Wprowadzenie do teorii procesów stochastycznych
Zadania powtórzeniowe 2

1. Łańcuchy Markowa - nazewnictwo stanów, stan stacjonarny, wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa dla dowolnego t.

2. Rozpatrz jednowymiarowy ruch Browna. Jaka jest gęstość prawdopodobieństwa, że w chwili $t = 2$ cząstka znajdzie się w położeniu $x = 0$, pod warunkiem że w chwili $t = 1$ była w punkcie $x = -1$?

3. Rozpatrz jednowymiarowy ruch Browna z warunkiem początkowym zadanym jako
$$P(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$
Podaj $P(x, t = 1)$.

4. Rozważ ruch Browna ze ścianką idealnie odbijającą w $x = -1$. Wyznacz średnie położenie $\langle x(t) \rangle$.

5. Wyznacz średnią $\mu(t)$ i wariancję $\sigma^2(t)$ procesu stochastycznego zadanego wzorem
   - $Y_X(t) = Xt$, gdzie $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$,
   - $Y_X(t) = Xt^2$, gdzie $X \sim \mathrm{Pois}(1)$,
   - $Y_X(t) = \sin(\omega t + X)$, gdzie $\omega = const, X \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$.
   - $Y_X(t) = X_1 \cdot X_2$, gdzie X_i jest równe 0 lub 1 z równym prawdopodobieństwem oraz $\rho_{12} = \frac{1}{3}$,

6. Y jest procesem, który przyjmuje wartości 0 lub 1, a t przyjmuje jedynie trzy wartości. Możliwe są cztery realizacje: 1,0,0; 0,1,0; 0,0,1; 1,1,1; każde z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Pokaż, że tak zadany proces spełnia równanie SCK, ale pomimo to nie jest procesem Markowa.

7. Udowodnij, że autokowariancja stacjonarnego procesu Markowa o zerowej średniej dana jest wzorem
$$C(t) = \iint x_1 x_2 T_t(x_2|x_1) P_1(x_1) dx_1 dx_2, \quad t \geqslant 0.$$

8. Przykładem stacjonarnego procesu jest proces Ornsteina-Uhlenbecka zdefiniowany jako
$$P_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2},$$
$$T_t(y_2|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - e^{-2t})}} \exp\left[-\frac{(y_2 - y_1 e^{-t})^2}{2(1 - e^{-2t})}\right].$$

Pokaż, że jest to proces Markowa (warunki zgodności) oraz wyznacz funkcję autokowariancji (zadanie powyżej).

9. Procesem "Kubo-Andersona"nazywany jest stochastyczny proces Markowa, dla którego macierz przejścia jest dana wzorem $W(y|y') = u(y)$, gdzie $u(y)$ jest całkowalną funkcją y (przyjmij $\int_{-\infty}^{\infty} u(y)dy = V$). Rozwiąż równanie M dla tego procesu. Zinterpretuj wynik (podaj rozkład stacjonarny, rozpatrz przypadek $t \to \infty$). Podaj warunki normalizacji.