# Drgania układów o wielu stopniach swobody

# Cechy układu o N stopniach swobody

• istnieje dokładnie *N* postaci drgań własnych
• każda z postaci drgań normalnych ma własną częstość i „kształt” (określony przez stosunki amplitud)

Gdy układ wykonuje drganie normalne

$$\psi_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi)$$

• wszystkie elementy mają tę sama częstość,
• wszystkie elementy mają to samo przesunięcie fazowe (mijają punkt równowagi w tym samym momencie!)
• każdy element masy doznaje takiej samej siły kierującej na jednostkę masy

$$\ddot{\psi} = -\frac{k}{m}\psi$$

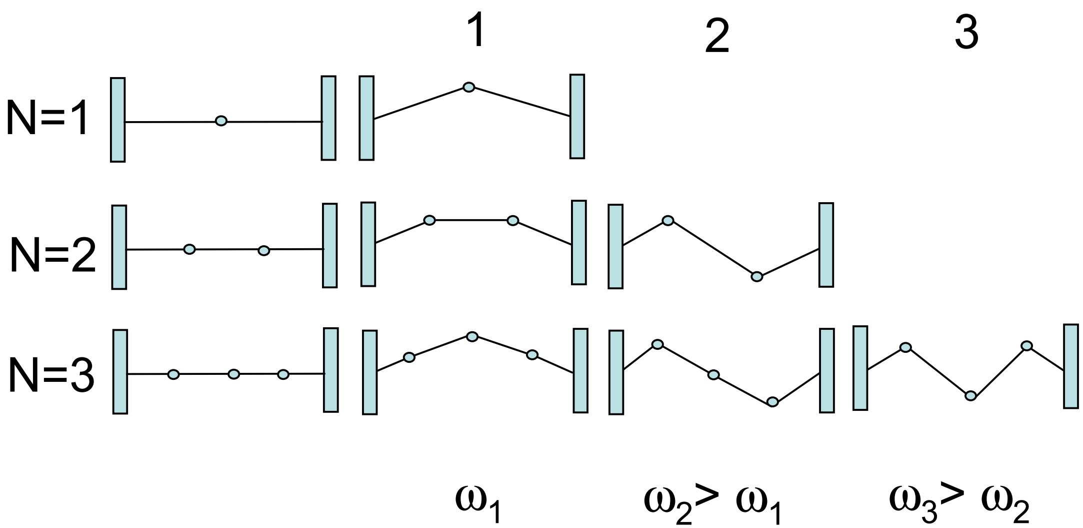
Jeśli więc układ ma trzy stopnie swobody i dla danego modu drgań własnych stosunki amplitud wynoszą (1):(-1):(3), to jeśli

$$\psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \Longrightarrow \quad \psi_2(t) = -\psi_1(t) \quad \psi_3(t) = 3\psi_1(t)$$

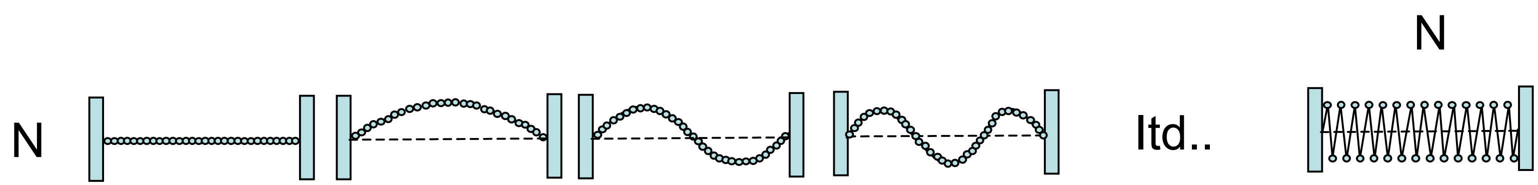
Czasami używa się zapisu wektorowego opisującego dany mod drgań. Rozwiązanie ogólne jest sumą takich wektorów własnych…

$$\vec{\psi}_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Jak zmieniają się postacie drgań…




Im większy kąt nachylenia pomiędzy sąsiednimi „sprężynkami” tym większa siła kierująca, tym większa częstość drgań…

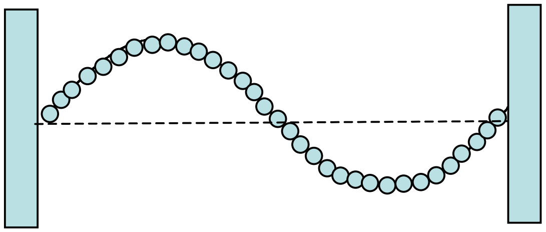



- Liczba konfiguracji = N
- Pierwsza postać: brak węzłów (oprócz zamocowania)
- Ostatnia postać (o najwyższej częstości) N-1 węzłów (oprócz zamocowania)

# Granica ciągłości układu…

Jeśli liczba elementów układu *N* jest bardzo duża (np. $10^6$) to odległości pomiędzy elementami są małe, to układ staje się „ciągły.

Dla pierwszych kilku tysięcy modów drgań o najniższych częstościach blisko siebie leżące elementy poruszają się praktycznie tak samo…



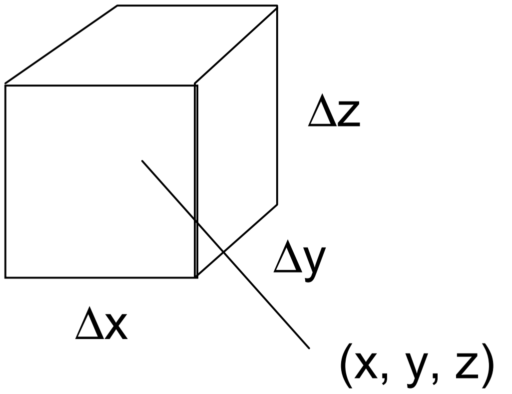
Pojawiają się fale!

