

Numeryczne równania ruchu z poprawkami relatywistycznymi

Wybrane algorytmy w symulacji precesji perycentrum*

Konrad Gębik, Piotr Grabowski, Bartłomiej Radożycki, Kacper Ruszkowski

Streszczenie. W pracy zajmujemy się opisem ruchu dwóch ciał w przybliżeniu postnewtonowskim za pomocą symulacji numerycznych. Na początku przedstawiamy krótki przegląd prac naukowych. Omawiamy ogólną postać równania ruchu dwóch ciał z poprawkami postnewtonowskimi. Omawiamy algorytm Rungego-Kutty, symplektyczny oraz Bulirscha-Stoera i aplikujemy wybrane metody do układu Słońce-Merkury oraz do hipotetycznego zwartego układu podwójnego gwiazd o masach $M_\odot$ i $2M_\odot$. Nasze obliczenia poprawnie wyznaczają relatywistyczną część precesji peryhelium Merkurego. W szczególności, w przypadku obliczeń z użyciem algorytmu Rungego-Kutty otrzymany przez nas wynik różni się zaledwie o 7% względem wartości uzyskiwanych z obserwacji astronomicznych. W przypadku algorytmu symplektycznego, pomimo jego bardzo dobrych długoterminowych właściwości, obserwujemy mniejszą lokalną precyzję objawiającą się w nieco większym błędzie względnym na poziomie 12%-20%. W przypadku algorytmu Bulirscha-Stoera dochodzimy do wniosku, że niska ekscentryczność orbity Merkurego może nie uzasadniać względnie dużego kosztu jego użycia. Do pracy dołączamy stworzone przez nas programy komputerowe w językach C++ oraz Python.

Słowa kluczowe: algorytm Bulirscha-Stoera, algorytm Rungego-Kutty, algorytm symplektyczny, perycentrum, poprawka postnewtonowska, relatywistyczne obliczenia numeryczne

Copyright (c) 2025 Konrad Gębik, Piotr Grabowski, Bartłomiej Radożycki, Kacper Ruszkowski. Udostępniono na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa – Na tych samych warunkach 4.0 Międzynarodowa. Pełna treść licencji dostępna jest pod adresem <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

1 LIPCA 2025

Wstęp

Przybliżenie postnewtonowskie jest metodą, za pomocą której — poprzez odpowiednie korekty (poprawki relatywistyczne) do równań ruchu Newtona — rozwiązuje się w przybliżony sposób równanie Einsteina dla różnych systemów fizycznych. W ten sposób stopniowo przechodzi się od mniej dokładnego opisu opierającego się na dynamice newtonowskiej do bliższego rzeczywistości opisu relatywistycznego. Zarazem uzyskane w ten sposób równania powinny być prostsze od równania Einsteina. Każdy kolejny n -ty rząd poprawek wprowadza nowe wyrazy relatywistyczne zawierające ϵ w n -tej potęgę (gdzie $\epsilon \sim (v/c)^2$ a v jest prędkością). W tej pracy używamy oznaczenia n PN jako symbol poprawki postnewtonowskiej n -tego rzędu. Przegląd prac naukowych pozwala zauważyć, jak powszechne zastosowanie znajduje omawiane przybliżenie. Poniżej przejdziemy przez skróty opis wybranych artykułów.

W ogólności z powodzeniem stosuje się przybliżenie postnewtonowskie dla układów dwóch ciał [1]. W jednej z prac [2] dokonano przeglądu różnych rozwiązań dynamiki dwóch ciał dla czwartej poprawki postnewtonowskiej. Z innych prac dowiedzieć się można, jak stosowano przybliżenie w kontekście układów dwóch czarnych dziur (np. znajdując położenia najbardziej wewnętrznej stabilnej orbity kołowej dla przybliżenia 3PN i porównując z uzyskanymi numerycznymi wynikami dla dwóch czarnych dziur poruszających się po kołowych orbitach [3] albo obliczając kąt rozpraszania dla dwóch wirujących czarnych dziur [4]). Oprócz tego eksperci w przybliżeniu 3PN wyodrębniali niezmienniki dynamiki dwóch mas punktowych [5]. W jeszcze innej pracy dla 4PN wyznaczano potencjał grawitacyjny oddziaływania dwóch ciał [6].

