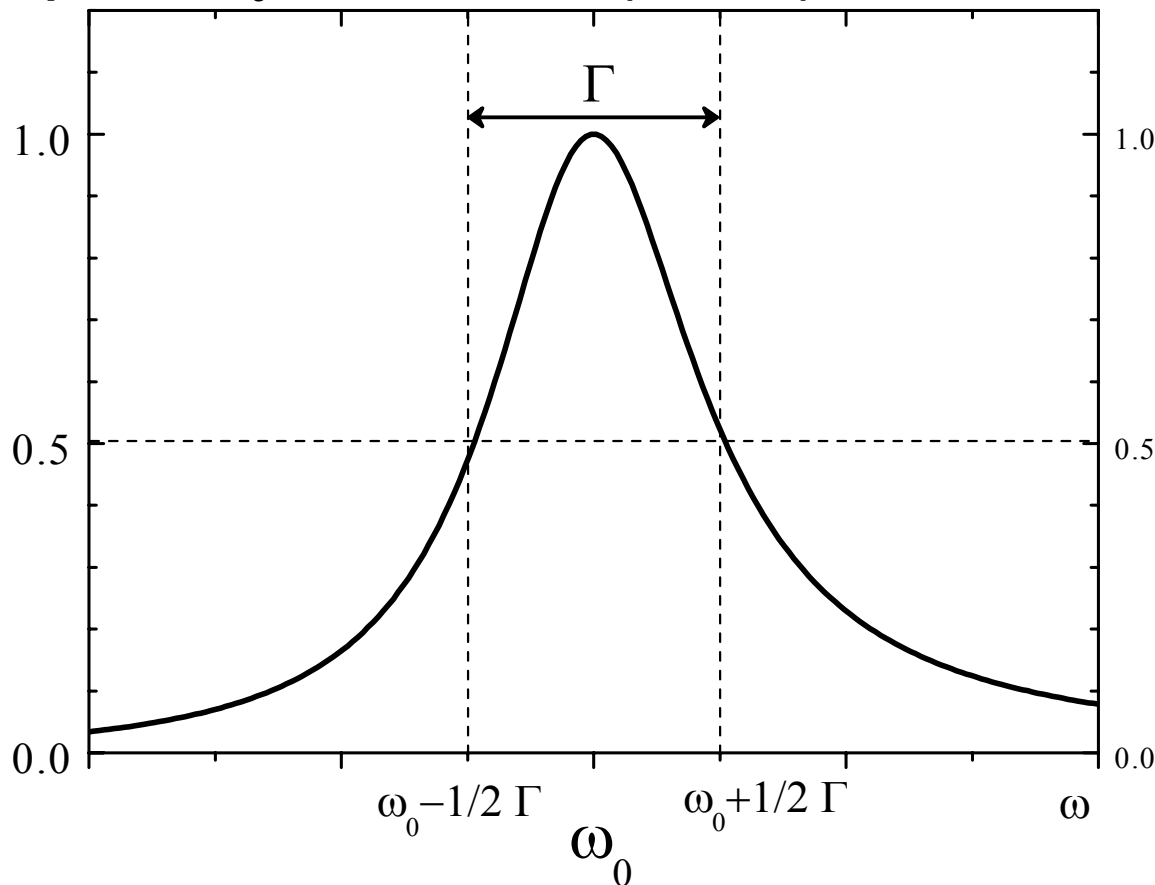
Jak absorbowana jest energia?

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{2} F_0 \omega A_{ab}$$

Za absorpcję energii odpowiedzialna jest część przesunięta w fazie o 90° (lub $\pi/2$)!

$$P = P_0 \frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$P(\omega)/P(\omega_0)$



Szukamy ω dla których:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} P_0$$



$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma \omega$$



$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2} \pm \frac{1}{2} \Gamma$$



$$(\Delta\omega)_{rez} = \Gamma \text{ lub } (\Delta\omega)_{rez} \tau = 1$$

Szerokość krzywej ma związek ze średnim czasem życia tłumionych drgań swobodnych! Ważne dla spektroskopii (rozkład Lorentzowski...)

Amplituda i przesunięcie fazowe

$$A_{ab} = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$A_{el} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma \omega}$$

Daleko od rezonansu...

