Niegaussowskie procesy stochastyczne

Zadania powtórzeniowe 2.

Zadanie 1. Rozważyć proces stochastyczny $Y_x(t) = a + f(x)$, gdzie a to stała, natomiast zmienna losowa x opisana jest rozkładem o gęstości $P(x)$. Znaleźć wyrażenie n-ty moment tego procesu, jego wariancję i funkcję autokorelacji.

Zadanie 2. Dla procesu $Y_x(t)$ z poprzedniego zadania znaleźć prawdopodobieństwo $P_n(y_1, t_1; y_2, t_2; ...; y_n, t_n)$ i na jego podstawie obliczyć n-ty moment, przyjmując, że $f(x) = ax$.

Zadanie 3. Wiedząc, że proces X_t spełnia równanie $dX_t = X_t^3 dt + X_t^2 dW_t$, znaleźć stochastyczne równanie różniczkowe spełniane przez proces $Y_t = \frac{1}{X_t}$.

Zadanie 4. Wiedząc, że proces X_t spełnia równanie $dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$, gdzie a i b to stałe, znaleźć wyrażenie (wzór, już scałkowany) na proces $Y_t = c\ln(X_t)$ ($c = const.$).

Zadanie 5. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka poprzez metodę separacji zmiennych – należy założyć, że prawdopodobieństwo jest postaci $P(x,t) = \rho(x)\psi(t)$.

Lemat Itô

Dla każdego procesu stochastycznego X_t, spełniającego równanie: $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$, gdzie a_t i b_t to odpowiednie procesy, proces $G(t, X_t) \equiv G_t$ spełnia równanie:

- $dG(t, X_t) = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a_t \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right) dt + b_t \frac{\partial G}{\partial x} dW_t.$

Równanie Fokkera-Plancka

Dla procesu stochastycznego X_t, spełniającego równanie: $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, prawdopodobieństwo $P(x,t)$, że proces X_t przyjmnie wartość x w chwili t opisane jest równaniem Fokkera-Plancka:

- $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x)P(x,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(x)P(x,t)],$

gdzie współczynnik dryfu $A(x) = \mu(x)$ oraz współczynnik dyfuzji $B(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)$. W stanie stacjonarnym rozwiązanie tego rónania jest następujące:

- $P(x) = \frac{\text{const.}}{B(x)} \exp\left[2\int_0^x \frac{A(x')}{B(x')} \mathrm{d}x'\right],$

Odpowiedzi/Podpowiedzi

Zadanie 1. $\langle Y_x(t_1)Y_x(t_2)...Y_x(t_n)\rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \left\langle f^k(x) \right\rangle$, $\quad Var(t) = \kappa(t_1, t_2) = \left\langle f^2(x) \right\rangle - \langle f(x)\rangle^2$.

Zadanie 2. $P_n(y_1, t_1; y_2, t_2; ...; y_n, t_n) = \frac{1}{a}\delta(y_2 - y_1)\delta(y_3 - y_1)...\delta(y_n - y_1)P(\frac{y_1}{a} - 1)$, bądź analogiczna postać otrzymana przez zamianę y_1 z y_i dla dowolnego $i \in \{2, 3, ..., n\}$; n-ty moment powinien wyjść taki sam, jak w zadaniu 1.

Zadanie 3. $dY_t = -\frac{1}{2Y_t}dt - dW_t$.

Zadanie 4. $Y_t - Y_0 = c(a - \frac{1}{2}b^2)t + bcW_t$, gdzie Y_0 to stała całkowania.

Zadanie 5. $\psi(t) = e^{at+b}$, natomiast część zależna od położenia ma tę samą postać, co rozwiązanie stacjonarne $\rho(x) = \frac{\text{const.}}{B(x)} \exp\left[2\int_0^x \frac{A(x')}{B(x')}\mathrm{d}x'\right]$.