Chociaż przybliżenie postnewtonowskie generalnie stosuje się do układów fizycznych, w których prędkości są dużo mniejsze od prędkości światła, a pole grawitacyjne też jest niewielkie, to jednak okazuje się, że można je także skutecznie zastosować

dla wielu szybko poruszających się systemów, jak np. pulsarów, dzięki czemu przybliżenie to może odegrać kluczową rolę w przewidywaniu sygnałów fal grawitacyjnych i w konsekwencji detekcji promieniowania grawitacyjnego za pomocą laserowych detektorów interferometrycznych [7], jednak wymagane mogą być wyższe rzędy przybliżenia [8]. Przybliżenie postnewtonowskie jest przydatne w kontekście testowania natury fal grawitacyjnych zarówno z użyciem detektorów starszej generacji, tzn. *LIGO*, *Virgo* i *KAGRA*, jak i mających co dopiero powstać detektorów *Cosmic Explorer*, *LISA* czy też Teleskopu Einsteina [9, 10].

Przybliżenie postnewtonowskie stosuje się także do przyspieszanych i obracających się układów odniesienia. Uzyskane tak wyniki mogą posłużyć do badania efektów relatywistycznych w odniesieniu do układów nieinercjalnych takich jak np. przyspieszany statek kosmiczny [11].

Dla przybliżenia postnewtonowskiego rozwiązywano problem trzech ciał (np. dla przybliżenia 1PN i 2PN) [12]. Badano także w tym przybliżeniu naturę zachowania układu trzech czarnych dziur m. in. w kontekście zapadania się systemu przy wzroście mas tych obiektów [13]. W ogólności naukowcy rozważają systemy złożone z N ciał rozwiązując równania pola grawitacyjnego przy użyciu omawianego przybliżenia [14]. Rozwijany jest opis postnewtonowski ruchu i precesji systemu składającego się z N rozciągłych i wolno obracających się ciał niebieskich [15]. Wykonana także została symulacja klastrowa aż do 3PN [16]. W innej pracy badano ogólną postać globalnych praw zachowania dla układów N -ciał w pierwszym postnewtonowskim przybliżeniu [17].

Przybliżenie postnewtonowskie aplikuje się także do hydrodynamiki relatywistycznej. W jednym z artykułów wyprowadzono równania hydrodynamiki w 2,5PN [18]. Okazuje się, że w zastosowanym przybliżeniu wystąpiły wyrazy odpowiadające za reakcję płynu na emisję promieniowania grawitacyjnego przez układ. Zaprezentowano także ogólną postać relatywistycznych kosmologicznych równań hydrodynamiki (opisujących zachowanie

*Sprawozdanie przygotowane na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w ramach przedmiotu 1100-ZPS1 Zespołowe projekty studenckie 1 (grupa 9, opiekun: Tomasz Tarkowski). Dokument dostępny pod adresem <https://www.fuw.edu.pl/~ttark/www/raporty/publiczne/2025-07-01/>.

wanie płynu w rozszerzającym się Wszechświecie) [19].

Problem N ciał i hydrodynamika relatywistyczna to jednak nie wszystko. Warto bowiem także wspomnieć o tym, że naukowcy dokonują porównań przybliżenia postnewtonowskiego z teorią perturbacji używaną w kosmologii [20].