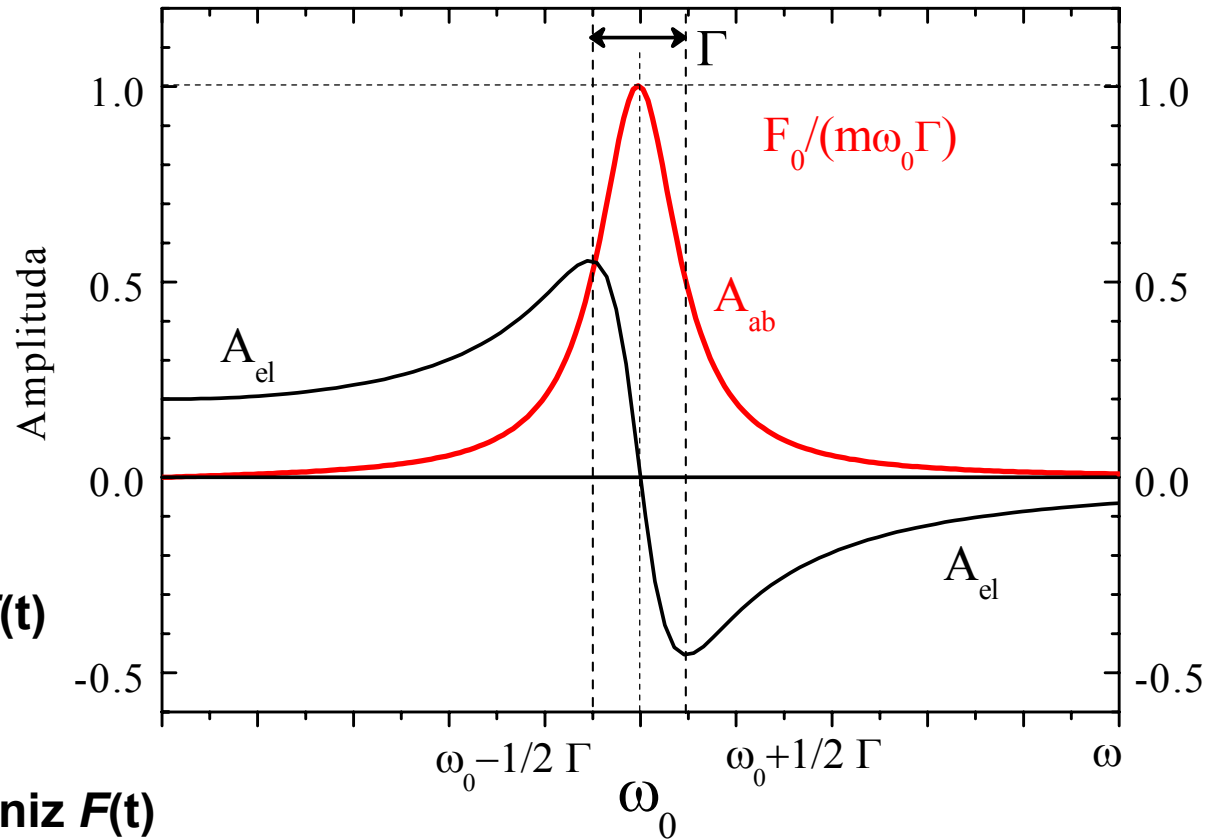
$$x_s(t) \approx A_{el} \cos(\omega t)$$

$$x_s(t) \approx \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow$ **zgodnie z $F(t)$**
($\varphi=0$)

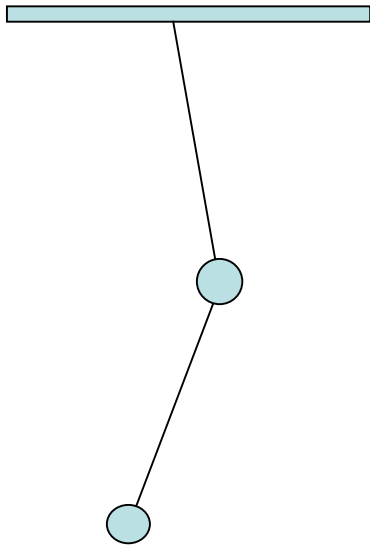
$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$

$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow$ **Przeciwnie niż $F(t)$**
 $\varphi = \pi$

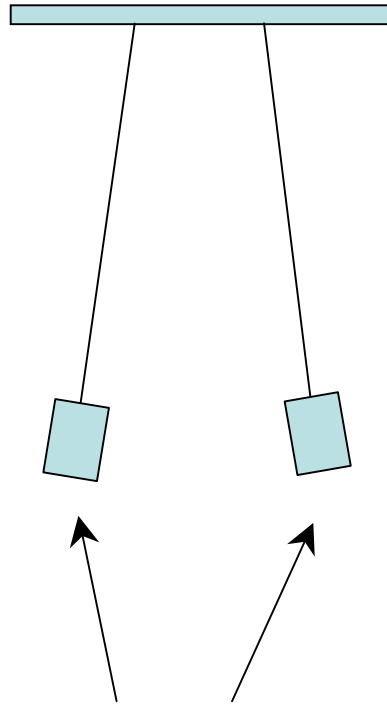


Sprawdźmy to w doświadczeniu...

