

# **„Fizyka materii skondensowanej i struktur półprzewodnikowych” (1101-4FS22)**

Tomasz Kazimierczuk

Zakład Fizyki Ciała Stałego  
Instytut Fizyki Doświadczalnej  
Wydział Fizyki  
Uniwersytet Warszawski

# Przykłady gęstości stanów

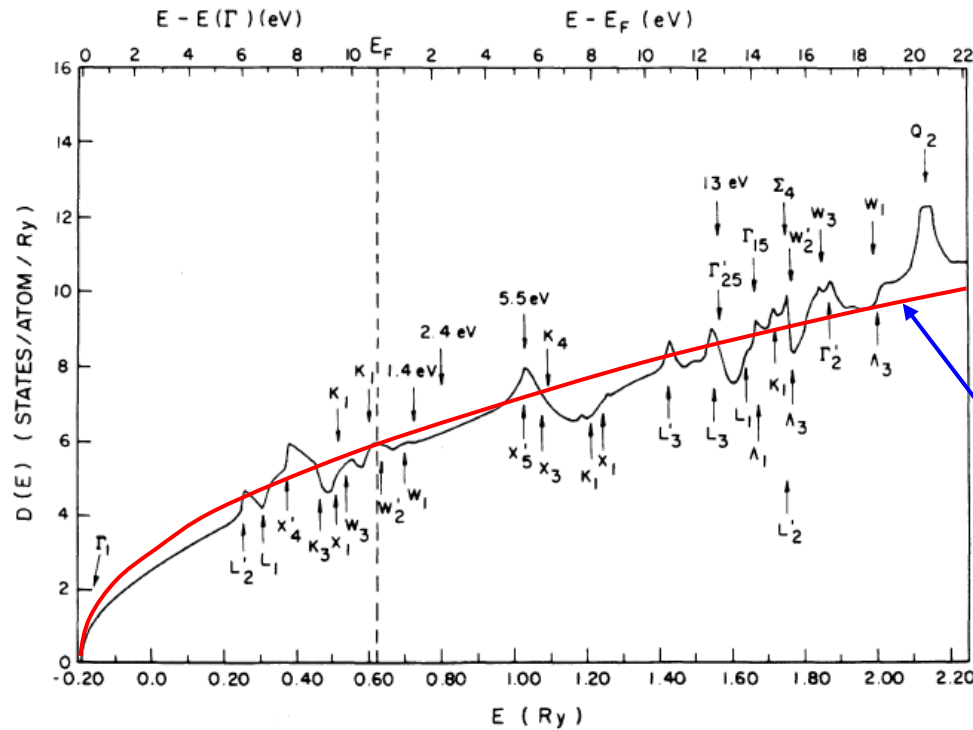
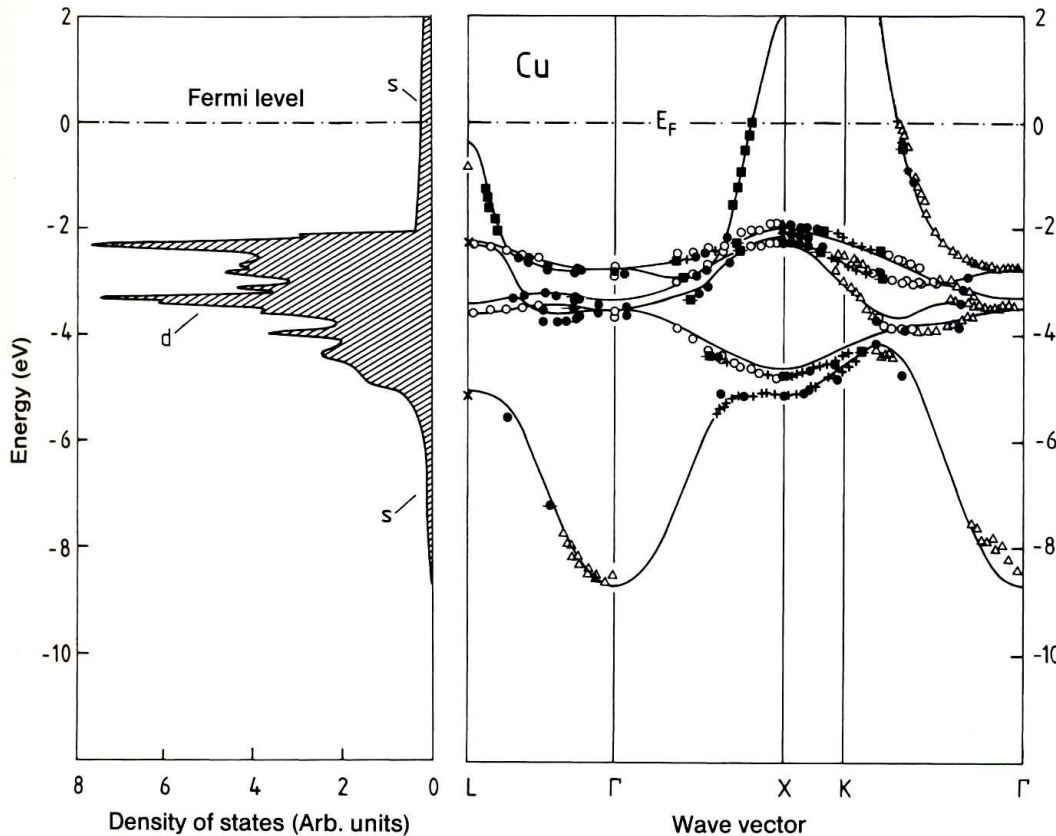


FIG. 2. Density of states of Al. The states responsible for structure are indicated by letters denoting their irreducible representations. The arrows at 1.4, 2.4, 5.5, and 13 eV indicate the location of structure in the experimental  $K$  absorption in Ref. 6.

***gęstość stanów prawie jak dla elektronów swobodnych!***

Szmulowicz, F., Segall, B.: Phys. Rev. B**21**, 5628 (1980).

# Przykłady gęstości stanów



Cu:

$[1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6] 3d^{10} 4s^1$

$[Ar] 3d^{10} 4s^1$

*elektrony d !*

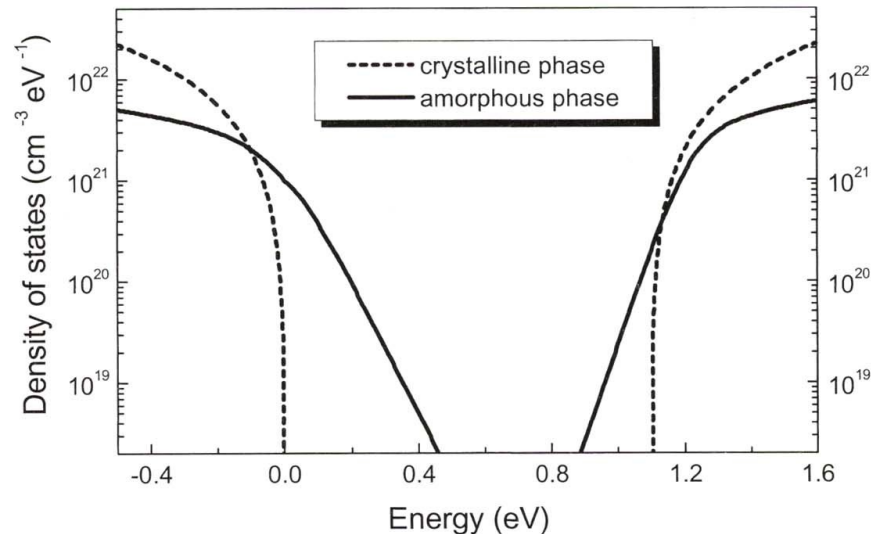
*bardzo słabo dyspersyjne  
pasma d*

**Fig. 7.12.** Bandstructure  $E(\mathbf{k})$  for copper along directions of high crystal symmetry (right). The experimental data were measured by various authors and were presented collectively by Courths and Hüfner [7.4]. The full lines showing the calculated energy bands and the density of states (left) are from [7.5]. The experimental data agree very well, not only among themselves, but also with the calculation

H. Ibach, H. Lüth, Solid-State Physics –  
za H. Eckhardt, L. Fritsche, J. Noffke: *J.*  
*Phys. F*, 14, 97 (1984)

# Gęstość stanów w ciałach amorficznych

*Gęstość stanów  $\rho(E)$  ma sens niezależnie od tego, czy mamy do czynienia z kryształem, czy np. z ciałem amorficznym.* Opis stanów za pomocą wektora falowego  $\vec{k}$  (a więc także  $\rho(\vec{k})$ ) ma jednak sens *wyłącznie* w przypadku istnienia symetrii translacyjnej hamiltonianu (kryształ).