Zamiast używać położeń każdego elementu

$$\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \psi_3(t)\ldots\psi_N(t)$$

Używać funkcji ciągłej położenia

$$\vec{\psi}(x, y, z, t)$$




gdzie, x, y, z – położenia rozważanego elementu układu (bliskiego otoczenia tego punktu)

$$\vec{\psi}(x, y, z, t) = \psi_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + \psi_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + \psi_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$$

# Drgania (fale) podłużne i poprzeczne

Rozważmy strunę rozciągniętą wzdłuż osi **z**,
dla położenia równowagi dla wszystkich punktów *x*=0, y=0

$$\vec{\psi}(x, y, z, t) = \psi_x(z, t)\vec{e}_x + \psi_y(z, t)\vec{e}_y + \psi_z(z, t)\vec{e}_z$$

Drgania podłużne:

$$\vec{\psi}(z, t) = \psi_z(z, t)\vec{e}_z$$

$$\psi_L(z, t) = \psi_z(z, t)\vec{e}_z$$

Drgania poprzeczne:

$$\vec{\psi}_p(z, t) = \psi_x(z, t)\vec{e}_x + \psi_y(z, t)\vec{e}_y$$

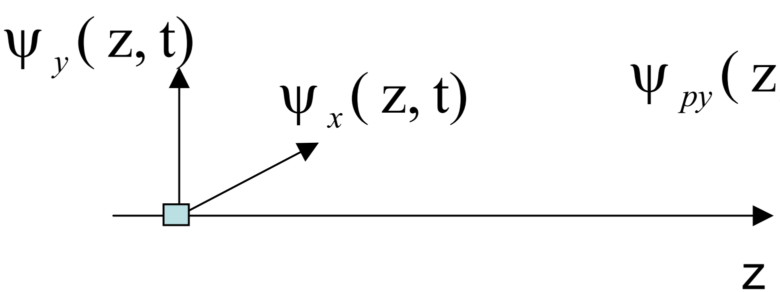
chwilowe
wychylenia z połażenia
równowagi wzdłuż z

Polaryzacja

$$\psi_{px}(z, t) = \psi_x(z, t)$$

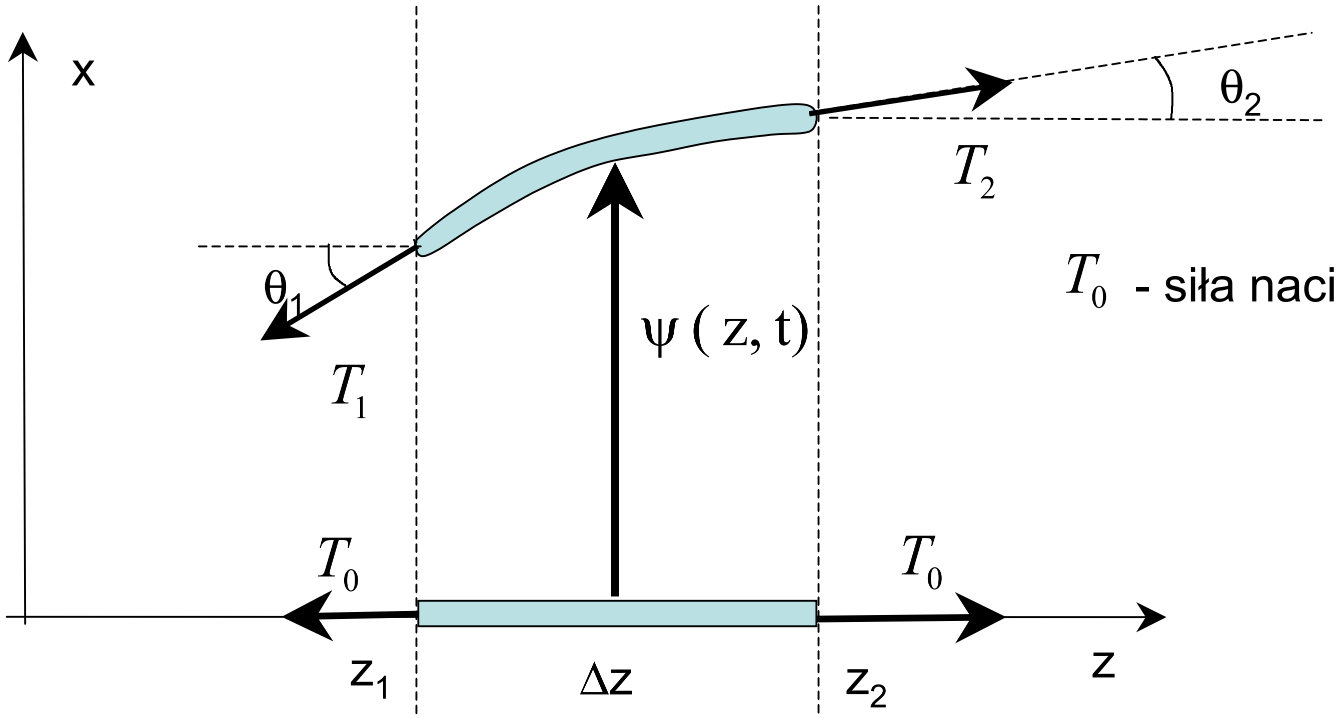
$$\psi_{py}(z, t) = \psi_y(z, t)$$

chwilowe
wychylenia z połażenia
równowagi wzdłuż x lub y



# Równanie falowe dla struny

Drgania poprzeczne
spolaryzowane




$T_0$ - siła naciągu

Rozważmy ruch niewielkiego elementu długości $\Delta z$,
Równanie Newtona

$$\boxed{\Delta m \frac{\partial^2 \psi\,(z,\,t)}{\partial t^2} = F_x(z,t)}$$

$$\Delta m = \rho_0 \Delta z$$

$\rho_0$ - gęstość liniowa

$$\boxed{F_x(z,t) = T_2 \sin(\theta_2) - T_1 \sin(\theta_1)}$$

**Dwa różne podejścia:**

- przybliżenie małej długości swobodnej pozioma siła napinająca strunę $T=(1/\cos\theta)T_0$, czyli $T\cos\theta=T_0$)
- przybliżenie małych drgań: $\cos\theta \approx 1$, pozioma sila napinajaca $T\cos\theta=T_0$

$$F_x(z,t) = T_2\sin(\theta_2) - T_1\sin(\theta_1) = T_2\cos(\theta_2)tg(\theta_2) - T_1\cos(\theta_2)tg(\theta_1)$$

$$F_x(z,t) = T_0 tg(\theta_2) - T_0 tg(\theta_1) = T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_2 - T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1$$

$$F_x(z,t) = (z_2 - z_1)\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_2 - T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1}{z_2 - z_1} \cong \Delta z T_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Równanie ruchu: $\rho_0 \Delta z \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Delta z T_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$

Klasyczne równanie falowe:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}}$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$ - prędkość fali