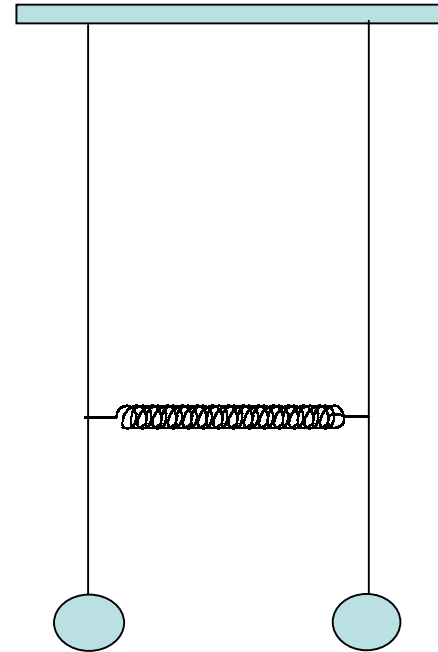
Drgania swobodne układu o dwóch stopniach swobody



Wahadło podwójne
(płaskie)



Magnesy
(odpychające się)
na prętach



Wahadła sprzężone

Liniowość i zasada superpozycji

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -c\psi + \alpha\psi^2 + \beta\psi^3 + \dots$$

Liniowe, tylko wtedy gdy $\alpha = 0, \beta = 0, \dots$ itd.

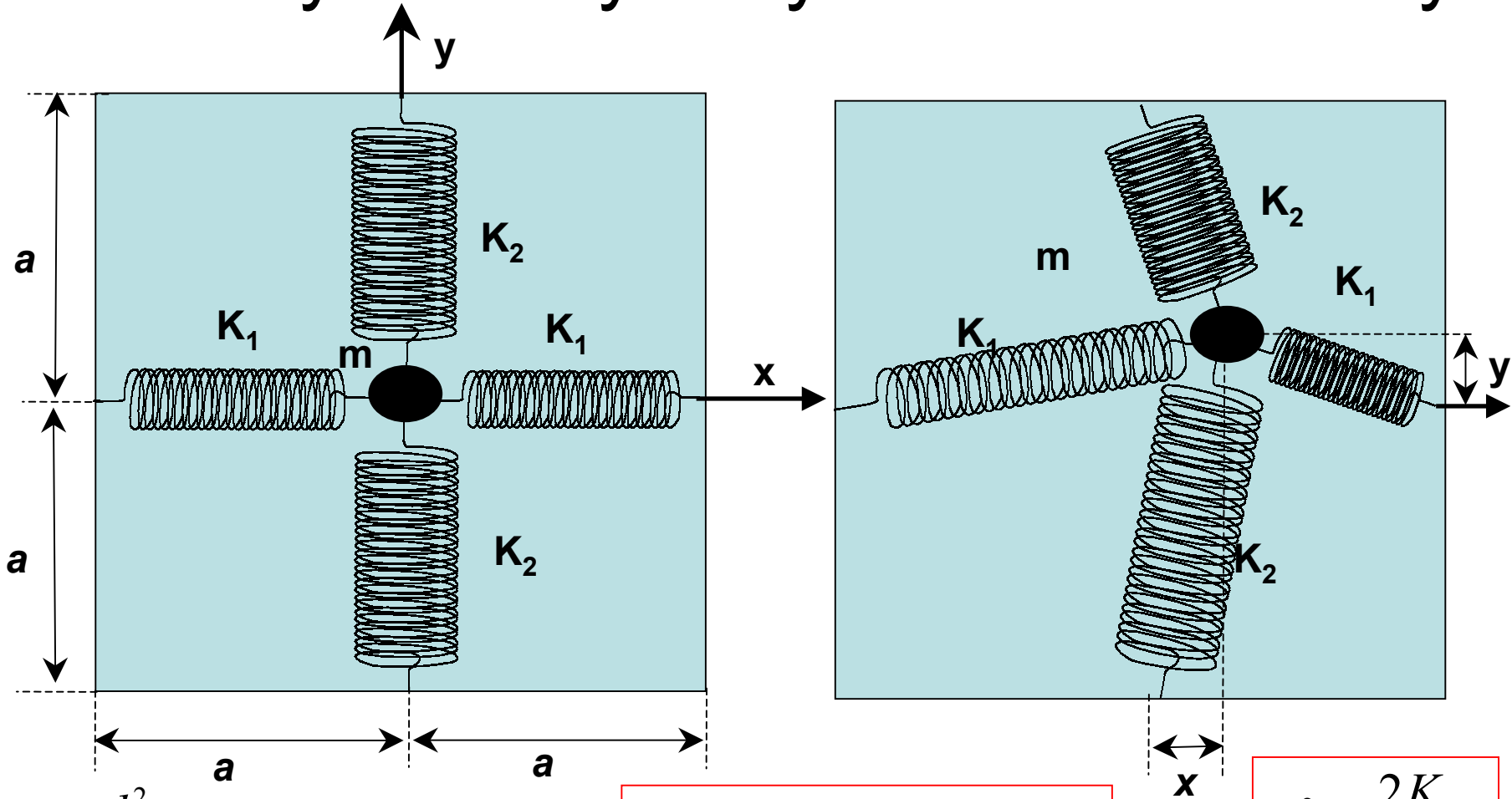
Czyli równanie $\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -c\psi$ (jednorodne) lub równanie $\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -c\psi + F(t)$ (niejednorodne)

Przypomnienie:

- suma dwu dowolnych rozwiązań równania liniowego i jednorodnego jest również rozwiązaniem tego równania.
- dla sumy rozwiązań równania liniowego, warunki początkowe są sumą warunków początkowych
- suma sił wymuszających dla dwóch rozwiązań, jest siłą wymuszającą dla rozwiązania będącego sumą rozwiązań...