**Fig. 7.15.** Schematic density of states of an ideal amorphous material with saturated tetrahedral bonds to the nearest-neighbors (*full line*). The numbers for the density of states correspond to amorphous silicon. Compared to crystalline silicon (*dashed line*) the density of states possesses exponential tails into the band gap. Non-saturated bonds in the amorphous network lead to additional states in the forbidden zone. For practical applications of amorphous silicon (e.g. in solar cells) one attempts to reduce the number of unsaturated bonds by adding hydrogen

# Gęstość stanów – pasmo paraboliczne i sferyczne

- Zależność dyspersyjna dla pasma parabolicznego i sferycznego:

$$E(\vec{k}) = E(k) = E_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

- Liczba stanów w obszarze energii  $E_0 \div E$ :

$$N(E) = \int_{E_0}^E \rho(E') dE'$$

- Gęstość stanów:

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE}$$

- Trzeba obliczyć  $N(E)$  i zróżniczkować, pamiętając że (z uwzględnieniem spinu):

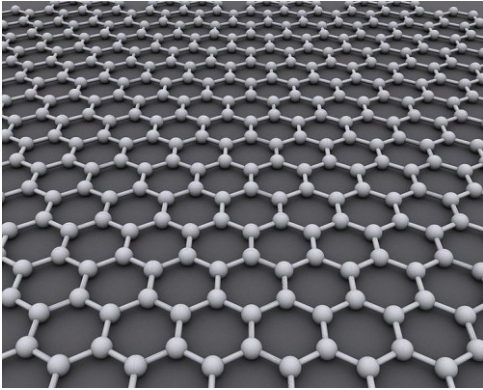
$$\rho_n(\vec{k}) = \frac{2}{(2\pi)^n}$$

# Gęstość stanów – pasmo paraboliczne i sferyczne

| n=1                                                                                                            | n=2                                                                                     | n=3                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $N_1(E) = 2k(E) \cdot \rho_1(\vec{k}) =$ $= 2k(E) \cdot \frac{2}{2\pi}$                                        | $N_2(E) = \pi[k(E)]^2 \cdot \rho_2(\vec{k}) =$ $= \pi[k(E)]^2 \cdot \frac{2}{(2\pi)^2}$ | $N_3(E) = \frac{4\pi}{3}[k(E)]^3 \cdot \rho_3(\vec{k}) =$ $= \frac{4\pi}{3}[k(E)]^3 \cdot \frac{2}{(2\pi)^3}$ |
| $k(E) = \left[ \frac{2m^*(E - E_0)}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}}$                                            | $k^2(E) = \frac{2m^*(E - E_0)}{\hbar^2}$                                                | $k^3(E) = \left[ \frac{2m^*(E - E_0)}{\hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}}$                                         |
| $N_1(E) = 2 \left[ \frac{2m^*(E - E_0)}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{2\pi}$                   | $N_2(E) = \pi \frac{2m^*(E - E_0)}{\hbar^2} \cdot \frac{2}{(2\pi)^2}$                   | $N_3(E) = \frac{4\pi}{3} \left[ \frac{2m^*(E - E_0)}{\hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{(2\pi)^3}$ |
| $\rho_1(E) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(E - E_0)}}$ | $\rho_2(E) = \frac{1}{\pi} \frac{m^*}{\hbar^2} \cdot \Theta(E - E_0)$                   | $\rho_3(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(E - E_0)}$       |

# Gęstość stanów – liniowa zależność dyspersyjna

P. R. Wallace, „The Band Theory of Graphite”, *Physical Review* **71**, 622 (1947).



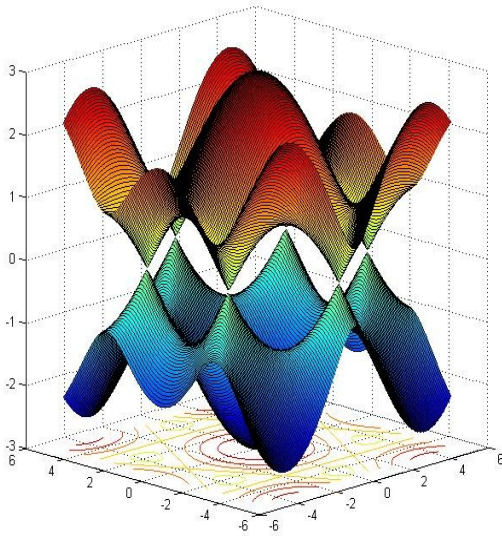
- Metoda ciasnego wiązania
- Przy uwzględnieniu oddziaływania wyłącznie pomiędzy najbliższymi sąsiadami:

$$E(\vec{k}) = \pm \sqrt{\gamma_0^2 \left( 1 + 4 \cos^2 \frac{k_y a}{2} + 4 \cos \frac{k_y a}{2} \cdot \cos \frac{k_x \sqrt{3} a}{2} \right)}$$

- 6 punktów na granicy 1BZ w  $\vec{k} = \vec{k}_i$ , wokół których mamy liniową zależność dyspersyjną:

$$E(\vec{k}) = \hbar \tilde{c} |\vec{k} - \vec{k}_i|$$

- jak w takim przypadku wygląda gęstość stanów?



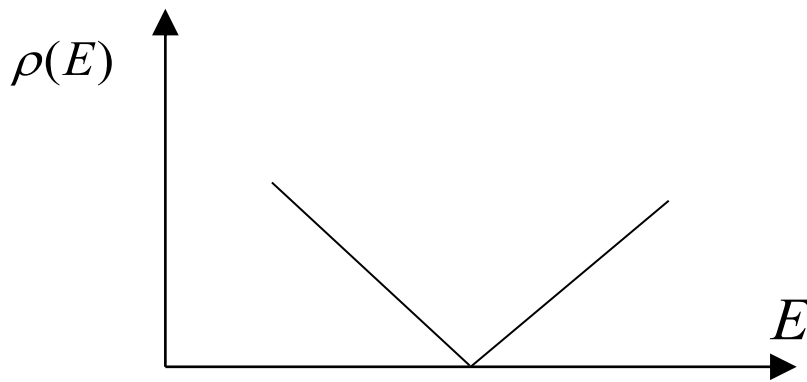
# Gęstość stanów – liniowa zależność dyspersyjna

- Energia:  $E(\vec{k}) = \hbar\tilde{c}|\vec{k} - \vec{k}_i|$
- Wektor falowy:  $|\vec{k} - \vec{k}_i| = \frac{E(\vec{k})}{\hbar\tilde{c}}$
- Liczba stanów:

$$N_2(E) = \pi[k(E)]^2 \cdot \rho_2(\vec{k}) = \pi|\vec{k} - \vec{k}_i|^2 \cdot \frac{2}{(2\pi)^2} = \pi\left(\frac{E}{\hbar\tilde{c}}\right)^2 \cdot \frac{2}{(2\pi)^2}$$

- Gęstość stanów:

$$\rho(E) = \frac{E}{\pi(\hbar\tilde{c})^2}$$



*liniowa w funkcji energii*

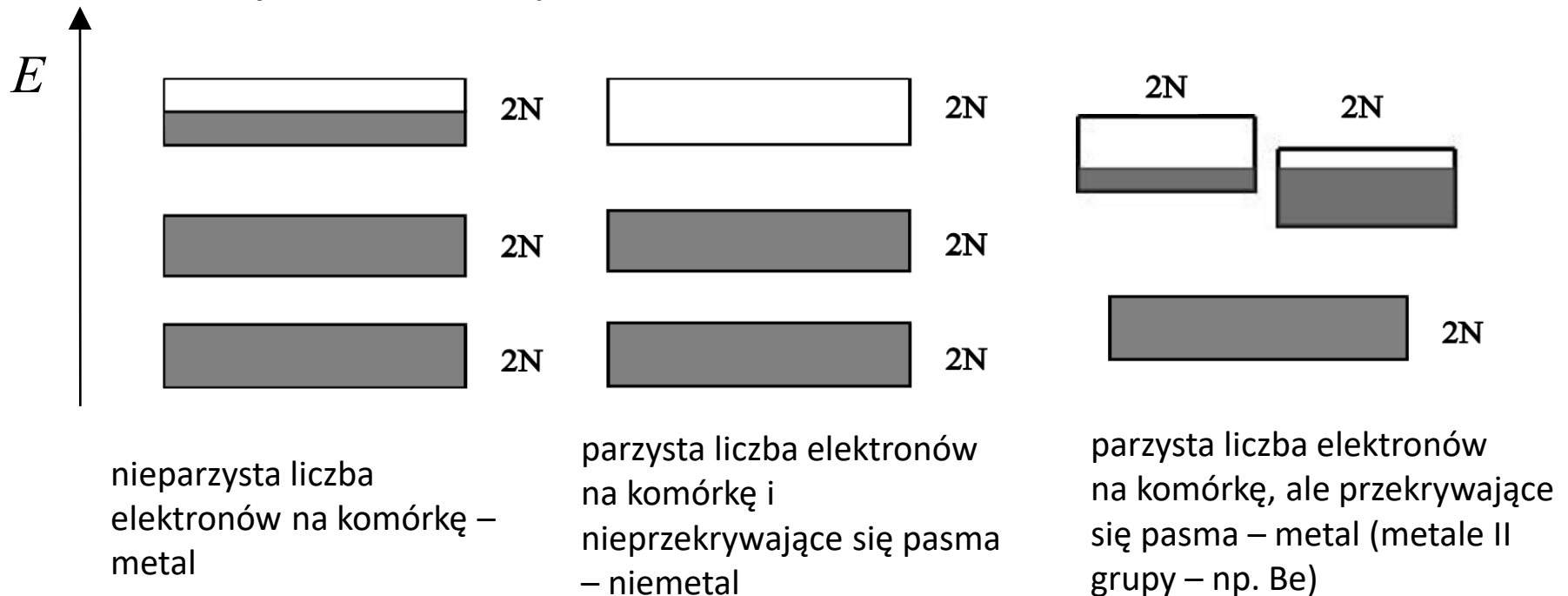


Struktura pasmowa stanów elektronowych

# **KLASYFIKACJA CIAŁ STAŁYCH (METALE, NIEMETALE)**

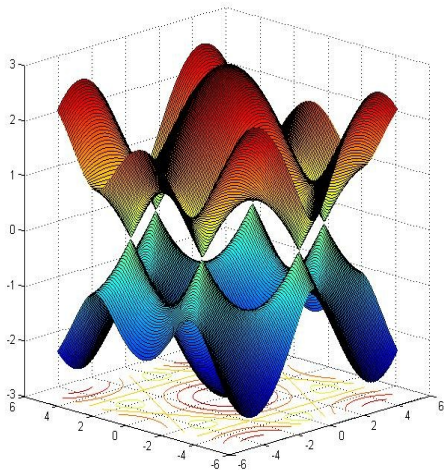
# Klasyfikacja ciał stałych

- Jeśli w kryształie makroskopowym mamy  $N$  komórek elementarnych, to każdemu stanowi atomowemu (patrz metoda ciasnego wiązania), odpowiada  $N$  lub  $2N$  miejsc na elektrony – odpowiednio: bez uwzględnienia spinu lub z uwzględnieniem spinu
- W takim razie, jeśli uwzględnić spin, to w **każdym paśmie** jest  $2N$  miejsc na elektrony



# Klasyfikacja ciał stałych

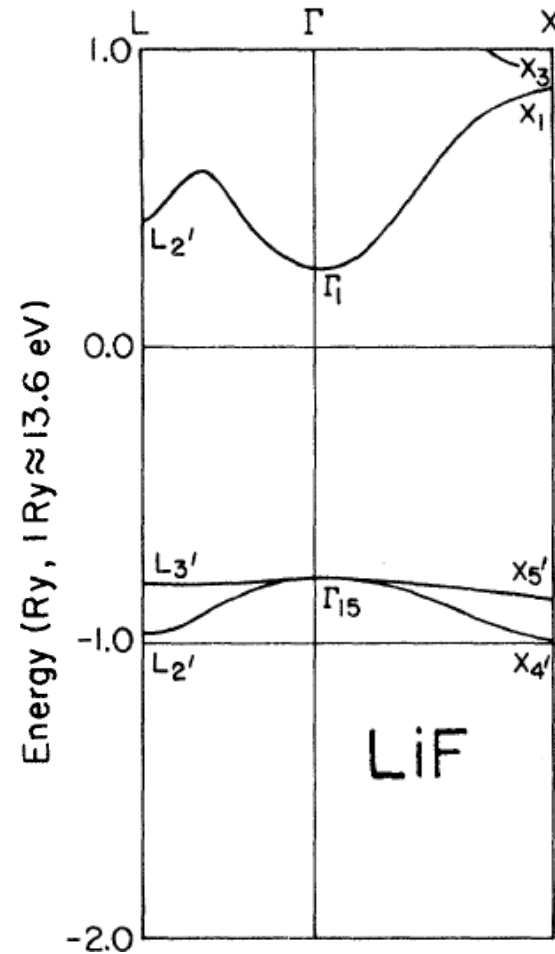
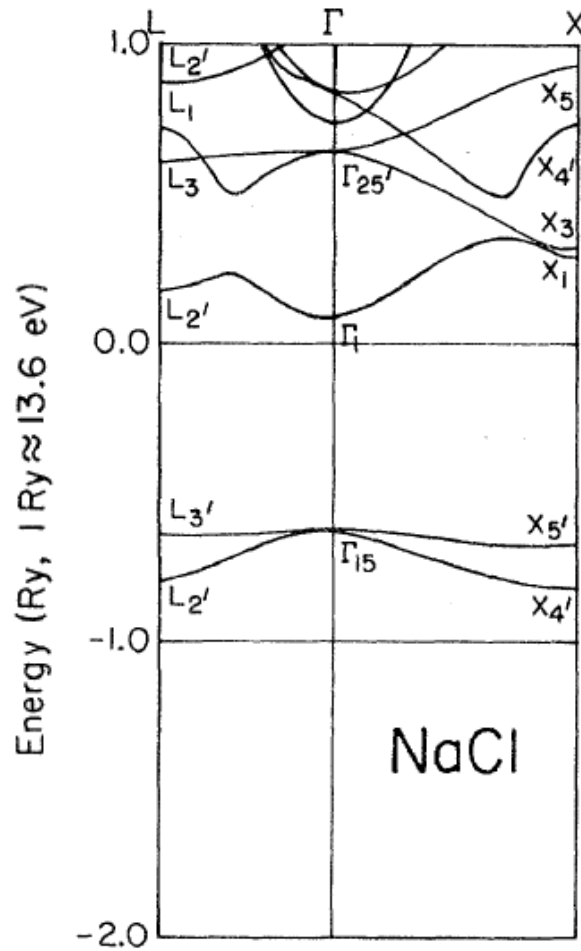
- Niemetale: izolatory i półprzewodniki – klasyfikacja zależna od wielkości przerwy energetycznej oddzielającej najwyższe pasmo całkowicie zajęte od najniższego całkowicie pustego (w  $T=0$  K). Granica umowna około 4 – 5 eV.
- Często wyróżnia się też osobną klasę półmetali („semimetals”, odróżniać od „half-metals”) – są to materiały ze stykającymi się pasmami (lub przekrywającymi się bardzo nieznacznie) – zajętym i pustym w  $T=0$  K, ale małą (bądź zerową) gęstością stanów dla energii styku pasm. Przykład:  
grafen



Właściwe dokonanie klasyfikacji wymaga:

1. określenia liczby elektronów na komórkę elementarną
2. znajomości struktury pasmowej (czy odpowiednie pasma przekrywają się)

# Izolatory



Kunz, A.B.: Phys. Rev. **B26**, 2056 (1982)