# Fale stojące w strunie

Drgania normalne: **każdy** element struny wykonuje drgania postaci:

$$\boxed{\psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \varphi)} \quad *$$

niezależna od czasu amplituda A(z)

ta sama częstość $\omega$

to samo przesunięcie fazowe $\varphi$

Różniczkujemy *

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A(z)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = \cos(\omega t + \varphi)\frac{d^2 A(z)}{dz^2}$$

Równanie oscylatora harmonicznego!

$$\boxed{\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} A(z)}$$

$$\boxed{A(z) = A\sin(2\pi \frac{z}{\lambda}) + B\cos(2\pi \frac{z}{\lambda})} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A(z)}$$

$$\boxed{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} = (2\pi\nu)^2 \frac{\rho_0}{T_0}} \Rightarrow \boxed{\lambda\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} = \upsilon_0 = const}$$

# Warunki brzegowe

$$\psi(z,t) = \cos(\omega t + \varphi)\left[A\sin(2\pi \frac{z}{\lambda}) + B\cos(2\pi \frac{z}{\lambda})\right]$$

Struna zamocowana w *z*=0 oraz *z*=*L*, stąd

$$\psi(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \qquad \psi(z,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\sin(2\pi \frac{z}{\lambda})$$

$$\psi(L,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2\pi \frac{L}{\lambda}) = 0$$

$$\Downarrow$$

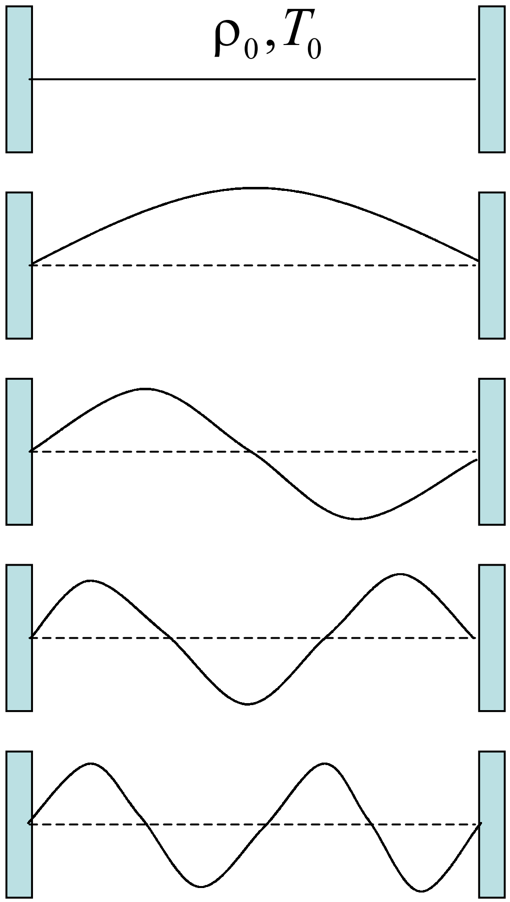
$$2\pi \frac{L}{\lambda_n} = \pi, 2\pi, 3\pi, .....n\pi$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2L, \quad \lambda_2 = L = \frac{1}{2}\lambda_1, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}L = \frac{1}{3}\lambda_1, \ldots \ \lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{1}{n}\lambda_1,}$$

$$\boxed{\nu_1 = \frac{\upsilon_0}{\lambda_1}, \quad \nu_2 = \frac{2\upsilon_0}{\lambda_1} = 2\nu_1, \quad \nu_3 = 3\nu_1, \ldots \ \nu_n = n\nu_1}$$

Częstości harmoniczne!

# Postacie drgań struny (zamocowanej z dwóch końców)




$$\lambda_1 = 2L, \; v_1 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\,\frac{1}{\lambda_1}$$

$$\lambda_2 = L, \; v_2 = 2v_1$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L, \; v_3 = 3v_1$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}L, \; v_4 = 4v_1$$

Częstości strun zamocowanych np. z jednego końca, lub z dwoma końcami swobodnymi są inne. Warto sprawdzić…

# Związek dyspersyjny

$$\lambda\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \Rightarrow 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}$$

Wprowadzamy liczba falową $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho_0}}\,k$

$$\boxed{\omega(k) = \upsilon_0 k}$$

prędkość fazowa

Wartość *k* zależny od warunków brzegowych- dla $\lambda_1$:

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{L}$$

Fale stojące nie biegną, ale można je złożenie
fal biegnących w przeciwne strony ….

# Analiza Fouriera

Najogólniejsze równanie ruchu struny ciągłej, otrzymujemy przez superpozycję Wszystkich drgań normalnych

$$\psi(z,t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)\sin(k_1 z) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)\sin(k_2 z) + \ldots.$$

Częstość i liczba falowa są ze sobą związane $\omega_n(k) = \upsilon_0 k_n$

Rozważmy warunek początkowy:

$$\psi(z,0) = f(z)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(z,0) = 0, \text{ dla } t = 0$$

Prędkość początkowa struny równa zeru

Dopuszczając przesunięcia fazowe φ=0, φ=π (warunek znikania predkosci)
Takie zalozenie dopuszcza zmiane znaku poszczególnych amplitud, $A_1$, $A_{2}$,… )

$$\psi(z,t) = A_1 \sin(k_1 z)\cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(k_2 z)\cos(\omega_2 t) + \ldots.$$

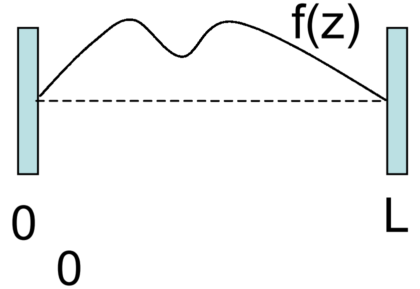
$$\boxed{f(z) = \psi(z,0) = A_1 \sin(k_1 z) + A_2 \sin(k_2 z) + \ldots.}$$

Rozwinięcie Fouriera (szereg Fouriera) funkcji f(z)!