Szerokie zastosowanie omawianego przybliżenia wskazuje na istotną skuteczność w opisie wielu modeli odnoszących się mniej lub bardziej konkretnie do rzeczywistych układów. Nas jednak przede wszystkim interesuje problem dwóch ciał. Zaczniemy zatem od ogólnej postaci równania ruchu dwóch ciał o masach m_1 i m_2 z poprawkami postnewtonowskimi [21]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = & -\frac{M}{R_{12}^2} \mathbf{N}_{12} + \frac{M}{R_{12}^2} \left[\mathbf{N}_{12} (A_{PN} + A_{2PN} + A_{3PN}) \right. \\ & \left. + \frac{dR_{12}}{dt} \mathbf{v} (B_{PN} + B_{2PN} + B_{3PN}) \right] \\ & + \frac{8}{5} \eta \frac{M}{R_{12}^2} \frac{M}{R_{12}} \left[\frac{dR_{12}}{dt} \mathbf{N}_{12} (A_{2,5PN} + A_{3,5PN}) \right. \\ & \left. - \mathbf{v} (B_{2,5PN} + B_{3,5PN}) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ opisuje wektor łączący oba ciała, $R_{12} = |\mathbf{x}|$ oznacza jego długość, $\mathbf{N}_{12} = \mathbf{x}/R_{12}$ to wektor normalny, $M = m_1 + m_2$, $\eta = m_1 m_2 / M^2$, a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ jest różnicą między prędkościami ciała o masie m_1 i ciała o masie m_2 . Przyjmujemy tutaj, że G i c są równe 1. Nas jednak co najwyżej interesować będzie drugi rząd przybliżeń. W takim wypadku wystarcza nam znajomość następujących wielkości [21]:

$$A_{PN} = -(1 + 3\eta)v^2 + \frac{3}{2}\eta \left(\frac{dR_{12}}{dt} \right)^2 + 2(2 + \eta) \frac{M}{R_{12}} \quad (2a)$$

$$B_{PN} = 2(2 - \eta) \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} A_{2PN} = & -\eta(3 - 4\eta)v^4 + \frac{1}{2}\eta(13 - 4\eta)v^2 \frac{M}{R_{12}} \\ & + \frac{3}{2}\eta(3 - 4\eta)v^2 \left(\frac{dR_{12}}{dt} \right)^2 \\ & + (2 + 25\eta + 2\eta^2) \left(\frac{dR_{12}}{dt} \right)^2 \frac{M}{R_{12}} \\ & - \frac{15}{8}\eta(1 - 3\eta) \left(\frac{dR_{12}}{dt} \right)^4 - \frac{3}{4}(12 + 29\eta) \left(\frac{M}{R_{12}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2c)$$

$$\begin{aligned} B_{2PN} = & \frac{1}{2}\eta(15 + 4\eta)v^2 - \frac{3}{2}\eta(3 + 2\eta) \left(\frac{dR_{12}}{dt} \right)^2 \\ & - \frac{1}{2}(4 + 41\eta + 8\eta^2) \frac{M}{R_{12}} \end{aligned} \quad (2d)$$

Dalszy układ pracy jest następujący. W pierwszej części omówiony zostanie algorytm zwany metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. Służy on do numerycznego przybliżenia rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego (ang. *ordinary differential equation*, ODE), zwanego dalej RRZ. Algorytm ten został wykorzystany do napisania programu służącego do rozwiązywania równań ruchu dla dwóch ciał w przybliżeniu postnewtonowskim. Na jego podstawie wygenerowano symulację dynamiki układu Słońce-Merkury i hipotetycznego zwanego układu podwójnego gwiazd. Druga część pracy poświęcona będzie algorytmowi symplektycznemu. Podobnie jak w poprzedniej części użyto tego algorytmu do wyznaczenia trajektorii dla ww. układów dwóch ciał. Trzecia część pracy dotyczyć będzie algorytmu Bulirsch-Stoera. Zostanie on omówiony bardzo dokładnie jako metoda

rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, a koszt obliczeniowy, dokładność tej metody itd. zostanie porównana ze wspomnianą wcześniej metodą Rungego-Kutty. Zarazem opisane zostaną konkretne przykłady użycia tego algorytmu. Biorąc pod uwagę efektywność i dokładność metody, pojawi się też odpowiedź na pytanie o jego możliwe zastosowanie dla układu Słońce-Merkury.

1 Metoda Rungego-Kutty

Do numerycznego przybliżenia rozwiązania RRZ można zastosować metodę Rungego-Kutty, zwaną dalej metodą RK. Mianem metod RK określa się rodzinę algorytmów rozwiązujących RRZ, które koncepcyjnie są ulepszonymi wersjami metody Eulera. W naszej pracy wykorzystaliśmy najbardziej popularny ich wariant, zwany metodą RK czwartego rzędu (w skrócie RK4).