# Metale – Al

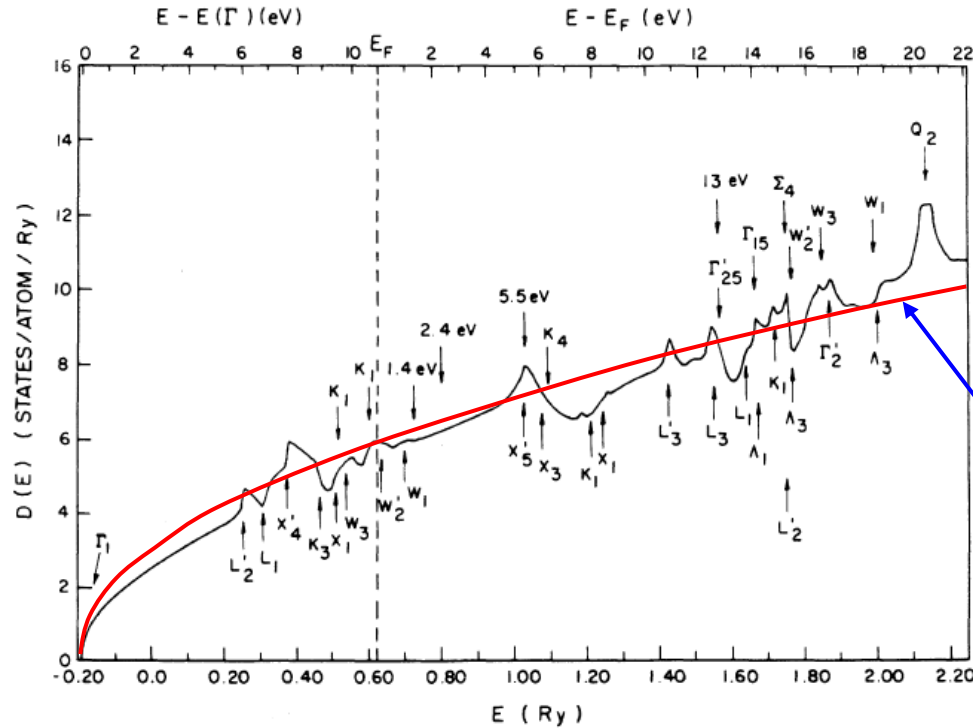
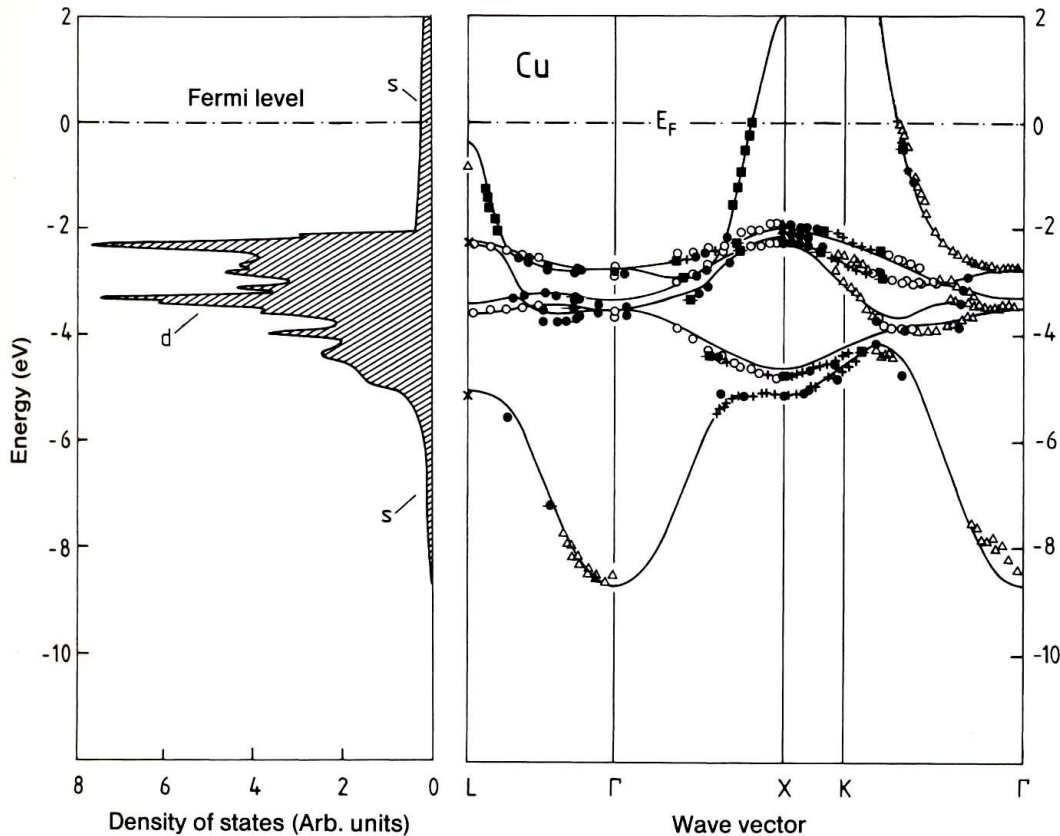


FIG. 2. Density of states of Al. The states responsible for structure are indicated by letters denoting their irreducible representations. The arrows at 1.4, 2.4, 5.5, and 13 eV indicate the location of structure in the experimental  $K$  absorption in Ref. 6.

*gęstość stanów prawie jak dla elektronów swobodnych!*

Szmulowicz, F., Segall, B.: Phys. Rev. B **21**, 5628 (1980).

# Metale – Cu



**Fig. 7.12.** Bandstructure  $E(\mathbf{k})$  for copper along directions of high crystal symmetry (right). The experimental data were measured by various authors and were presented collectively by Courths and Hüfner [7.4]. The full lines showing the calculated energy bands and the density of states (left) are from [7.5]. The experimental data agree very well, not only among themselves, but also with the calculation

Cu:

$[1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6] 3d^{10} 4s^1$

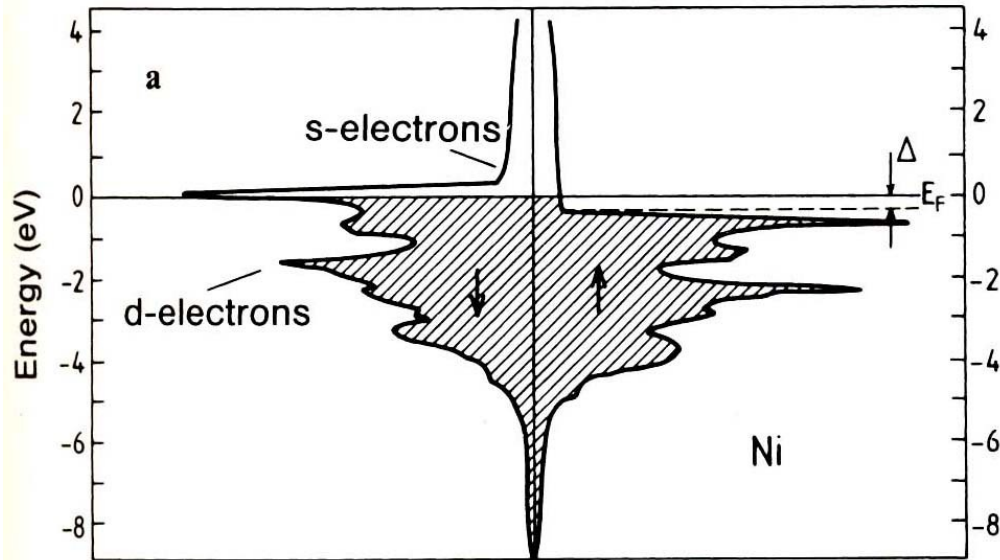
$[Ar] 3d^{10} 4s^1$

*elektrony d !*

*bardzo słabo dyspersyjne  
pasma d*

H. Ibach, H. Lüth, Solid-State Physics –  
za H. Eckhardt, L. Fritsche, J. Noffke: *J.*  
*Phys. F*, 14, 97 (1984)

# Metale – Ni



**Fig. 8.6. (a)** Calculated density of states of nickel (after [8.3]). The exchange splitting is calculated to be 0.6 eV. From photoelectron spectroscopy a value of about 0.3 eV is obtained. However the values cannot be directly compared, because a photoemitted electron leaves a hole behind, so that the solid remains in an excited state. The distance  $\Delta$  between the upper edge of the  $d$ -band of majority spin electrons and the Fermi energy is known as the Stoner gap. In the bandstructure picture, this is the minimum energy for a spin flip process (the  $s$ -electrons are not considered in this treatment).

Ni:

$[1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6] 3d^9 4s^1$

$[Ar] 3d^9 4s^1$

uporządkowanie  
ferromagnetyczne, rozszczepienie  
wymienne, różne energie stanów z  
różnym spinem, dwie różne  
gęstości stanów dla spinu  $\uparrow$  i  $\downarrow$

gdyby nie elektrony  $s$ ,  
byłby to „half-metal”