# Rozwinięcie funkcji okresowej z

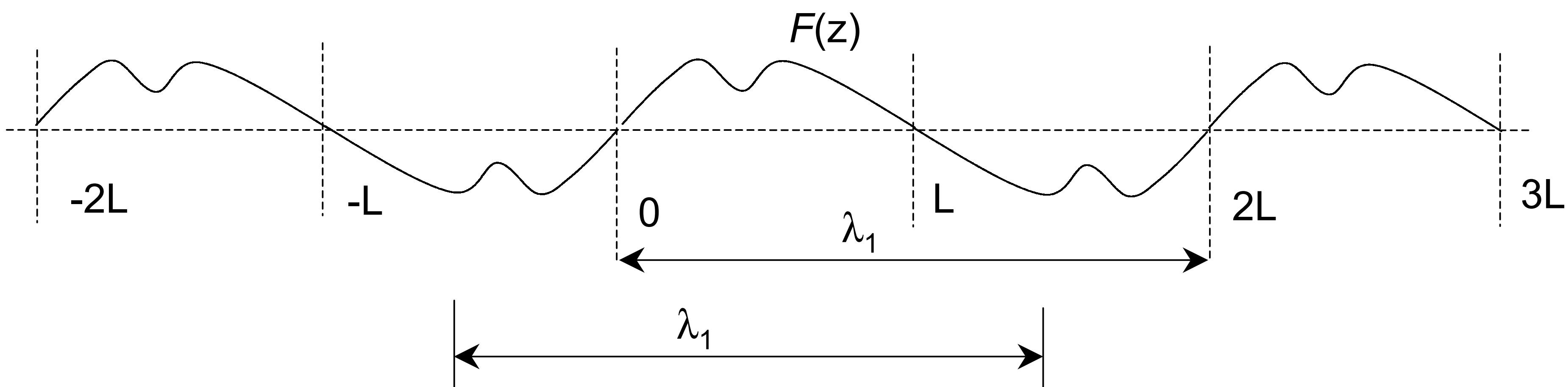
Przypadek szczególny dla struny zamocowanej w z=0 oraz z=L:

$$f(z) = \psi(z,0) = A_1 \sin(k_1 z)\cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(k_2 z)\cos(\omega_2 t) + \ldots.$$




f(z) – okresowa z okresem $k_1$, $k_2$, $k_3$ …

Uogólnienie – konstruujemy funkcję…




$F$(z) – okresowa z okresem $k_1$, $k_2$, $k_3$ …

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n \sin(nk_1 z) + B_n \cos(nk_1 z)]$$

# Rozwinięcie w szereg Fouriera („*rozsądnej*”) funkcji *F*(z)

$$\boxed{F(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nk_1 z)}$$

$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)dz$$

$$A_m = \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\sin(mk_1 z)dz$$

$$B_m = \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\cos(mk_1 z)dz$$

# Wygoda obliczeń

Ponieważ $$e^{imk_1 z} = \cos(mk_1 z) + i\sin(mk_1 z)$$

$$\boxed{B_m + iA_m = \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)e^{imk_1 z}\,dz}$$

$$A_m = \mathrm{Im}\left(\frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)e^{imk_1 z}\,dz\right)$$

$$B_m = \mathrm{R}e\left(\frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)e^{imk_1 z}\,dz\right)$$

# Wyznaczenie współczynników

$$F(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nk_1 z) \quad **$$

Współczynnik $B_0$

Całkujemy obustronnie ** od $z_1$ do $z_2=z_1+\lambda_1$ (czyli po okresie $\lambda_1=2L$)

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)dz = \lambda_1 B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} A_n \sin(nk_1 z)dz + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} B_n \cos(nk_1 z)$$

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} B_0 dz = B_0 \lambda_1$$

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} A_n \sin(nk_1 z)dz = 0$$

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} B_n \cos(nk_1 z)dz = 0$$

bo całkujemy funkcje okresowe po wielokrotności okresu ($\lambda_1$ – najdluzszy okres)

Stąd rzeczywiście:

$$\boxed{B_0 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)dz}$$

# Wyznaczenie współczynników

$$F(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nk_1 z) \quad **$$

Współczynniki $A_n$

Mnożymy obustronnie przez sin($mk_1z$) obustronnie ** i całkujemy od $z_1$ do $z_2=z_1+\lambda_1$ (czyli po okresie $\lambda_1$=2L).

1) calka z $B_0$ znika, bo calkujemy funkcje okresowa po okresie…

2) Dla n=m
$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} A_n \sin^2(mk_1 z)dz = \frac{1}{2} A_n \lambda_1$$

3) Dla n≠m
$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} A_n \sin(mk_1 z)\sin(nk_1 z)dz = 0$$

Gdyż zachodzi tożsamość

$$\sin(mk_1 z)\sin(nk_1 z) = \frac{1}{2}\cos((n-m)k_1 z) - \frac{1}{2}\cos((m+n)k_1 z)$$

Każdy z dwóch wyrazów po prawej stronie jest równie często dodatni jak i ujemny, więc całka po okresie $\lambda_1$ znika!

$$\boxed{\frac{1}{2} A_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\sin(mk_1 z)dz}$$

# Wyznaczenie współczynników

Współczynniki $B_n$

Mnożymy obustronnie przez cos($mk_1z$) obustronnie ** i całkujemy od $z_1$ do $z_2=z_1+\lambda_1$ (czyli po okresie $\lambda_1=2L$) i dalej podobnie jak z $A_m$

Korzystamy z tego, że

$$\cos(mk_1z)\sin(nk_1z) = \frac{1}{2}\sin((m+n)k_1z) + \frac{1}{2}\sin((m-n)k_1z)$$

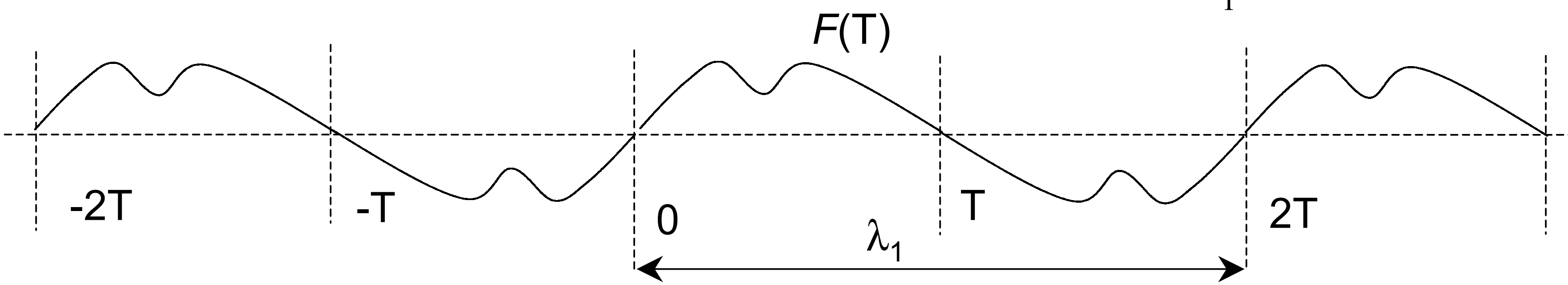
Prócz całki dla $m=n$ odpowiednie całki znikają i dostajemy:

$$\boxed{\frac{1}{2}B_m\lambda_1 = \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\cos(mk_1z)dz}$$

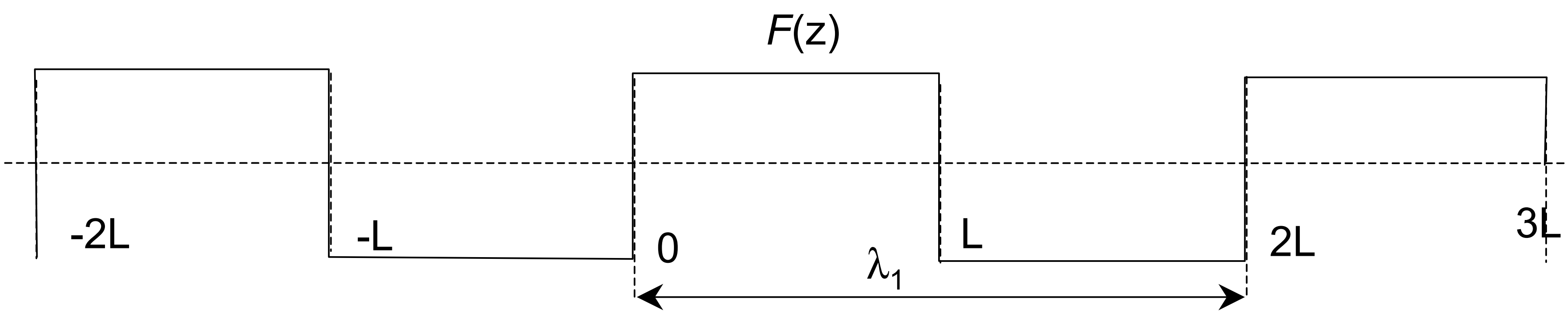
# Analiza Fourierowska funkcji zależnej od czasu

Wystarczy zastąpić $k_1 z \Leftrightarrow \omega_1 t$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$



# Rozpatrzmy rozkład funkcji prostokątnej

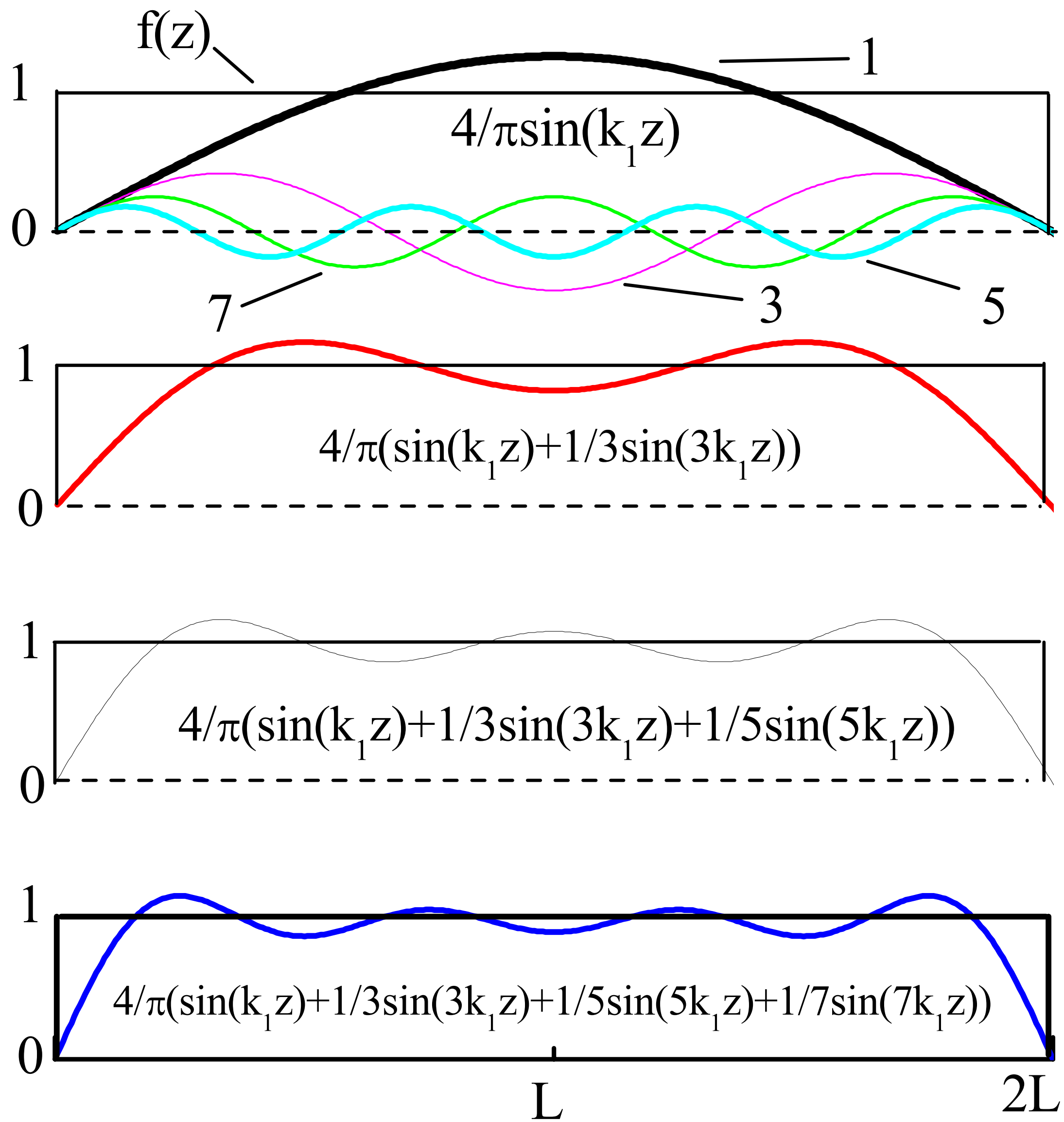



$$\boxed{B_m = 0}$$

$$\boxed{A_m = \begin{cases} 0 & \text{dla m parzystych} \\ \dfrac{4}{\pi m} & \text{dla m nieparzystych} \end{cases}}$$

