

Wprowadzenie do teorii procesów stochastycznych

Ćwiczenia, Zestaw 5

1. Zmienna losowa X pochodzi z rozkładu jednostajnego zadanego na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$. Podaj gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$. Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y = \sin(X)$.
2. Zmienna X opisana jest rozkładem trójkątnym

$$f(x) = Cx \text{ dla } 0 < x < \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wyznacz C oraz rozkład zmiennej $Y = \sin(X)$. Jak wygląda rozkład Y w granicy $n \rightarrow \infty$?

3. Wyraż cztery pierwsze momenty centralne przez momenty zwykłe.
4. Wyznacz cztery pierwsze momenty centralne rozkładu normalnego. Skorzystaj z funkcji Gamma

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t),$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}.$$

5. Dyskretny rozkład dwumianowy zadany jest prawdopodobieństwem

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Wyznacz średnią oraz wariancję tego rozkładu.

6. Wyznacz momenty zwykłe rozkładu Pareto.