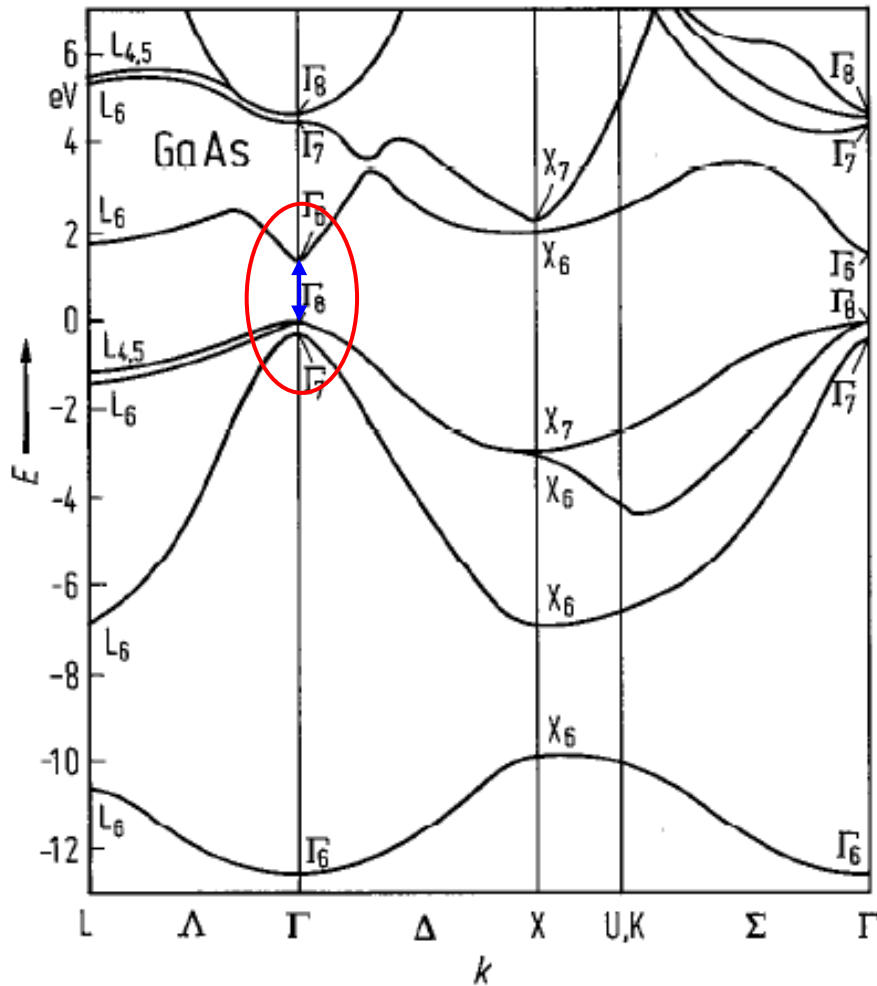
H. Ibach, H. Lüth, Solid-State Physics – za J. Callaway, C.S. Wang, *Physical Review B*, **7**, 1096 (1973)

# Półprzewodniki

- Półprzewodniki grupy IV (Si, Ge) – struktura diamentu
- Związki półprzewodnikowe  $A^{III}B^V$  (np. GaAs, GaN) i  $A^{II}B^{VI}$  (np. ZnTe, CdSe) – struktura blendy cynkowej lub wurcytu
- Związki półprzewodnikowe  $A^{IV}B^{VI}$  (np. SnTe, PbSe) – struktura NaCl



# Półprzewodniki – GaAs

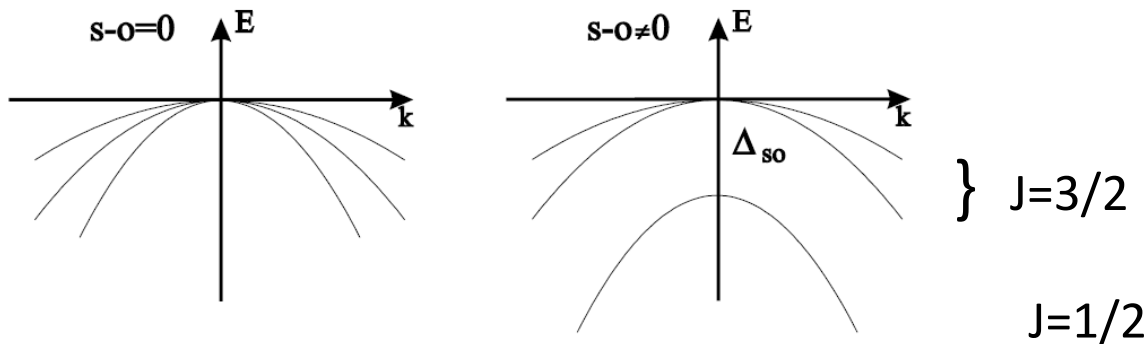


- Przerwa energetyczna prosta,  $E_g = 1,42 \text{ eV}$
- Maksimum pasma walencyjnego w punkcie  $\Gamma$ ,  $m_{lh}=0,076 m_0$ ,  $m_{hh}=0,5 m_0$ ,  $m_{so}=0,145 m_0$ ,  $\Delta_{so}=0,34 \text{ eV}$
- Minimum pasma przewodnictwa w punkcie  $\Gamma$ , powierzchnie stałej energii – sfery,  $m_c=0,065 m_0$

Chelikowsky, J.R., Cohen, L.: Phys. Rev. B **14**, 556 (1976)

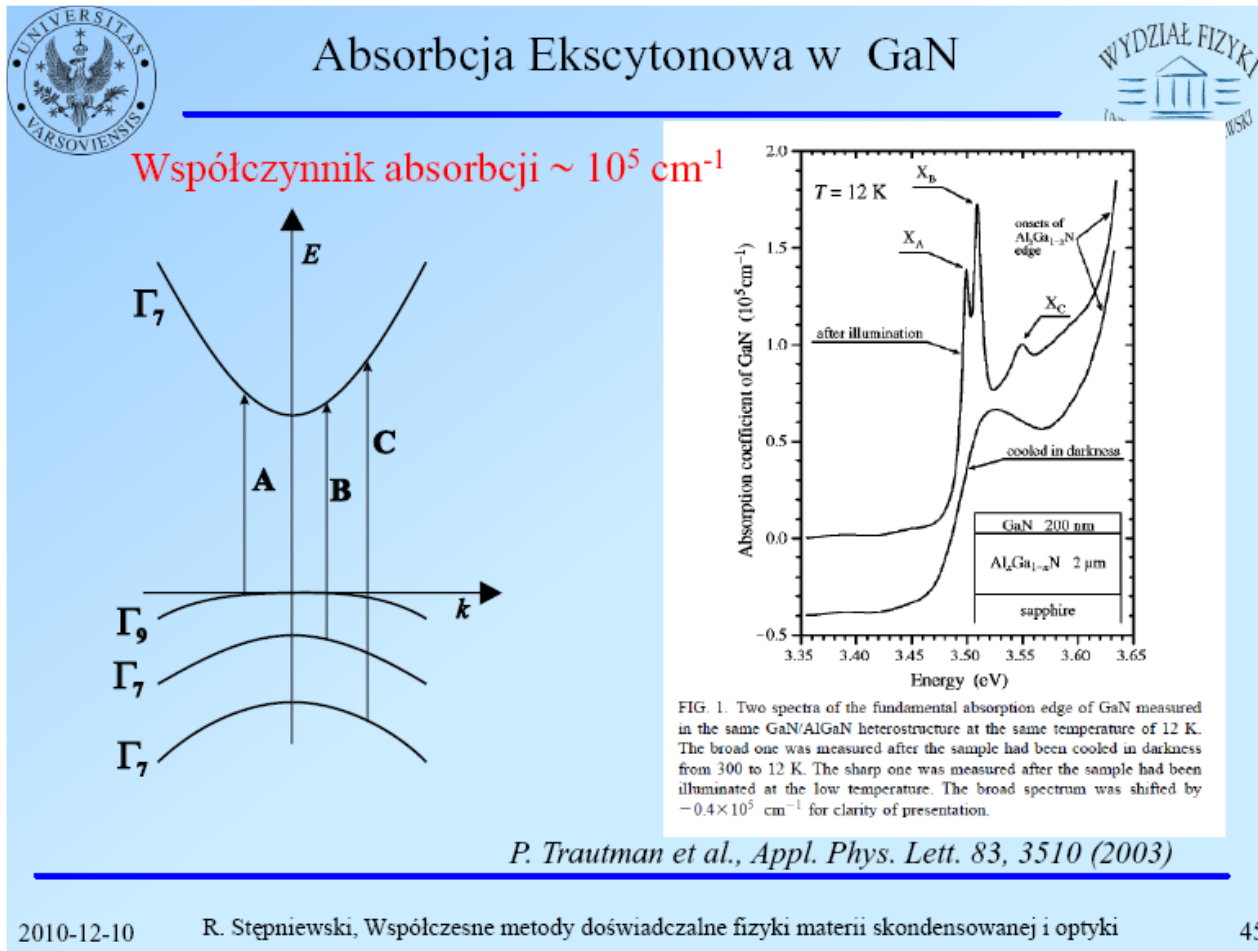
# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

- W półprzewodnikach grupy IV oraz w związkach półprzewodnikowych  $A^{III}B^V$  i  $A^{II}B^{VI}$  wierzchołek pasma walencyjnego znajduje się w punkcie  $\Gamma$
- Pasma utworzone jest głównie ze stanów typu p (tzn.  $L=1$ ) anionu
- 6-krotna degeneracja (z uwzględnieniem spinu) jest zniesiona przez oddziaływanie spin-orbita



