

## Wprowadzenie do teorii procesów stochastycznych Kolokwium 24.04.2019

1. (10 pkt) Na  $n$  kartonikach zapisano  $n$  różnych liczb rzeczywistych. Kartoniki włożono do pudełka, starannie wymieszano, a następnie losowano kolejno bez zwracania. Niech zdarzenie  $A_k$  oznacza, że  $k$ -ta wylosowana liczba jest większa od poprzednich.
  - (a) Udowodnić, że  $P(A_k) = 1/k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .
  - (b) Udowodnić, że zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_n$  są niezależne.
2. (6 pkt) W wiosce jest 10 krasnoludków: 7 nosi zieloną czapkę, 3 niebieską. Wiadomo, że pływać potrafią 2 krasnoludki, które noszą zielone czapki oraz 2 krasnoludki, które noszą niebieskie czapki.
  - (a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że krasnoludek potrafi pływać, jeśli nosi niebieską czapkę?
  - (b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że krasnoludek nosi niebieską czapkę, jeśli potrafi pływać?
3. (10 pkt) Dyskretny ujemny rozkład dwumianowy (rozkład Pascala) z parametrami  $p \in (0; 1)$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$  zadany jest przez rozkład prawdopodobieństwa

$$P(k) = \binom{k+r-1}{k} (1-p)^r p^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Wyznacz: funkcję charakterystyczną, średnią, wariancję oraz współczynnik skośności  $\gamma = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}$ . Zbadaj zachowanie współczynnika skośności dla: a)  $p \rightarrow 0$ , b)  $p \rightarrow 1$ , c)  $r \rightarrow \infty$ .

4. (8 pkt) Rozkład  $Gamma(k, \theta)$  z parametrami  $k, \theta$  posiada gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x) = \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)\theta^k} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0; k > 0, \theta > 0.$$

Dane są dwie niezależne zmienne  $X \sim Gamma(\alpha, 1)$  oraz  $Y \sim Gamma(\beta, 1)$ . Zdefiniujmy zmienne  $U = \frac{X}{X+Y}$  oraz  $V = X + Y$ . Wyznacz wspólny rozkład prawdopodobieństwa  $p(u, v)$  oraz rozkład jedynie zmiennej  $U$ .

**Podpowiedzi:**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} a^k = (1-a)^{-r}, \quad |a| < 1,$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

**Powodzenia!**