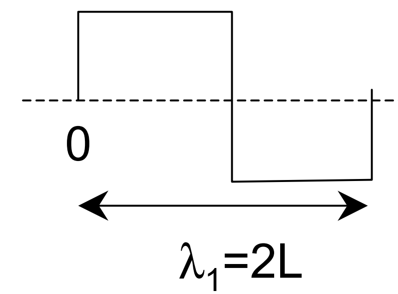
$$F(z) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi z}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi z}{L} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi z}{L} \ldots\ldots \frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{L}\right]$$

# Prostokąt…

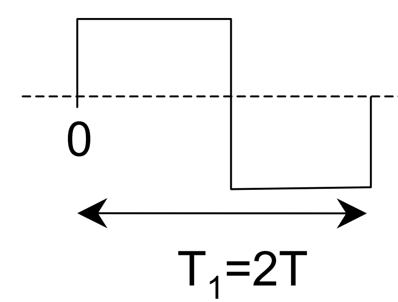



Analiza przebiegów periodycznych w przestrzeni

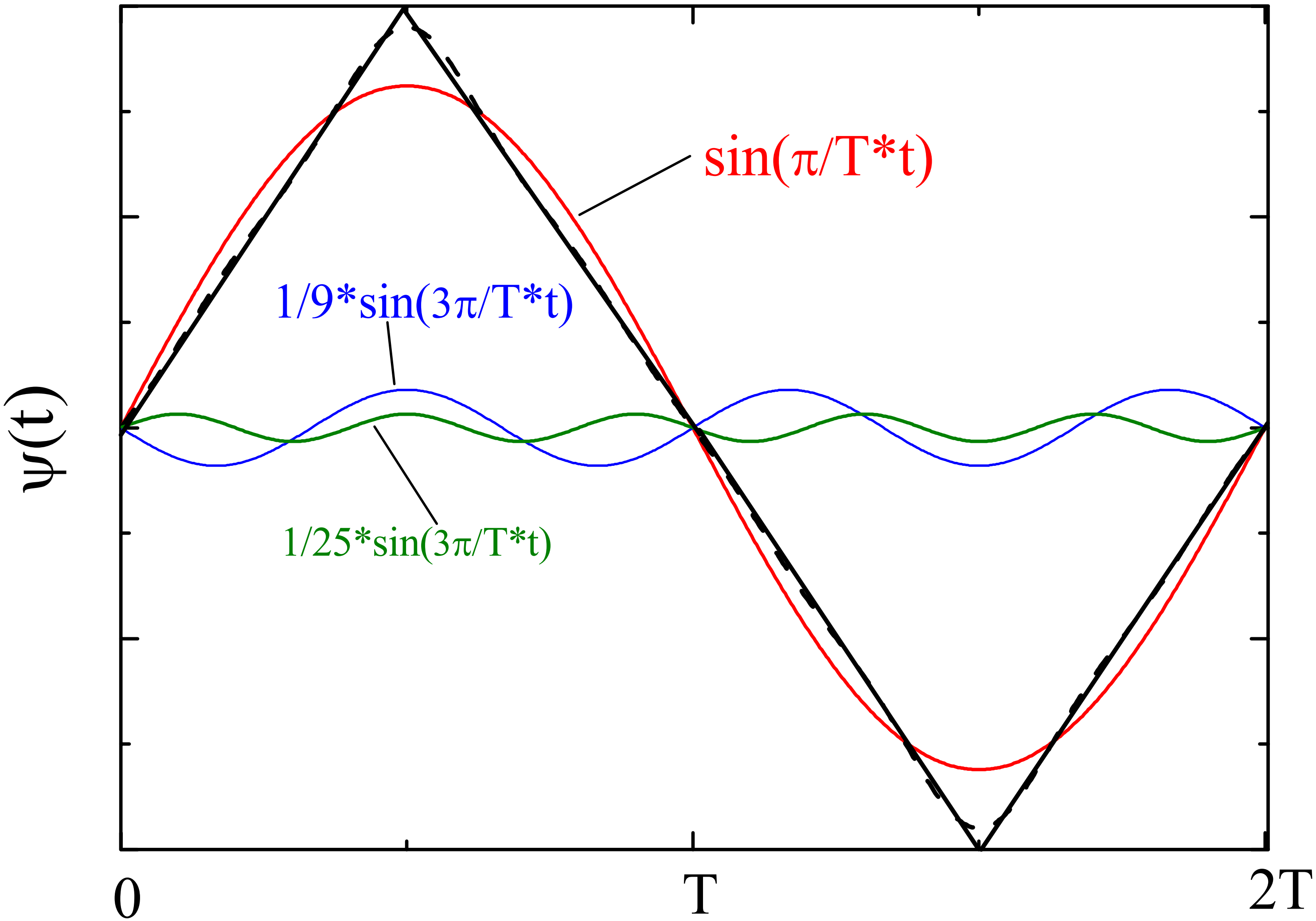
$k_1 z \Leftrightarrow \omega_1 t$




Analiza przebiegów periodycznych w czasie



# Przebieg trójkątny




$$F(t) = A(\sin(\frac{\pi}{T}t) - \frac{1}{9}\sin(\frac{3\pi}{T}t) + \frac{1}{25}\sin(\frac{5\pi}{T}t) - ....$$

# Ewolucja czasowa struny

Znając współczynniki w szeregu Fouriera dla kształtu struny w chwili t=0,

$$f(z) = \psi(z,0) = A_1 \sin(k_1 z) + A_2 \sin(k_2 z) + \ldots.$$

Możemy określić ewolucje czasową drgań struny.
Wystarczy dołożyć odpowiednie czynniki czasowe!

$$\psi(z,t) = A_1 \sin(k_1 z)\cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(k_2 z)\cos(\omega_2 t) + \ldots.$$

Dla struny, której wychylenie w chwili początkowej miało kształt trójkąta będziemy mieć:

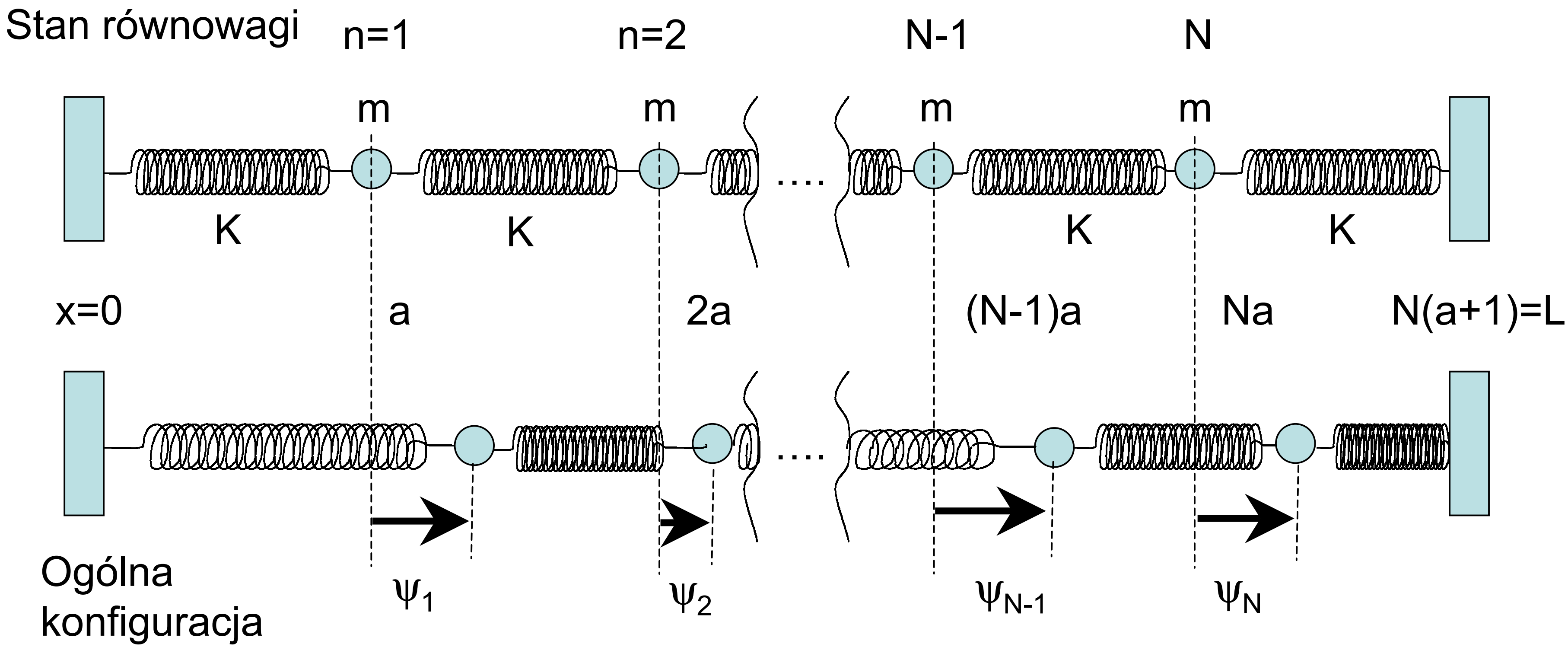
$$\psi(z,t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi z}{L}\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi z}{L}\cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi z}{L}\cos(5\omega_1 t) + \ldots.\right]$$

Najlepiej zasymulować to samodzielnie na komputerze…

# Układy dyskretne raz jeszcze…

# Drgania podłużne układu mas i sprężynek

Rozpatrzmy *N* ciężarków połączonych *N*+1 sprężynek




Równanie ruchu dla *n*-tego ciężarka

$$m\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n+1})$$

# Postacie drgań normalnych

$$\boxed{\begin{aligned}
\psi_1 &= A_1\cos(\omega t+\varphi)\\
\psi_2 &= A_2\cos(\omega t+\varphi)\\
&\dots\\
\psi_{n-1} &= A_{n-1}\cos(\omega t+\varphi)\\
\psi_n &= A_n\cos(\omega t+\varphi)\\
\psi_{n+1} &= A_{n+1}\cos(\omega t+\varphi)
\end{aligned}}$$

Obliczmy:

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\omega^2\psi_n = -\omega^2 A_n\cos(\omega t+\varphi)$$

Po podstawieniu do równania:

$$m\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = K(\psi_{n+1}-\psi_n) - K(\psi_n-\psi_{n+1})$$

…i pozbyciu się czynnika cos(ωt), dostajemy

$$-m\omega^2 A_n = K(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1})$$

Stad równanie wyznaczajace konfiguracje drgan wlasnych o czestosci ω

$$(A_{n+1} + A_{n-1}) = A_n(2 - \frac{m}{K}\omega^2)$$

Przez analogię do struny poszukajmy rozwiązań postaci:

$$\boxed{A_n = A\sin(\frac{2\pi}{\lambda}na) = A\sin(kna)}$$

$\lambda$ - długość fali $\quad$ *k* – liczba falowa

$$A_{n+1} = A\sin(k(n+1)a) = A\sin(kna + ka) = A[\sin(kna)\cos(ka) + \cos(kna)\sin(ka)]$$

$$A_n = A\sin(kna)$$

$$A_{n-1} = A\sin(k(n-1)a) = A\sin(kna - ka) = A[\sin(kna)\cos(ka) - \cos(kna)\sin(ka)]$$

po dodaniu stronami:

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A\sin(kna)\cos(ka) = 2A_n\cos(ka)$$

Stąd

$$2A_n\cos(ka) = A_n(2 - \frac{m}{K}\omega^2) \quad \Rightarrow \quad 2\cos(ka) = 2 - \frac{m}{K}\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{m}(1-\cos(ka)) = \frac{2K}{m}(1-(\cos^2(\frac{ka}{2}) - \sin^2(\frac{ka}{2}))) = \frac{4K}{m}\sin^2(\frac{ka}{2})$$

Czyli ostatecznie:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{4K}{m}\sin^2(\frac{ka}{2})}$$

Warto przećwiczyć użycie liczb zespolonych, badając rozwiązania postaci

$$A_n^* = Ce^{ikna}$$

Zależność pomiędzy częstością ω a liczba falowa *k* (czy tez dlugoscia fali λ) wyraza **zwiazek dyspersyjny** dla ukladu mas polaczonych sprezynkami.

# Rozwiązanie ogólne

$$A_n = A\sin(kna)$$

$$\psi_n(t) = A\sin(kna)\cos[\omega(k)t + \varphi]$$

Warunek znikania dla z=0 spełniony (zerowy ciężarek unieruchomiony)

Warunek znikania wychylenia dla z=*L*=(*N*+1)*a*, (unieruchomienie *N*+1 ciężarka…)

$$A_{N+1} = A\sin(k(N+1)a) = A\sin(kL) = 0$$

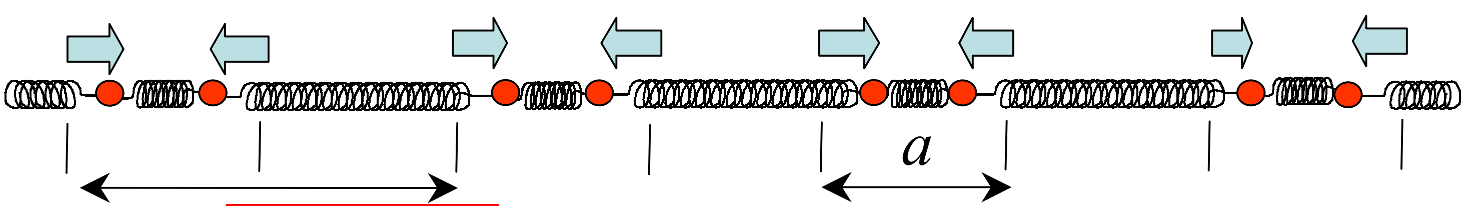
Istnieje N rozwiązań tego równania:

$$k_1 L = \pi\,, \quad k_2 L = 2\pi\,, \; \ldots . k_m L = m\pi\,, \; \ldots . \; k_N L = N\pi$$

Istnieje Ograniczenie!

$$\boxed{k_{\max} = \frac{N}{L}\pi}$$

$$\boxed{\lambda_{\min} = \frac{2\pi}{k_{\max}} = \frac{2\pi}{N\pi}L = \frac{2L}{N} = 2a}$$



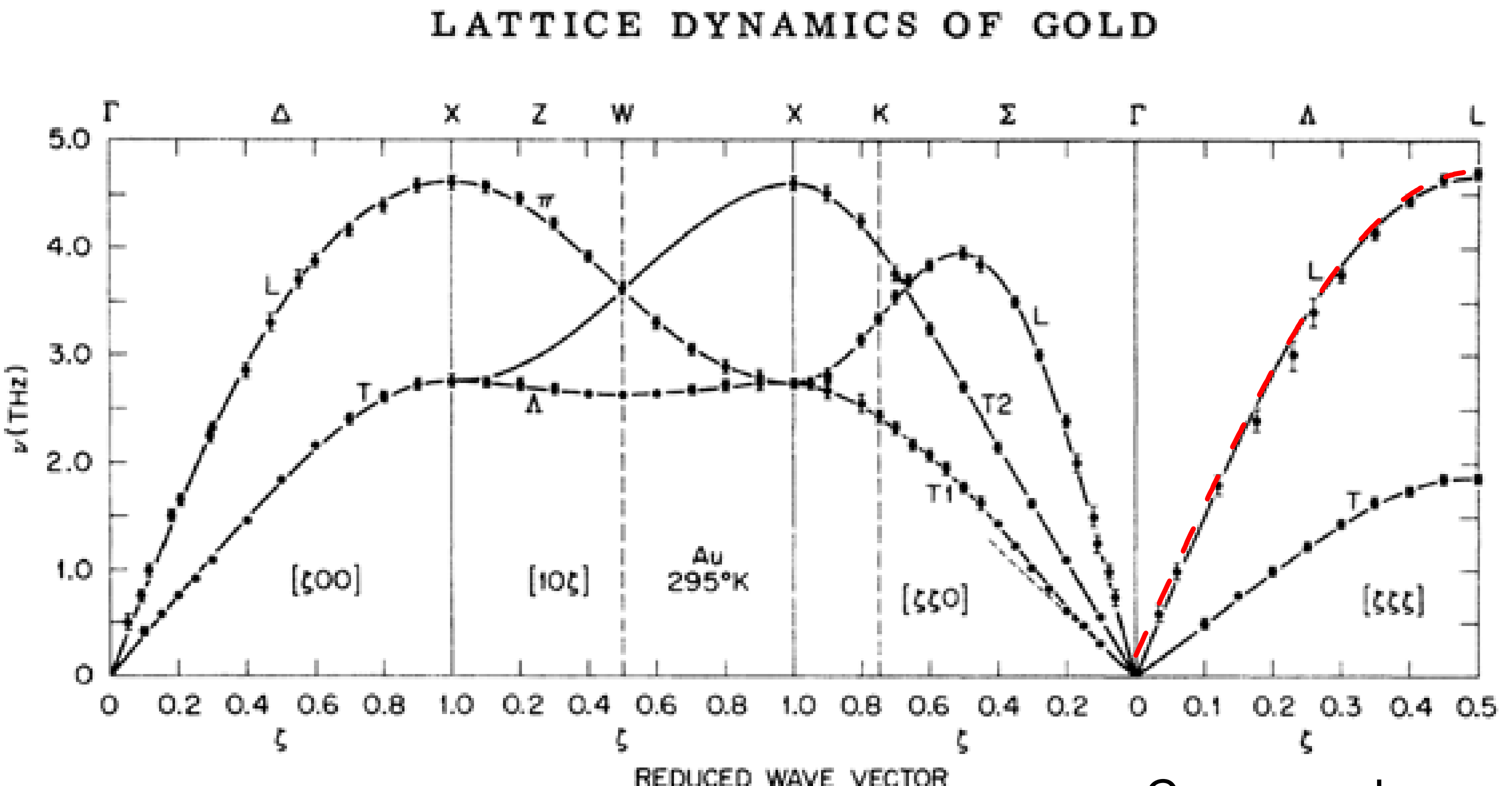

$$\boxed{\lambda_{\min} = 2a}$$

To cecha układów dyskretnych!

# Dyspersja dla fononów w złocie

Model kryształu – atomy (masy) połączone sprężynkami

Drgania sieci – fonony (drgania własne, czy też fale propagujące się w kryształach)




J. W. Lynn, H. G. Smith, and R. M. Nicklow
Phys. Rev. B **8**, 3493 (1973)

Prosty model nieźle pracuje…

Czerwone krzywa:

$$\omega = \omega_0 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$