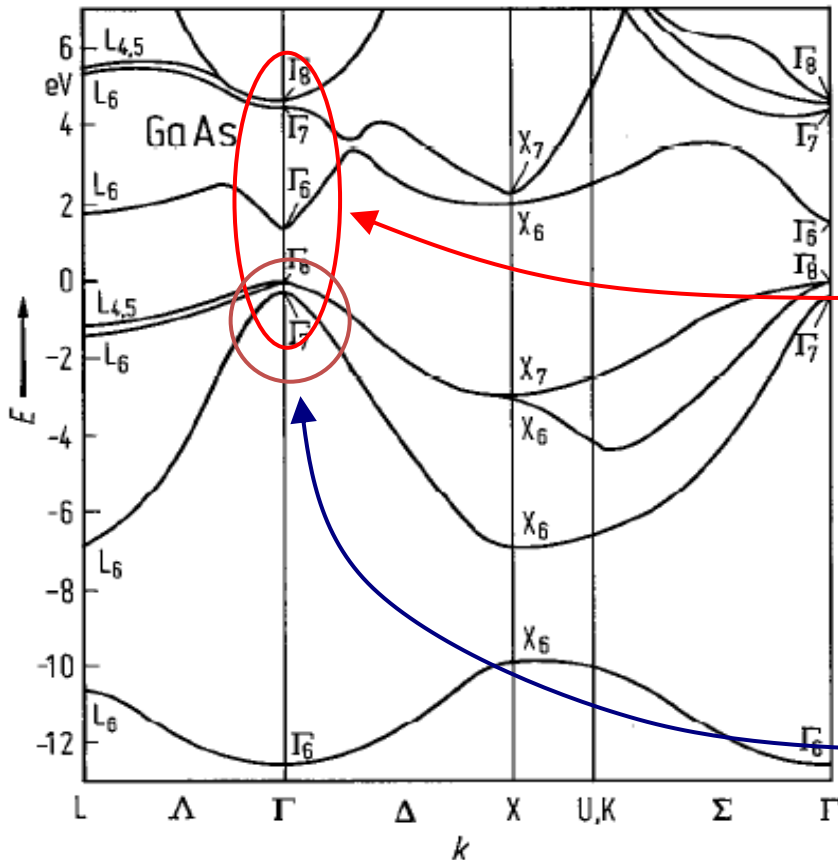
# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

- Przy obniżeniu symetrii punktowej kryształu (wurcyt), 4-krotna degeneracja stanów  $J=3/2$  jest zniesiona



# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

G. Dresselhaus, A.F. Kip, C. Kittel: Phys. Rev. **98**, 368 (1955), także np.: P. Yu, M. Cardona „Fundamentals of Semiconductors”



- Metoda  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  z oddziaływaniem spin-orbita
- Pod uwagę brane: pasma walencyjne  $\Gamma_7$ ,  $\Gamma_8$  oraz najbliższe pasma przewodnictwa  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_7$ ,  $\Gamma_8$  – razem 14 stanów
- Wpływ pasm przewodnictwa uwzględniany w 2. rzędzie rachunku zaburzeń, podczas gdy hamiltonian  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  diagonalizowany w bazie funkcji pasm walencyjnych (6 funkcji, macierz 6x6)

Chelikowsky, J.R., Cohen, L.: Phys. Rev. B **14**, 556 (1976)

# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

Wyniki takiej procedury (uwzględniającej wyższe pasma w 2. rzędzie rachunku zaburzeń):

- pasmo  $\Gamma_7$  odszczerpione spin-orbitalnie

$$E_{so} = -\Delta_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{P^2}{m(E_0 + \Delta_0)} + \frac{2Q^2}{m(E'_0 + \Delta_0)} \right) \right]$$

- dwa pasma  $\Gamma_8$  (dziury ciężkie i lekkie):

$$E_{\pm} = Ak^2 \pm \sqrt{B^2 k^4 + C^2 (k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2)}$$

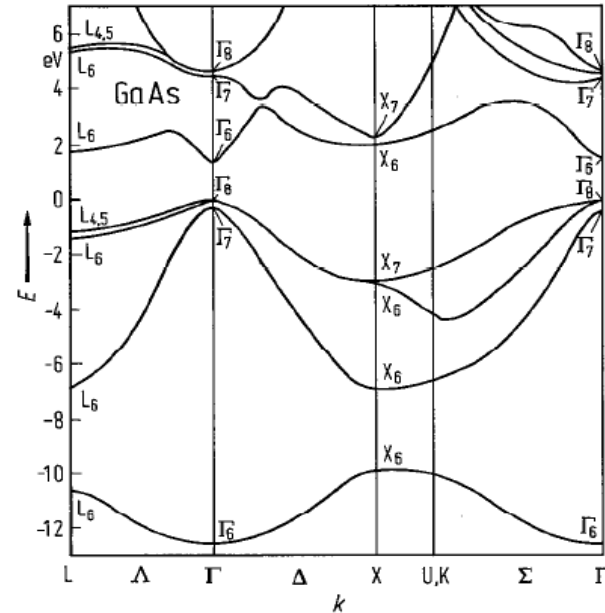
# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

gdzie parametry  $A, B, C$ :

$$\frac{2m}{\hbar^2} A = 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{P^2}{mE_0} + \frac{2Q^2}{mE'_0} \right)$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} B = \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{-P^2}{mE_0} \right) + \left( \frac{Q^2}{mE'_0} \right) \right]$$

$$\left( \frac{2m}{\hbar^2} C \right)^2 = \frac{16P^2 Q^2}{3m^2 E_0 E'_0}$$



$$iP = \langle X | \hat{p}_x | \Gamma_{6c} \rangle$$

– element macierzowy operatora pędu pomiędzy funkcjami typu  $p$  pasma walencyjnego i funkcją pasma przewodnictwa  $\Gamma_{6c}$

$$iQ = \langle X | \hat{p}_y | \Gamma_{8c}(z) \rangle$$

– element macierzowy operatora pędu pomiędzy funkcjami typu  $p$  pasma walencyjnego i funkcjami typu  $p$  pasma przewodnictwa  $\Gamma_{8c}$

$$E_0, E'_0, \Delta_0$$

– przerwa  $\Gamma_{6c} - \Gamma_{8v}$ ,  $\Gamma_{8c} - \Gamma_{8v}$  i rozszczepienie spin-orbitalne  $\Gamma_{8v} - \Gamma_{7v}$

# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

Wyniki takiej procedury (uwzględniającej wyższe pasma w 2. rzędzie rachunku zaburzeń):

- pasmo  $\Gamma_7$  odszczerpione spin-orbitalnie

$$E_{so} = -\Delta_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{P^2}{m(E_0 + \Delta_0)} + \frac{2Q^2}{m(E'_0 + \Delta_0)} \right) \right]$$

- dwa pasma  $\Gamma_8$  (dziury ciężkie i lekkie):

$$E_{\pm} = Ak^2 \pm \sqrt{B^2 k^4 + C^2 (k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2)}$$

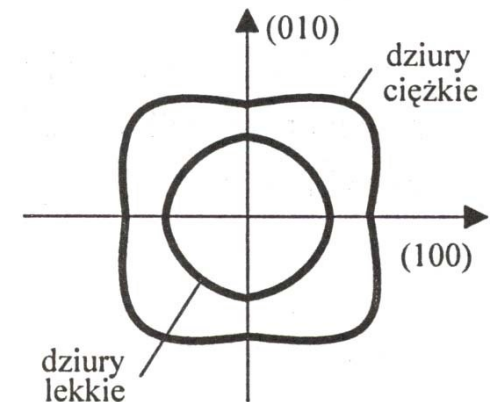
# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

## Podsumowanie:

- Wszystkie pasma w ramach zastosowanych przybliżeń są w pobliżu punktu  $\Gamma$  paraboliczne
- Pasma  $\Gamma_{7v}$  odszczepione spin-orbitalnie jest sferyczne
- Pasma  $\Gamma_{8v}$  są silnie niesferyczne, „pofałdowane” (tzw. warping) – dotyczy to zarówno dziur ciężkich jak i lekkich. Masa efektywna zależy od kierunku i nie da się traktować jej jak „tensor masy efektywnej” w rozumieniu definicji wprowadzonej przy omawianiu metody  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ :

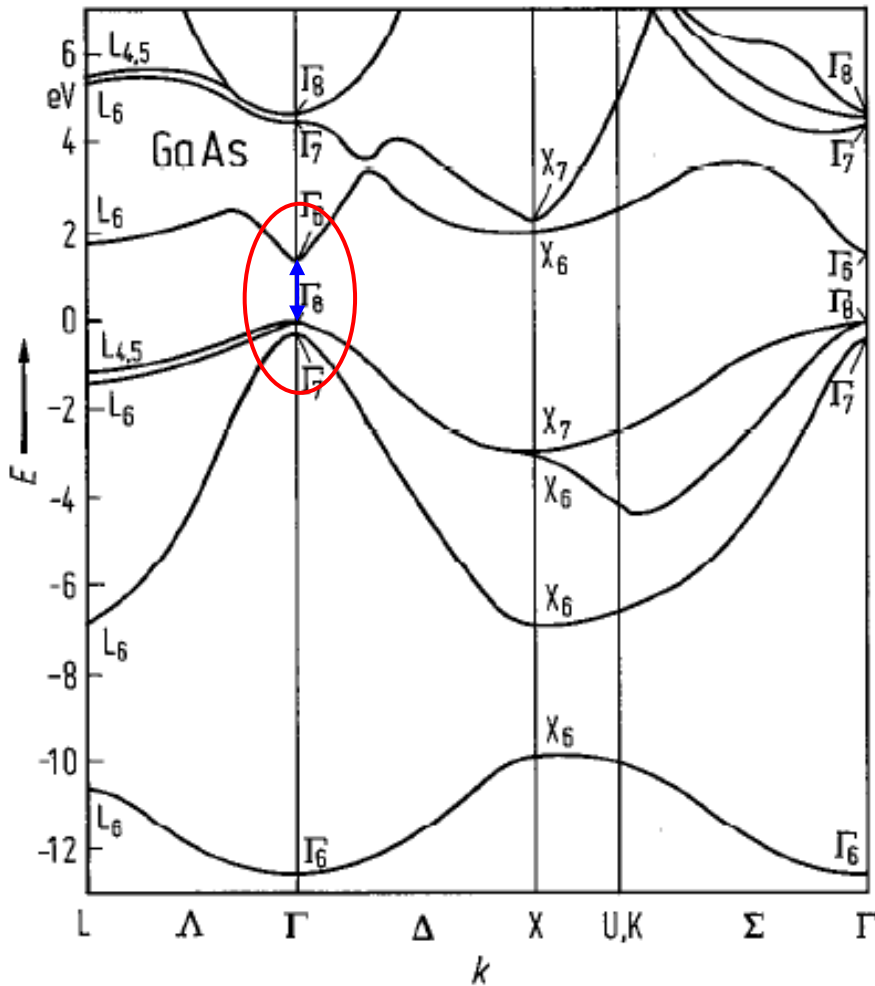
$$E_n(\vec{k}) \approx E_n(0) + \sum_{i,j} \left( \frac{1}{m_{ij}^*} \right)_n \frac{\hbar^2 k_i k_j}{2}$$

Przekrój przez powierzchnie stałej energii w paśmie walencyjnym  $\Gamma_8$





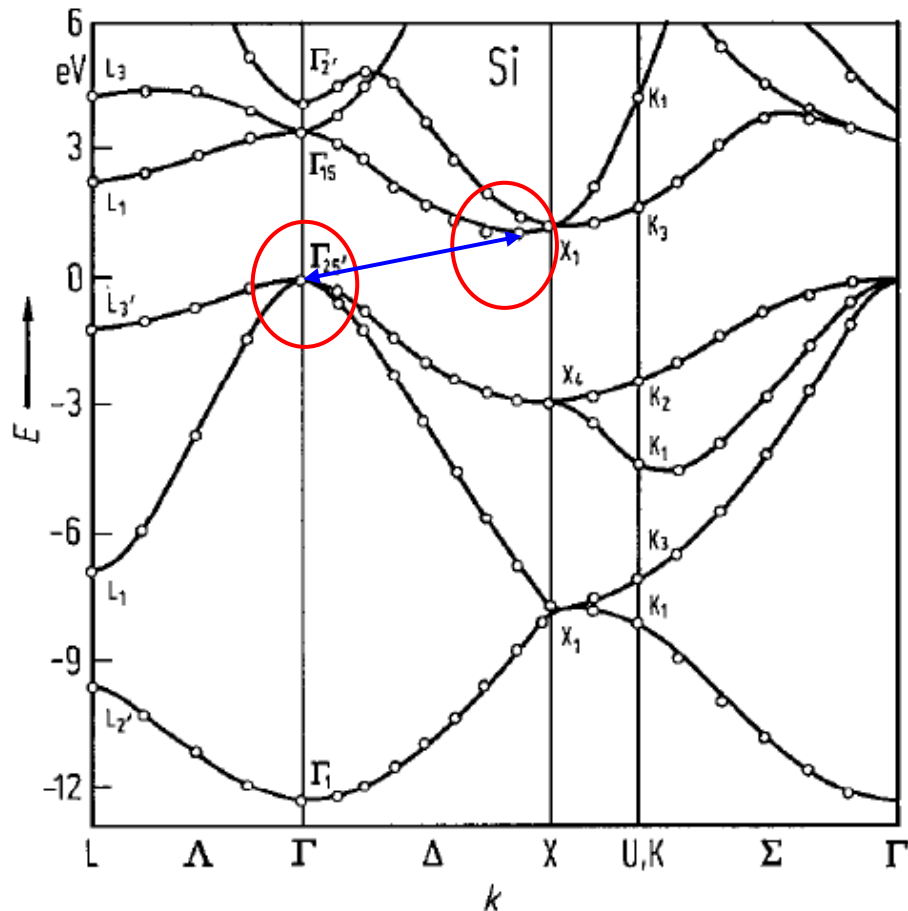
# Półprzewodniki – GaAs



- Przerwa energetyczna prosta,  $E_g = 1,42 \text{ eV}$
- Maksimum pasma walencyjnego w punkcie  $\Gamma$ ,  $m_{lh}=0,076 m_0$ ,  $m_{hh}=0,5 m_0$ ,  $m_{so}=0,145 m_0$ ,  $\Delta_{so}=0,34 \text{ eV}$
- Minimum pasma przewodnictwa w punkcie  $\Gamma$ , powierzchnie stałej energii – sfery,  $m_c=0,065 m_0$

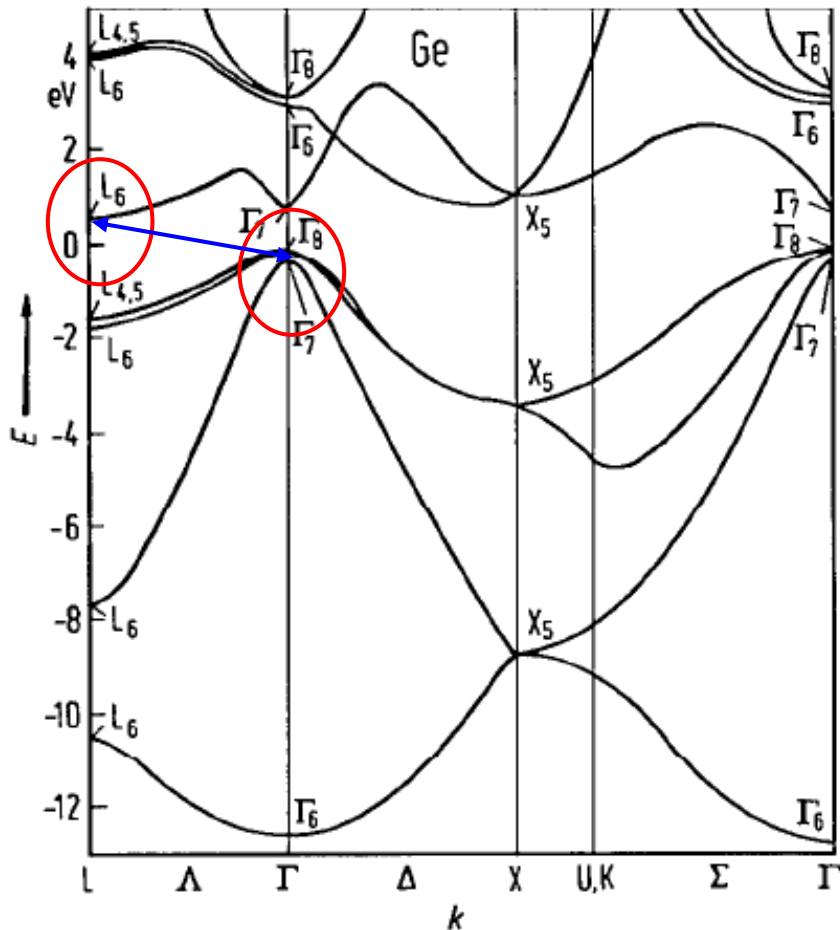
Chelikowsky, J.R., Cohen, L.: Phys. Rev. B **14**, 556 (1976)

# Półprzewodniki – Si



- Przerwa energetyczna skośna,  $E_g = 1,1 \text{ eV}$
- Minimum pasma przewodnictwa na kierunku  $\Delta$ , powierzchnie stałej energii – elipsoidy obrotowe (6 sztuk),  $m_{||}=0,92 m_0$ ,  $m_{\perp}=0,19 m_0$
- Maksimum pasma walencyjnego w punkcie  $\Gamma$ ,  $m_{lh}=0,153 m_0$ ,  $m_{hh}=0,537 m_0$ ,  $m_{so}=0,234 m_0$ ,  $\Delta_{so}=0,043 \text{ eV}$