1.1 Zasada działania

Przejdźmy teraz do wyjaśnienia zasady działania algorytmu RK4 [22]. Załóżmy, że chcemy rozwiązać RRZ rzędu n , z zadanymi warunkami początkowymi:

$$y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \dots, y'(t), y(t), t) \quad (3a)$$

$$y^{(i)}(t_0) = y_0^{(i)} \quad \text{dla } i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (3b)$$

gdzie y może być funkcją o wartościach wektorowych, a $y_0^{(i)}$ są stałymi. Aby zastosować metodę RK4 do tego równania, musimy najpierw sprowadzić je do równania pierwszego rzędu. Możemy to zrobić definiując funkcję wielowymiarową:

$$\tilde{y}(t) := (y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \dots, y'(t), y(t)) \quad (4)$$

która pozwala nam zapisać równania (3a) i (3b) w postaci:

$$\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(\tilde{y}(t), t) := (f(\tilde{y}(t), t), y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \dots, y'(t)) \quad (5a)$$

$$\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0 (y_0^{(n-1)}, y_0^{(n-2)}, \dots, y_0', y_0) \quad (5b)$$

Następnie obliczymy przybliżoną wartość funkcji $\tilde{y}$, a zatem funkcji y oraz jej pochodnych, w czasie $t_0 + \Delta t$, gdzie Δt jest dowolnie wybranym przez nas krokiem czasowym. W tym celu obliczymy wartości funkcji $\tilde{f}$ w czterech różnych punktach:

$$k_1 := \tilde{f}(\tilde{y}(t_0), t_0) \quad (6a)$$

$$k_2 := \tilde{f}\left(\tilde{y}(t_0) + k_1 \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (6b)$$

$$k_3 := \tilde{f}\left(\tilde{y}(t_0) + k_2 \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (6c)$$

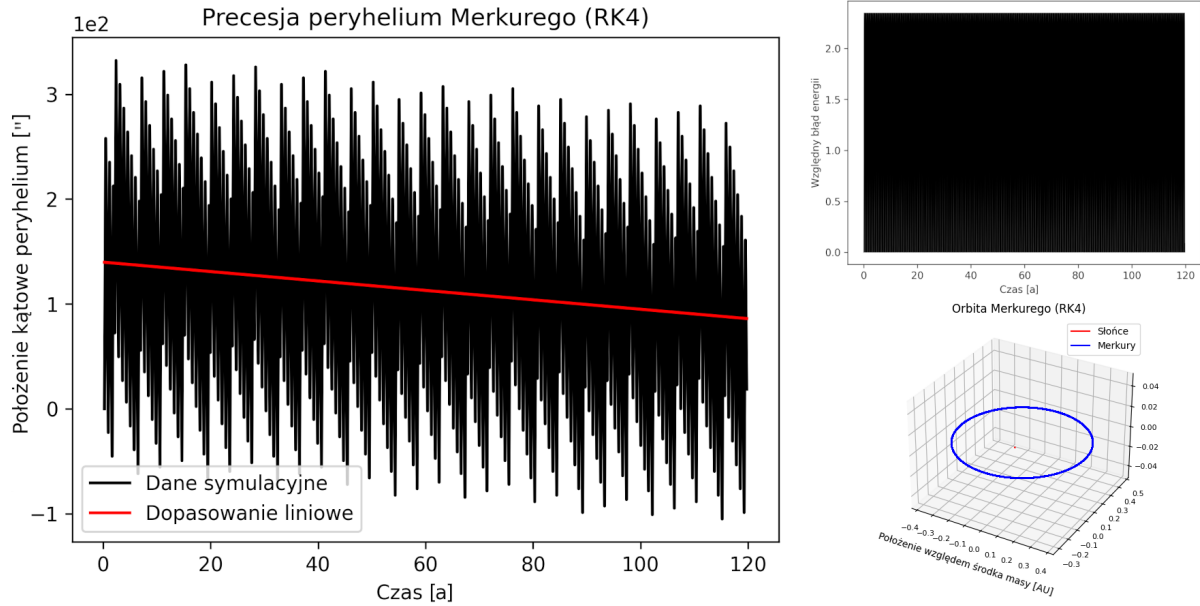
$$k_4 := \tilde{f}(\tilde{y}(t_0) + k_3 \Delta t, t_0 + \Delta t) \quad (6d)$$

po czym oszacujemy szukaną wartość funkcji $\tilde{y}$ wzorem:

$$\tilde{y}(t_0 + \Delta t) \approx \tilde{y}(t_0) + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

Krok ten możemy powtórzyć wielokrotnie dla dowolnego Δt , co pozwala nam przybliżyć wartość $\tilde{y}$ w każdej chwili czasu.

Zauważmy, że korzystając z powyższej notacji możemy przedstawić również metodę Eulera — różni się ona jedynie



Rysunek 1: Wyniki symulacji z użyciem metody Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4) dla układu Słońce-Merkury z poprawką postnewtonowską pierwszego rzędu. Parametry symulacji: $m_1 = M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, $m_2 = M_\text{M} = 3,301 \cdot 10^{23}$ kg $\approx 1,7 \cdot 10^{-7} M_\odot$, peryhelium $q = 4,6 \cdot 10^{10}$ m $\approx 0,307$ AU, $v_0 = 59$ km/s, krok czasowy $\tau = 1520$ s, czas 120 lat juliańskich. *Panel lewy*: Położenie kątowe peryhelium Merkurego wraz z dopasowaną prostą. *Panel prawy górny*: Względny błąd energii w funkcji czasu. *Panel prawy dolny*: Tory ruchu Słońca oraz Merkurego.

tym, że zamiast wzoru (7) wykorzystuje się w niej przybliżenie $\tilde{y}(t_0 + \Delta t) \approx \tilde{y}(t_0) + k_1 \Delta t$. Graficznie metoda Eulera odpowiada przybliżaniu szukanej funkcji przez jej styczne w kolejnych punktach, przez co nie bierze pod uwagę faktu, że w ogólnym przypadku pochodna funkcji nie jest stała na odcinku $(t_0, t_0 + \Delta)$. Metoda RK4 koryguje ten problem, licząc średnią wartość pochodnej na podstawie wyżej zdefiniowanych punktów. Są one dobrane w taki sposób, że łączny błąd wyznaczenia $\tilde{y}(t_0 + n\Delta t)$ (gdzie $n \in \mathbb{N}$) jest funkcją czwartego rzędu w Δt [22]. Dla porównania, w przypadku algorytmu Eulera ten sam błąd jest funkcją rzędu pierwszego w Δt .

Metodę RK4 zastosowaliśmy do numerycznego rozwiązania równań ruchu dla dwóch ciał w przybliżeniu postnewtonowskim do drugiego rzędu zgodnie ze wzorem (1). Napisaaliśmy w tym celu program w języku C++, którego kod źródłowy został przez nas udostępniony publicznie. Przy jego pomocy przeprowadziliśmy symulację dynamiki układu Słońce-Merkury, na podstawie której wyznaczaliśmy tempo precesji peryhelium Merkurego, oraz przykładowego układu o arbitralnie dobranych parametrach startowych, na którego przykładzie dokładniej pokazaliśmy własności algorytmu.

