

Wprowadzenie do teorii procesów stochastycznych

Zadania powtórzeniowe 1

1. Rozmieszczamy m różnych listów w m rozróżnialnych, ponumerowanych skrytkach. Jakie jest prawdopodobieństwo takiego rozmieszczenia, że:
 - a) co najmniej jedna skrytka jest pusta?
 - b) co najmniej dwie skrytki są puste?
2. Do 12 ponumerowanych szuflad wkładamy losowo 13 pojedynczych skarpetek, przy czym dokładnie dwie z nich tworzą parę. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania konfiguracji, w której żadna szuflada nie jest pusta oraz skarpetki tworzące parę znajdują się w różnych szufladach.
3. W mieście samochody niebieskie stanowią 80% wszystkich samochodów, natomiast pozostałe są zielone. W nocy przechodzień był świadkiem wypadku, z którego winowajca uciekł swoim samochodem. Świadek zeznał, że samochód winowajcy był zielony. Testy terenowe wykazały, że w podobnych warunkach świadek dobrze ocenia kolor samochodu w 75%. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że winowajca posiada zielony samochód?
4. X pochodzi z rozkładu normalnego. Wyznacz rozkład $Y = X^2$. Następnie, przyjmując $\mu = 0$ oraz $\sigma = 1$, wyznacz funkcję charakterystyczną oraz cztery pierwsze kumulanty Y .
5. Niezależne zmienne X oraz Y pochodzą z rozkładu normalnego. Wyznacz rozkład $p(u, v)$ zmiennych $U = X/Y$ oraz $V = |Y|$. Następnie, przyjmując $\mu = 0$ oraz $\sigma = 1$ w rozkładach X i Y , wyznacz rozkład samej zmiennej U .
6. Rozkład geometryczny jest dyskretnym rozkładem zadanym przez:

$$f(k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad p \in (0; 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Wyznacz funkcję charakterystyczną oraz 4 pierwsze kumulanty.

7. Dwuwymiarowy rozkład normalny zadany jest przez gęstość

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{28\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + xy + 2y^2}{7}\right).$$

Wyznacz wariancję X oraz Y , jak również korelację $\text{cor}(X, Y)$.