Wprowadzenie do teorii procesów stochastycznych
Ćwiczenia, Zestaw 11

1. Obliczyć autokowariancję procesu Wienera W_t o następujących własnościach:

   - $W_0 = 0$,
   - W_t ma niezależne przyrosty,
   - $W_s - W_t \sim N(0, t-s)$ dla $0 \leqslant s < t$,
   - W_t ma ciągłe trajektorie.

   Z powyższego wynika, że $W_t \sim N(0,t)$ oraz W_t jest w każdym punkcie nieróżniczkowalna.

2. Obliczyć autokowariancję procesu procesu Ornsteina-Uhlenbecka zdefiniowanego przez:

$$P_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2},$$
$$T_t(y_2|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}} \exp\left[-\frac{(y_2 - y_1 e^{-t})^2}{2(1-e^{-2t})}\right].$$

3. Stacjonarny proces Markowa zadany jest przez $P_1(x,t)$ oraz $T_\tau(x_2|x_1)$. Wyznacz $P_{1|1}(x_1,t_1|x_2,t_2)$.

4. Proces Poissona jest procesem Markowa zadanym przez:

$$t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0,$$
$$P_{1|1}(n_2,t_2|n_1,t_1) = \frac{(t_2-t_1)^{n_2-n_1}}{(n_2-n_1)!} e^{-(t_2-t_1)},$$
$$P_1(n, t=0) = \delta_{n,0},$$
$$P_{1|1} = 0 \text{ dla } n_2 < n_1.$$

   Wyznacz P_n, średnią oraz autokowariancję tego procesu.

5. Dany jest proces Markowa zwany procesem losowego telegrafu ($\gamma > 0$)

$$P_1(x,t) = \frac{1}{2}(\delta_{x,1} + \delta_{x,-1}),$$
$$P_{1|1}(x,t|x',t') = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-\gamma(t-t')}\right]\delta_{x,x'} + \frac{1}{2}\left[1 - e^{-\gamma(t-t')}\right]\delta_{x,-x'}, \quad t > t'.$$

   Sprawdź warunki zgodności.