1.2 Symulacja

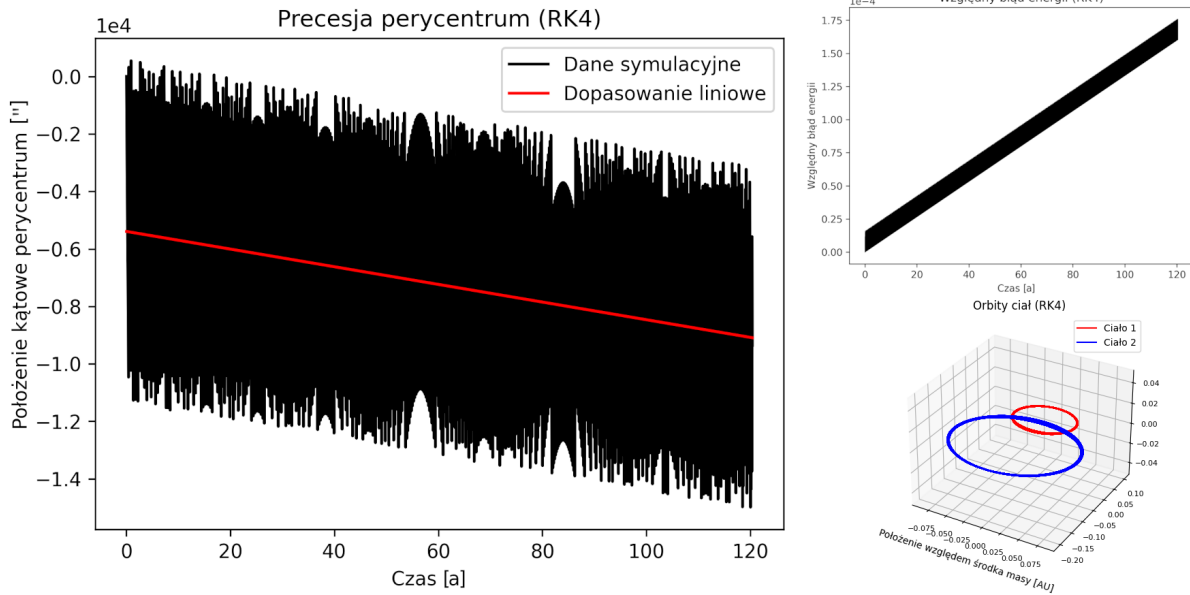
Wielkości potrzebne do rozpoczęcia symulacji (tj. masy Słońca $M_\odot$ i Merkurego M_M , minimalną odległość Merkurego od Słońca q i maksymalną prędkość Merkurego v_0) otrzymano z danych zebranych przez NASA [23]. Zasympulowaliśmy 120 lat juliańskich (stosowany symbol na oznaczenie to a) obiegu Merkurego wokół Słońca z krokiem czasowym wynoszącym 1520 sekund, zaczynając od położenia w peryhelium. Krok czasowy dobraliśmy tak, aby był jak najmniejszy, ale pozwalający na przeprowadzenie symulacji z takimi samymi parametrami w odpowiednio krótkim czasie również przy pomocy omawianego dalej algorytmu symplektycznego. Na podstawie położań otrzymanych z symulacji wyznaczaliśmy lokalne minima odległości Słońce-Merkury, obliczyliśmy ich położenia kątowe liczone

względem Słońca (jako położenie 0° przyjęto położenie pierwszego peryhelium), a następnie dopasowaliśmy do nich prostą. Wyniki przedstawiliśmy na rys. 1.

Z parametrów dopasowania odczytaliśmy wartość średniej prędkości precesji peryhelium, wynoszącą $(46 \pm 15)''/100$ a, co jest zgodne z klasyczną wartością 38 sekund kątowych na stulecie wyznaczoną przez Le Verriera oraz z wartością 43 sekund kątowych na stulecie podaną później przez Newcomba i uznawaną obecnie [24]. Duża niepewność dopasowania jest spowodowana tym, że dane symulacyjne nie leżą dokładnie na przewidywanej prostej, a układają się w periodyczny sposób po obu jej stronach. Najprawdopodobniej jest to artefakt spowodowany skończoną dokładnością symulacji numerycznej i odnalezienie dokładnego powodu tego zjawiska może być tematem dalszych inwestygacji. Obliczenia przeprowadziliśmy zarówno w rzędzie 1PN jak i 2PN, ale wkłady od poprawki drugiego rzędu były mniejsze niż dokładność przeprowadzanych obliczeń numerycznych, w związku z tym wszystkie dane przedstawiamy dla obliczeń z poprawką pierwszego rzędu.

Na rys. 1 przedstawiliśmy również względny błąd energii w symulacji RK4 w zależności od czasu policzony ze wzoru wyprowadzonego przez Schäfera [25], który to wzór bierze pod uwagę poprawki postnewtonowskie. Błąd ten miał charakter periodyczny o bardzo małym okresie zmian, co sprawia, że wykres jest trudny do odczytania. Dla dłuższych symulacji oraz dla symulacji z większym krokiem czasowym zaczyna być widoczny wzrost średniej wartości błędu z czasem, co można zobaczyć w wynikach drugiej przeprowadzonej przez nas symulacji (rys. 2). Brak wzrostu średniej wartości błędu oznacza, że dobrany krok czasowy jest na tyle mały, że błędy ze wszystkich kroków nie wzmacniły się.