Najbardziej ogólny ruch układu o dwu stopniach swobody, opisanego równaniami liniowymi stanowi superpozycję dwu niezależnych, jednoczesnych ruchów harmoniczných – **drgań własnych** lub inaczej **drgań normalnych** układu.
Jak je znaleźć?

Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2K_1 x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -2K_2 y$$

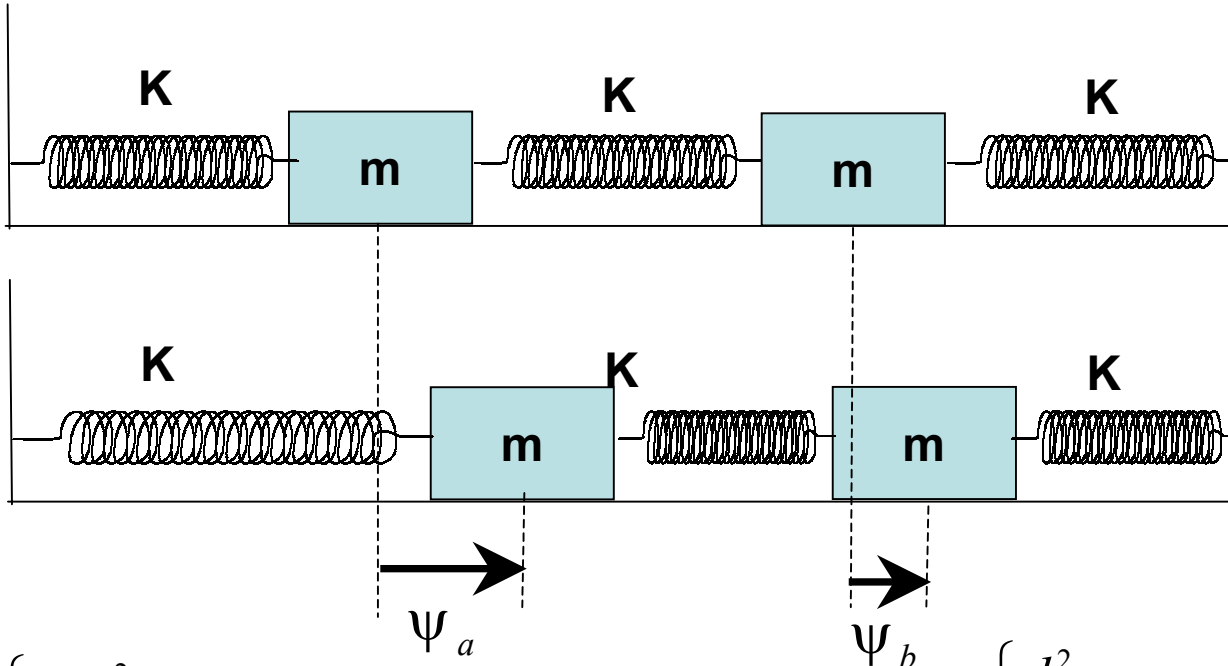


$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y(t) &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Drgania normalne!
Niezależne ruchy w dwóch kierunkach,
charakterystyczne częstości...

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2K_1}{m} \\ \omega_2^2 &= \frac{2K_2}{m} \end{aligned}$$

Równania ruchu



$$\begin{cases} m \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a) \\ m \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -K\psi_b + K(\psi_a - \psi_b) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -\frac{2K}{m}\psi_a + \frac{K}{m}\psi_b \\ \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = +\frac{K}{m}\psi_a - \frac{2K}{m}\psi_b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_a &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ \psi_a &= B \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} &= -\omega^2 \psi_a \\ \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} &= -\omega^2 \psi_b \end{aligned}$$

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{2K}{m}, & a_{12} &= -\frac{K}{m} \\ a_{21} &= -\frac{K}{m}, & a_{22} &= \frac{2K}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 \psi_a = -a_{11} \psi_a - a_{12} \psi_b \\ -\omega^2 \psi_b = -a_{21} \psi_a - a_{22} \psi_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \omega^2) \psi_a + a_{12} \psi_b = 0 \\ a_{21} \psi_a + (a_{22} - \omega^2) \psi_b = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{a_{11} - \omega^2}{a_{12}} \\ \frac{\psi_b}{\psi_a} = -\frac{a_{21}}{(a_{22} - \omega^2)} \end{cases}$$



lub inaczej

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - \omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

pamiętamy, że

$$\psi_a = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\psi_b = B \cos(\omega t + \varphi)$$

Stąd:

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać1}} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać2}} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\psi_b = \frac{B_1}{A_1} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B_2}{A_2} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$\psi_b = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ – z warunków początkowych

**A może
zgadnąć?**

Częstości własne

$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0$$



$$\omega^4 - \omega^2(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$



$$\omega^4 - \frac{4K}{m}\omega^2 + \frac{3K^2}{m} = 0$$



$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{m}$$



Postać 1



$$\psi_b = \psi_a$$

Postać 2

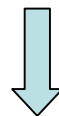


$$\psi_b = -\psi_a$$

Pamiętamy, że:

$$a_{11} = \frac{2K}{m}, \quad a_{12} = -\frac{K}{m}$$

$$a_{21} = -\frac{K}{m}, \quad a_{22} = \frac{2K}{m}$$



$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać1}} &= \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} = 1 \\ \left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać2}} &= \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} = -1 \end{aligned}$$

Popatrzmy jeszcze raz na równania...

Dodajmy je i odejmijmy stronami...

$$\begin{cases} m \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a) \\ m \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -K\psi_b + K(\psi_a - \psi_b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{d^2 (\psi_a + \psi_b)}{dt^2} = -K(\psi_a + \psi_b) \\ m \frac{d^2 (\psi_a - \psi_b)}{dt^2} = -3K(\psi_a - \psi_b) \end{cases}$$

$$\psi_a + \psi_b \equiv \psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\psi_a - \psi_b \equiv \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$$

Stąd:

$$\psi_a = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1))$$

$$\psi_b = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1))$$

Czyli znowu widzimy, że dla drgań normalnych z częstotliwością ω_1

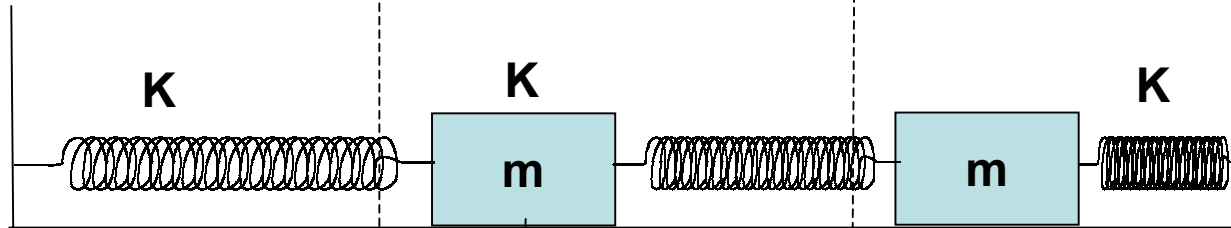
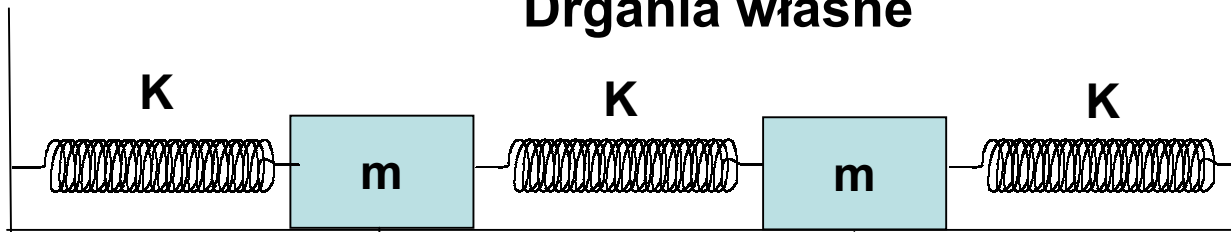
$$\psi_b = \psi_a$$

dla drgań normalnych z częstotliwością ω_2

$$\psi_b = -\psi_a$$

To można zgadnąć!

Drgania własne

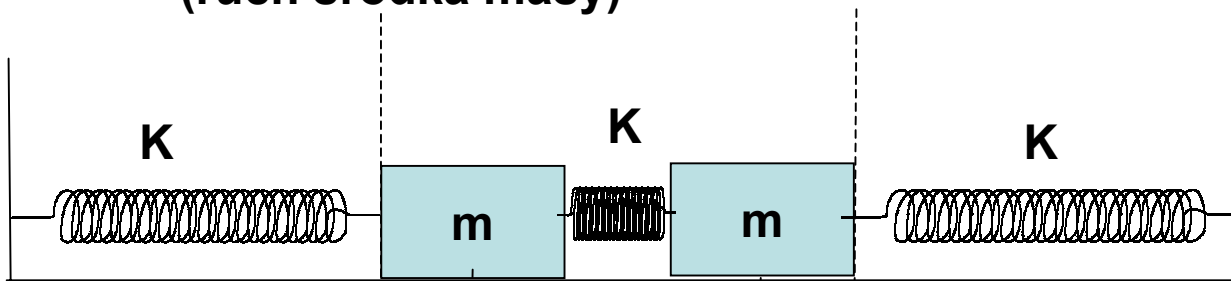


**Postać 1: Sprężynka środkowa nie napięta
(ruch środka masy)**

**Siła
zwrotna**

$$F_z = -K\psi_a$$

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m}$$



**Siła
zwrotna**

$$F_z = -K\psi_a - 2K\psi_a$$

$$\omega_2^2 = \frac{3K}{m}$$

**Postać 1: Sprężynka środkowa ściśnięta podwójnie
(ruch wewnętrzny układu)**

Dudnienia

- dwa kamertony o bliskiej częstotści,
- brzeszczoty w imadle,
- struny gitary (np.. gdy ją stroimy),

Ruch błony bębenkowej jest superpozycją dwu drgań harmoniczných....

