Wprowadzenie do teorii procesów stochastycznych
Ćwiczenia, Zestaw 1

1. W urnie znajduje się 10 białych i 7 czarnych kul. Losujemy bez zwracania 2 kule. Definiujemy wydarzenia: A_i - i-ta wylosowana kula jest biała, $A = A_1 \cap A_2$, $B = A_1 \cup A_2$. Wyznacz $P(A_1)$, $P(A)$, $P(A_2)$ oraz $P(B)$.

2. Niech A, B, C będą zdarzeniami. Zapisać za pomocą działań na zbiorach następujące zdarzenia: a) zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B, C; b) zachodzą dokładnie 2 ze zdarzeń A, B, C; c) zachodzą co najmniej 2 spośród zdarzeń A, B, C.

3. Udowodnić, że $P(A_1 \cup ... \cup A_n) \leqslant P(A_1) + ... + P(A_n)$.

4. Udowodnić, że $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.

5. Dane jest: $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.
   Wyznacz: $P(B')$, $P(A \cap B')$, $P(B \setminus A)$.

6. Dane są: $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, ponadto $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. Obliczyć: $P(A)$ i $P(B \setminus A)$.

7. Dane są: $P(A' \cap B') = \frac{1}{2}$, $P(A') = \frac{2}{3}$, ponadto $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Obliczyć: $P(B)$ i $P(A' \cap B)$.

8. Dane są: $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $A \cap B = \emptyset$. Uporządkować rosnąco: $P(A \cup B)$, $P(A' \cup B)$ i $P(A \cup B')$.

9. Niech $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(B) = 2P(A)$, $P(C) = 3P(A)$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$. Pokazać, że $\frac{1}{6} \leqslant P(A) \leqslant \frac{1}{4}$.

10. Mateusz i Jarek umówili się pomiędzy 16 a 17. Każdy z nich przychodzi i czeka 20 minut, po czym odchodzi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania?