Wprowadzenie do teorii procesów stochastycznych
Ćwiczenia, Zestaw 8

1. Rozważamy jednorodny łańcuch Markowa X_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Proces może przyjmować wartości 1, 2, 3. Będąc w stanie 1 w następnym kroku z równym prawdopodobieństwem znajdzie się w dowolnym stanie. Będąc w stanie 2 z równym prawdopodobieństwem przeskoczy do stanu 1 lub pozostanie w stanie 2. Będąc w stanie 3 z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ pozostanie w tym stanie, w pozostałych przypadkach przeskoczy do stanu 1.

   - Wyznacz macierz przejścia p.
   - Wyznacz stan stacjonarny.
   - Wyznacz autokowariancję tego procesu $cov(X_0, X_1) = \langle\langle X_0 X_1 \rangle\rangle$ pomiędzy czasami 0 i 1 dla danego rozkładu początkowego $\Pi(0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
   - Wyznacz autokorelację tego procesu $cor(X_t, X_{t+1}) = \frac{\langle\langle X_t X_{t+1} \rangle\rangle}{\sigma(t)\sigma(t+1)}$ pomiędzy czasami t i $t+1$ dla $t \to \infty$.

2. Rozważ model Ehrenfestów: n kul jest losowo rozdzielonych pomiędzy dwie urny. Stan układu opisany jest liczbą kul w pierwszej urnie. W każdym kroku wybieramy losową kulę i przenosimy do drugiej urny. Wyznacz stan stacjonarny.

3. Dane są jednorodne łańcuchy Markowa zadane macierzami przejścia

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   - Wyznacz stany osiągalne ze stanu S_1.
   - Wyznacz stany komunikujące się.
   - Wyznacz stany nieistotne.
   - Wyznacz zamknięte zbiory stanów.
   - Wyznacz stany komunikujące się.
   - Wyznacz stany pochłaniające.
   - Wyznacz łańcuch nieprzywiedlny.