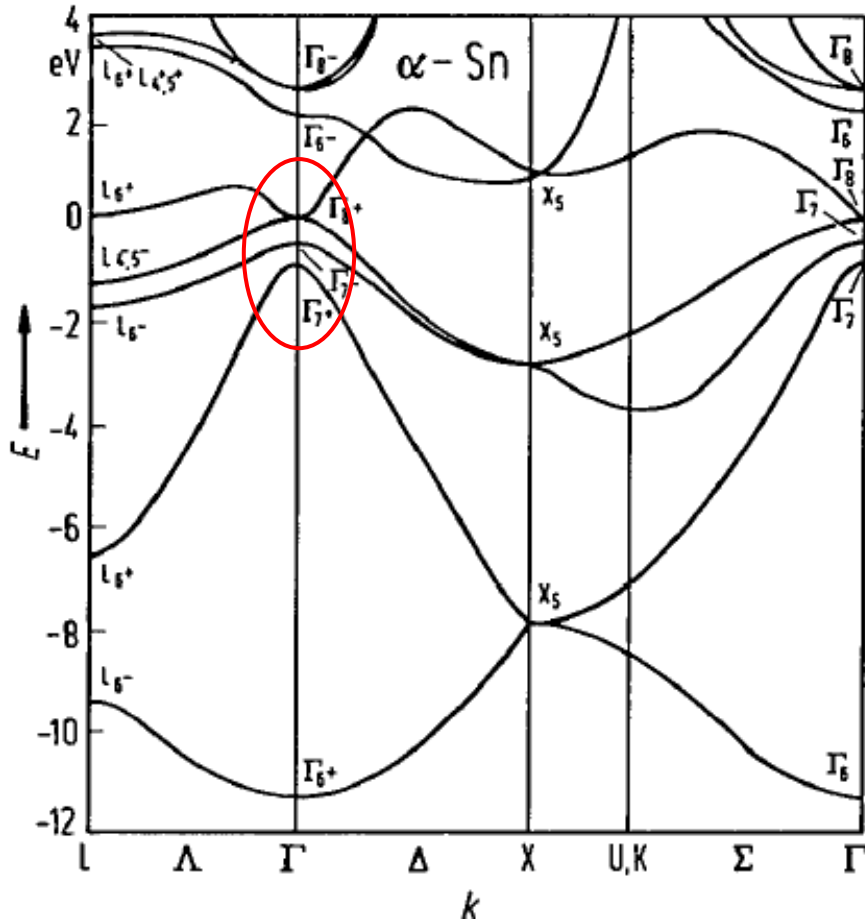
# Półprzewodniki – Ge



- Przerwa energetyczna skośna,  $E_g = 0,66 \text{ eV}$
- Maksimum pasma walencyjnego w punkcie  $\Gamma$ ,  $m_{lh}=0,04 m_0$ ,  $m_{hh}=0,3 m_0$ ,  $m_{so}=0,09 m_0$ ,  $\Delta_{so}=0,29 \text{ eV}$
- Minimum pasma przewodnictwa w punkcie  $L$ , powierzchnie stałej energii – elipsoidy obrotowe (8 połówek),  $m_{||}=1,6 m_0$ ,  $m_{\perp}=0,08 m_0$

Chelikowsky, J.R., Cohen, L.: Phys. Rev. B**14**, 556 (1976)

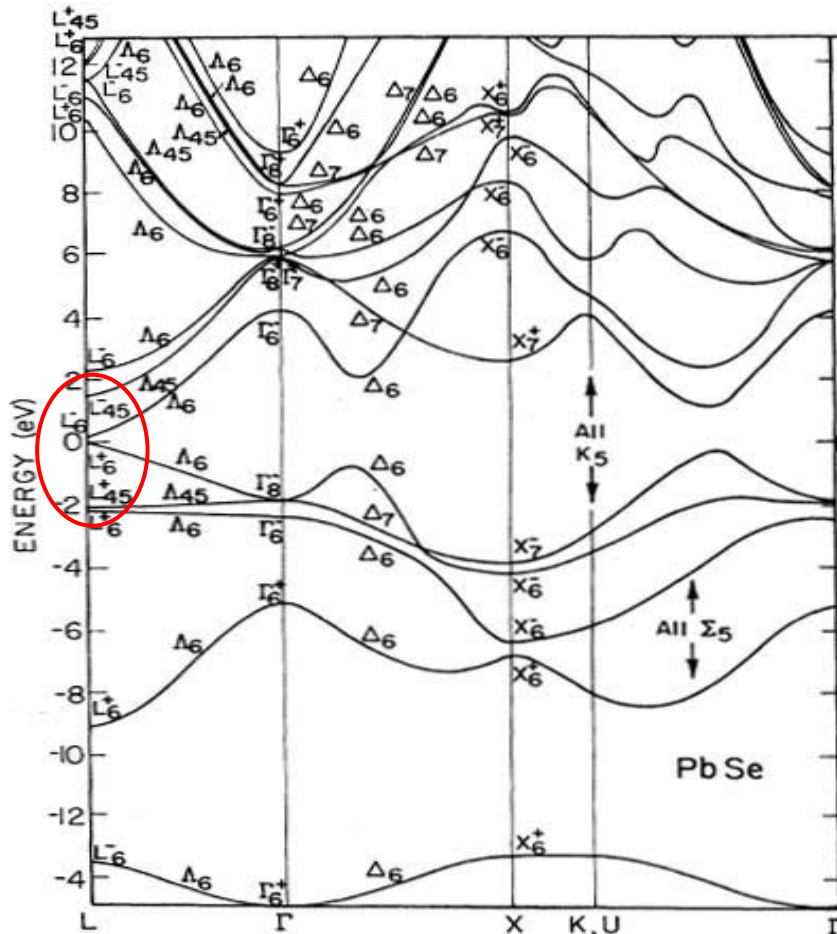
# Półprzewodniki – $\alpha$ -Sn



- Struktura diamentu
- Zerowa przerwa energetyczna,  $E_g = 0$  eV (tzw. odwrócona struktura)
- Maksimum pasma walencyjnego w punkcie  $\Gamma$ ,  $m_v=0,195 m_0$ ,  $m_{v2}=0,058 m_0$ ,  $D_{so}=0,8$  eV
- Minimum pasma przewodnictwa w punkcie  $\Gamma$ , powierzchnie stałej energii – sfery,  $m_c=0,024 m_0$

Chelikowsky, J.R., Cohen, L.: Phys. Rev. B**14**, 556 (1976)

# Półprzewodniki – PbSe



- Przerwa energetyczna prosta w punkcie  $L$ ,  $E_g = 0,28$  eV
- Maksimum pasma walencyjnego w punkcie  $L$ , powierzchnie stałej energii – elipsoidy obrotowe,  $m_{||}=0,068 m_0$ ,  $m_{\perp}=0,034 m_0$
- Minimum pasma przewodnictwa w punkcie  $L$ , powierzchnie stałej energii – elipsoidy obrotowe,  $m_{||}=0,07 m_0$ ,  $m_{\perp}=0,04 m_0$

Martinez, G., Schlüter., Cohen, L.: Phys. Rev. B**11**, 651 (1975)

# **KWAZI-KLASYCZNY OPIS DYNAMIKI ELEKTRONÓW W CIELE STAŁYM**

# Prędkość grupowa paczki falowej

- Funkcja Blocha zależna od czasu ( $\omega = E/\hbar$ ):

$$\Psi_{n,\vec{k}}(\vec{r},t) = \varphi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} = u_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

opisuje elektron **całkowicie zdelokalizowany** –  
prawdopodobieństwo znalezienia go w każdej z komórek  
elementarnych  $\Omega$  jest takie samo:

$$\int_{\Omega} \Psi_{n,\vec{k}}^*(\vec{r},t) \cdot \Psi_{n,\vec{k}}(\vec{r},t) d_3r = \int_{\Omega} \varphi_{n,\vec{k}}^*(\vec{r}) \cdot \varphi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) d_3r = const$$

- Paczka falowa** utworzona ze stanów n-tego pasma z otoczenia  $\vec{k}_0$  ( $\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{\xi}$ ) będzie tworem zlokalizowanym, ale nie będzie odpowiadała stanowi własnemu hamiltonianu (wskaźnik  $n$  opuszczony):

$$\psi(\vec{r},t) = A \int u_{\vec{k}}(\vec{r}) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)} d_3k$$



