Wprowadzenie do teorii procesów stochastycznych
Ćwiczenia, Zestaw 7

1. Rozkład Gamma zadany jest gęstością

$$f(x) = \frac{x^{k-1}\exp(-\frac{x}{\theta})}{\Gamma(k)\theta^k}, \quad x > 0,\ k > 0,\ \theta > 0.$$

   - Wyznacz jego funkcje charakterystyczną oraz trzy pierwsze kumulanty.
   - Niech zmienne X oraz Y pochodzą z rozkładu Gamma z parametrami odpowiednio k_1, θ_1 oraz k_2, θ_2. Kiedy suma tych zmiennych pochodzi z rozkładu Gamma?
   - Niech zmienna Z będzie sumą N niezależnych zmiennych z rozkładu Gamma z takimi samymi parametrami k i θ. Wyznacz średnią, wariancję oraz współczynnik asymetrii. Jakie jest ich zachowanie w granicy $N \to \infty$?
   - Pokaż, że dla odpowiednio przeskalowanej zmiennej Z funkcja charakterystyczna zbiega do funkcji charakterystycznej rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji 1.

2. Zmienne losowe U_1 i U_2 są z rozkładu jednostajnego $(0; 1]$. Zmienne R i Θ zadane są jako $R^2 = -2\log(U_1)$ oraz $\Theta = 2\pi U_2$ (są to współrzędne w biegunowym układzie współrzędnych). Udowodnij, że zmienne $U = R\cos\Theta$ i $V = R\sin\Theta$ są niezależne i o rozkładzie normalnym z wariancją równą 1.

3. Zmienne X i Y rezprezentują współrzędne w dwuwymiarowym rozkładzie naturalnym. Wiemy, że ich wariancje wynoszą odpowiednio 2 i 3, kowariancja 1, a średnie 0. Wyznacz gęstości $f(x,y)$, $f(x)$, $f(y|x)$.