Przyjmijmy, że $A_1=A_2=A$, $\varphi_1=\varphi_2=0$

$$\psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t), \quad \psi_b(t) = A \cos(\omega_2 t)$$

Ich suma: $\psi(t) = \psi_a(t) + \psi_b(t) = A(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$

Korzystając z tego, że

$$\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

dostajemy:

$$\psi(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{śr}} t)$$

gdzie:

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \omega_{\text{śr}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{śr}}$$

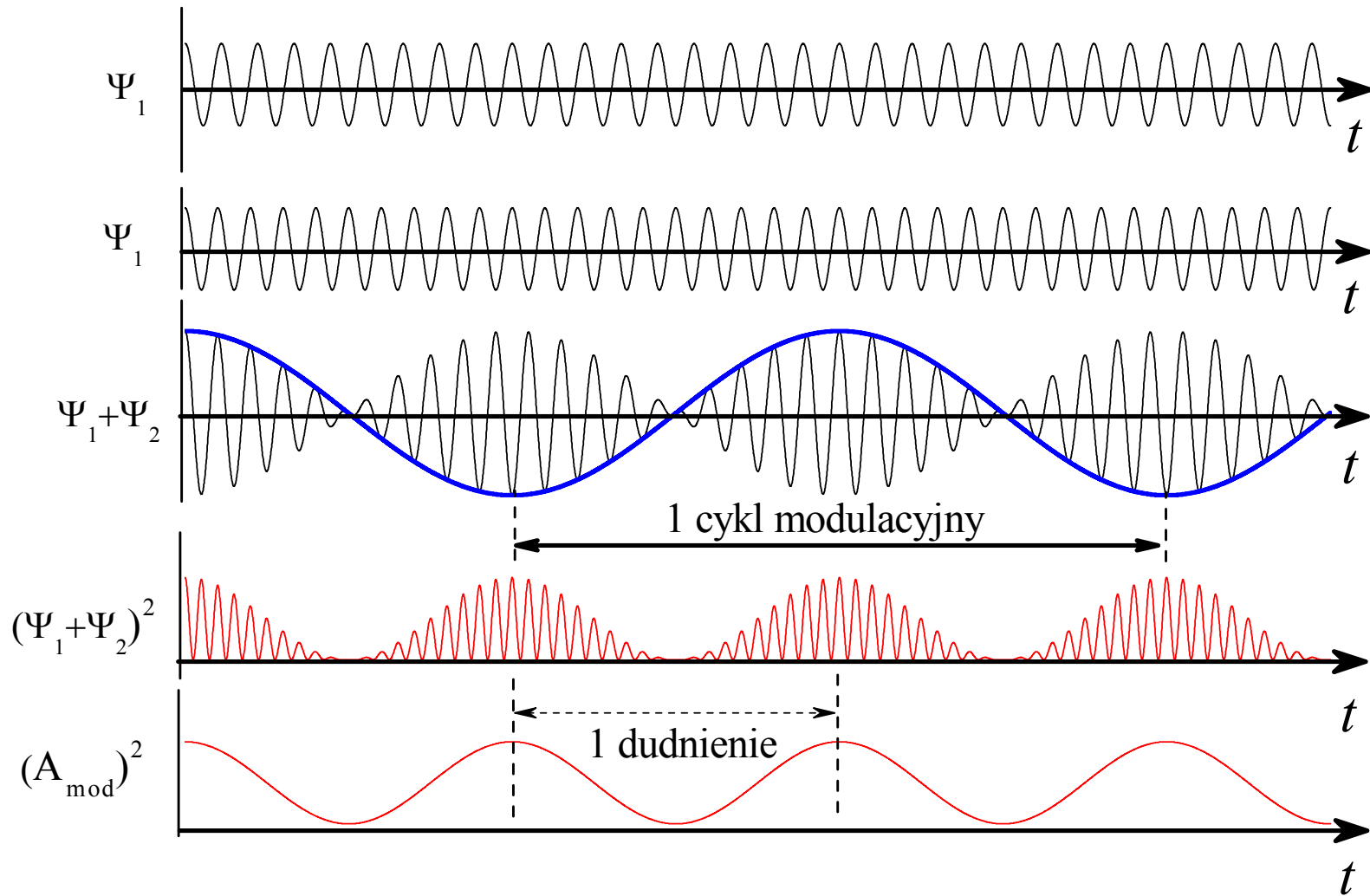


$$\psi(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{śr}} t)$$

amplituda wolno
zmienna

część
szybkoszmienna

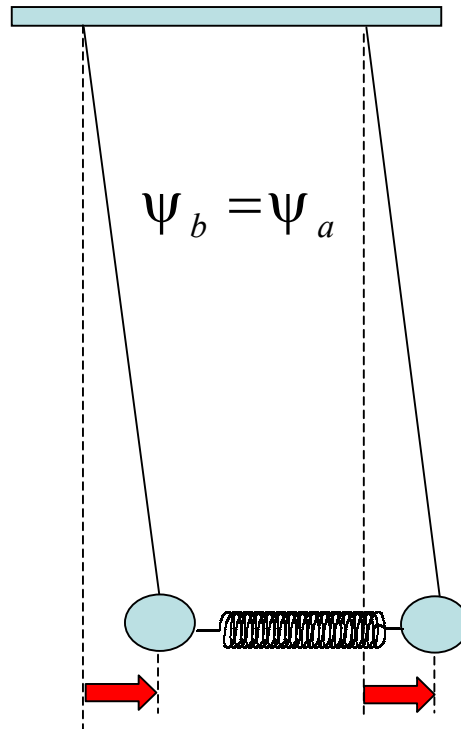
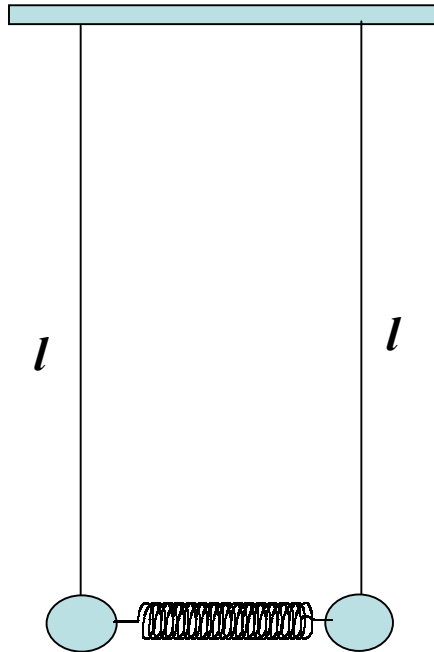
Dudnienia łatwo zasymulować...



$$\psi(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{sr} t)$$

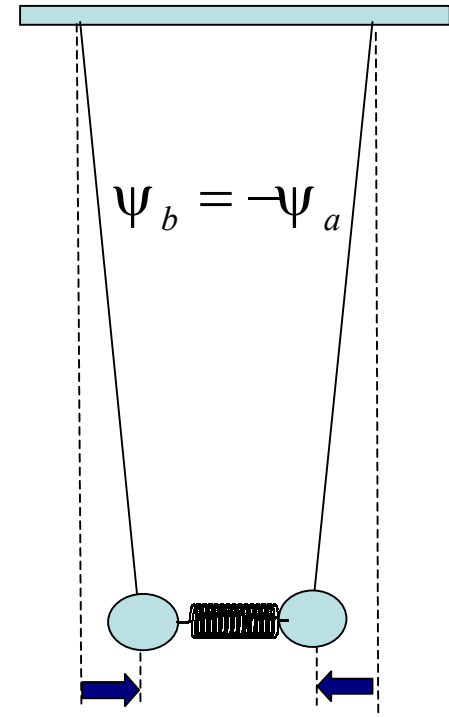
Wahadła słabo sprzężone

MODY WŁASNE



Sprężynka luźna

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}$$



Sprężynka napięta „podwójnie”

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m}$$

Rozwiązanie ogólne

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$$

$$\psi_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$$

Przyjmijmy, że $A_1=A_2=A$, $\varphi_1=\varphi_2=0$, wtedy wychylenia ciężarków:

$$\psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$$

$$\psi_b(t) = A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t)$$

Jak takie drgania wzbudzić?

Trzeba odpowiednio dobrać warunki początkowe – dobieramy wychylenia i prędkości dla $t=0$

Prędkości ciężarków

$$\frac{d\psi_a(t)}{dt} = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) - \omega_2 A \sin(\omega_2 t)$$

$$\frac{d\psi_b(t)}{dt} = -\omega_1 A \sin(\omega_1 t) + \omega_2 A \sin(\omega_2 t)$$



$$\psi_a(0) = 2A$$

$$\psi_b = 0$$

$$\frac{d\psi_a}{dt}(0) = 0$$

$$\frac{d\psi_b}{dt}(0) = 0$$

$$\psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) A \cos(\omega_{\text{sr}} t)$$

$$\psi_a(t) = A_{\text{mod}}(t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$$

$$\psi_b(t) = A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t) = 2A \sin(\omega_{\text{mod}} t) A \sin(\omega_{\text{sr}} t)$$

$$\psi_b(t) = B_{\text{mod}}(t) \sin(\omega_{\text{sr}} t)$$

W ciągu jednego szybkiego cyklu „szybkich drgań” traktujemy wahadeł jak oscylatory harmoniczne o stałej amplitudzie (A_{mod} oraz B_{mod}) i częstotści ω_{sr}

$$E_a = \frac{1}{2} m \omega_{\text{sr}}^2 A_{\text{mod}}^2 = 2m A^2 \omega_{\text{sr}}^2 \cos^2(\omega_{\text{mod}} t)$$

