

Metody fizyki w ekonomii

Seria 8.

Zadanie 1. Znaleźć rozkład zmiennej $y = e^{\mu + \sigma x}$, jeżeli zmienna x ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję tego rozkładu.

Zadanie 2. Lemat Ito mówi, że dla każdego procesu stochastycznego X_t , spełniającego równanie:

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t,$$

gdzie a_t i b_t to odpowiednie procesy, proces $G(t, X_t) \equiv G_t$ spełnia równanie:

$$dG(t, X_t) = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a_t \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) dt + b_t \frac{\partial G}{\partial x} dW_t.$$

Zastosuj lemat Ito do wyliczenia całki stochastycznej $\int_0^T W_\tau dW_\tau$.

Zadanie 3. Załóżmy, że proces cen akcji S_t spełnia równanie:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Znaleźć stochastyczne równanie różniczkowe na cenę kontraktu Forward (teoretyczną cenę Futures) $F_t = S_t e^{r(T-t)}$.

Zadanie 4. Przy tym samym założeniu, co w zadaniu poprzednim znaleźć stochastyczne równanie różniczkowe spełniane przez proces $\ln(S_t)$. Wyznaczyć na jego podstawie rozwiązanie dla S_t .

Zadanie 5. Załóżmy, że zmienna losowa S ma rozkład log-normalny. Znaleźć wartość oczekiwaną:

$$\langle \max(S - K, 0) \rangle$$

Zadanie 6. Udowodnij parytet opcji kupna i sprzedaży, który wyraża się wzorem:

$$C_0 - P_0 = S_0 - DF(0, T)K.$$

Wykorzystaj go do szybkiej wyceny opcji kupna o parametrach z poprzedniego zadania.

Metody fizyki w ekonomii

Seria 8.

Zadanie 1. Znaleźć rozkład zmiennej $y = e^{\mu + \sigma x}$, jeżeli zmienna x ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję tego rozkładu.

Zadanie 2. Lemat Ito mówi, że dla każdego procesu stochastycznego X_t , spełniającego równanie:

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t,$$

gdzie a_t i b_t to odpowiednie procesy, proces $G(t, X_t) \equiv G_t$ spełnia równanie:

$$dG(t, X_t) = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a_t \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) dt + b_t \frac{\partial G}{\partial x} dW_t.$$

Zastosuj lemat Ito do wyliczenia całki stochastycznej $\int_0^T W_\tau dW_\tau$.

Zadanie 3. Załóżmy, że proces cen akcji S_t spełnia równanie:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Znaleźć stochastyczne równanie różniczkowe na cenę kontraktu Forward (teoretyczną cenę Futures) $F_t = S_t e^{r(T-t)}$.

Zadanie 4. Przy tym samym założeniu, co w zadaniu poprzednim znaleźć stochastyczne równanie różniczkowe spełniane przez proces $\ln(S_t)$. Wyznaczyć na jego podstawie rozwiązanie dla S_t .

Zadanie 5. Załóżmy, że zmienna losowa S ma rozkład log-normalny. Znaleźć wartość oczekiwaną:

$$\langle \max(S - K, 0) \rangle$$

Zadanie 6. Udowodnij parytet opcji kupna i sprzedaży, który wyraża się wzorem:

$$C_0 - P_0 = S_0 - DF(0, T)K.$$

Wykorzystaj go do szybkiej wyceny opcji kupna o parametrach z poprzedniego zadania.