$$E_b = \frac{1}{2} m \omega_{\text{sr}}^2 B_{\text{mod}}^2 = 2m A^2 \omega_{\text{sr}}^2 \sin^2(\omega_{\text{mod}} t)$$

$$E_a + E_b = 2m A^2 \omega_{\text{sr}}^2 = E$$

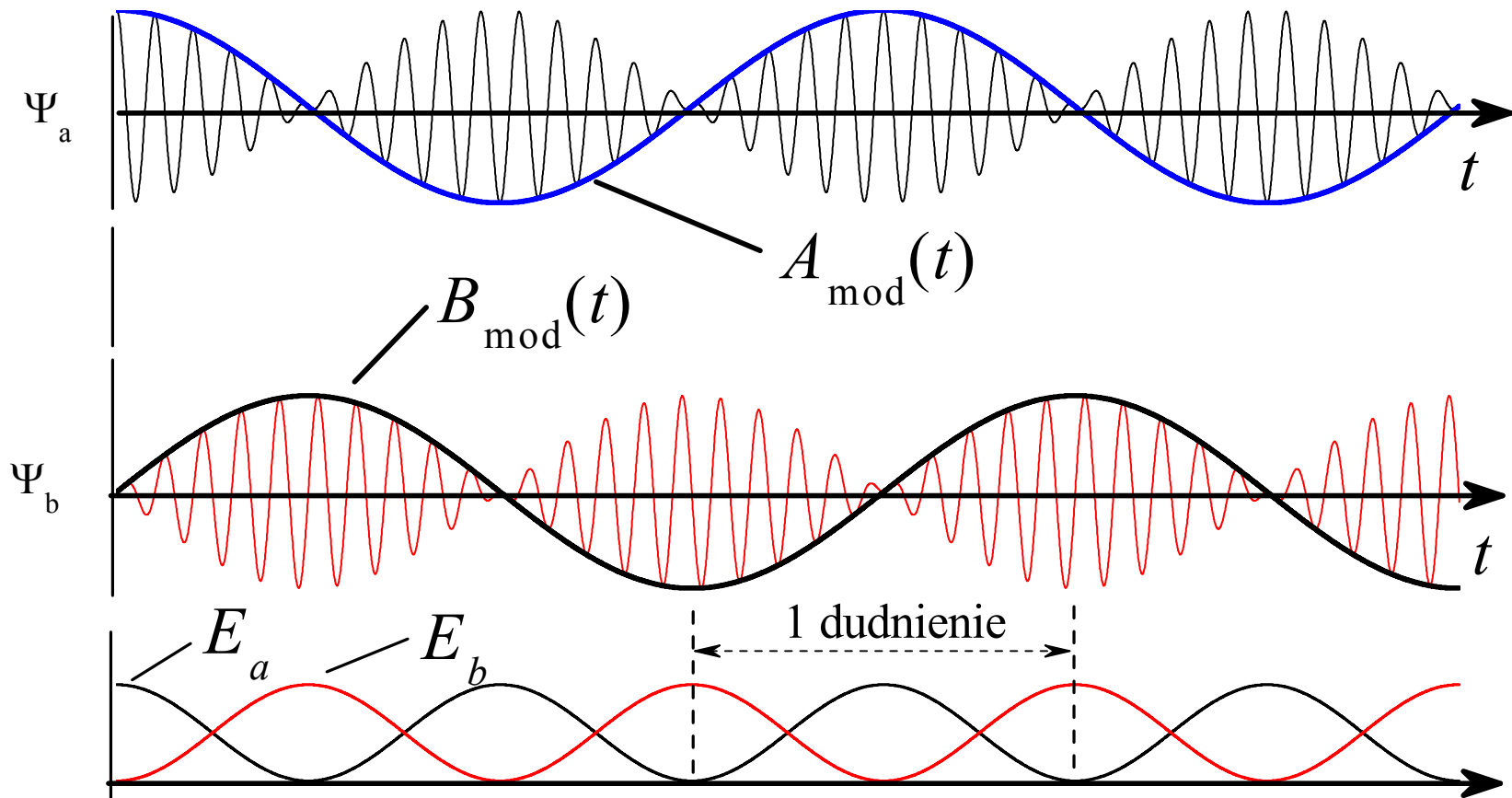
$$E_a - E_b = E(\cos^2(\omega_{\text{mod}} t) - \sin^2(\omega_{\text{mod}} t)) = E \cos(2\omega_{\text{mod}} t) = E \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]$$

Energia przepływa z jednego do drugiego wahadła z częstotścią dudnień

$$E_a = \frac{1}{2} E[1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

$$E_b = \frac{1}{2} E[1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

Zagadnienie energii w układzie drgań sprzężonych



Przepływ energii pomiędzy wahadłami

W mechanice kwantowej energia jest „skwantowana” - pomiędzy różnymi stopniami swobody przepływa prawdopodobieństwo posiadania energii wzbudzenia...(F.C. Crawford)

$$E_a = \frac{1}{2} E[1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

$$E_b = \frac{1}{2} E[1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$