Oprócz powyższej symulacji przeprowadziliśmy również symulację ruchu hipotetycznego zwartego układu podwójnego gwiazd o masach odpowiednio $M_\odot$ oraz $2M_\odot$, w chwili rozpoczęcia symulacji oddalonych od siebie o $q = 4,6 \cdot 10^7$ km, poruszających się względem siebie z prędkością $v_0 = 50$ km/s zwróconą początkowo prostopadłe do łączącego je odcinka. Sy-



Rysunek 2: Wyniki symulacji z użyciem metody Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4) dla przykładowego zwanego układu podwójnego z poprawką postnewtonowską pierwszego rzędu. Parametry symulacji: $m_1 = 2M_\odot = 3,978 \cdot 10^{30}$ kg, $m_2 = M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, periastron $q = 4,6 \cdot 10^{10}$ m $\approx 0,307$ AU, $v_0 = 50$ km/s, krok czasowy $\tau = 1520$ s, czas 120 lat juliańskich. *Panel lewy*: Położenie kątowne periastronu wraz z dopasowaną prostą. *Panel prawy górny*: Względny błąd energii w funkcji czasu. *Panel prawy dolny*: Tory ruchu dwóch ciał.

mulację przeprowadziliśmy dla kroku czasowego równego 1520 sekund a sumarycznie zasymulowaliśmy 120 lat juliańskich ruchu obu ciał. Krok czasowy wybraliśmy na tej samej zasadzie, co w przypadku układu Słońce-Merkury.

Wyznaczyliśmy średnią prędkość precesji periastronu tego układu jako 31 sekund kątowych na rok, z dokładnością dopasowania równą 2 sekundy na rok, w sposób analogiczny do tego wykorzystanego do wyznaczenia prędkości precesji peryhelium Merkurego. Wyniki przedstawiono na rys. 2. Podobnie jak w przypadku układu z Merkurym, punkty symulacyjne nie leżą na przewidywanej prostej, ale są ułożone w powtarzające się struktury, jednak tym razem nie jest widoczna struktura *stricte* periodyczna. Dalej jednak są one na tyle regularne, że nie wyglądają jak zwyczajny szum. Ponownie obliczenia przeprowadziliśmy zarówno w rzędzie 1PN jak i 2PN. Tym razem poprawki drugiego rzędu przeniosły się na zmianę wyników numerycznych, jednak wciąż były one zbyt małe, aby były one widoczne na wykresach bądź zmieniły otrzymane tempo precesji periastronu. W związku z tym postawiliśmy dalej przedstawiać jedynie wykresy dla pierwszego rzędu poprawek postnewtonowskich.

Na rys. 2 przedstawiono również względne błędy energii w symulacji przykładowego układu podwójnego. Dla tego układu dokładnie widać dodawanie się błędów energii w poszczególnych krokach symulacji, co skutkuje liniowym wzrostem średniej wartości błędów wraz z czasem trwania symulacji. Błędy te są większe niż w przypadku układu Merkury-Słońce, ponieważ orbita ciał w układzie przykładowym mają znacznie większą ekscentryczność, przez co zmiany przyspieszeń ciał w czasie są znacznie większe. Pomimo tego, przez cały okres trwania symulacji względny błąd energii nie przekroczył 1%. Ponadto, na rys. 2 przedstawiono tory ruchu ciał. Widać na nim lekkie przesunięcie orbit objawiające się pogrubieniem torów ruchu ciał, spowodowanym przez nakładanie się kolejnych orbit na siebie. Takiego pogrubienia nie zaobserwowano na torze Merkurego przedstawionego na rys. 1.

2 Algorytm symplektyczny

Zwykle właściwości, które w dokładnych rozwiązaniach są zachowane, takie jak energia lub pęd, nie są zachowane w rozwiązaniach numerycznych. Ideą integratorów geometrycznych, a w szczególności poruszonych w tej pracy integratorów symplektycznych, zwanych dalej SI, jest wykorzystanie pewnego rodzaju symetrii dla każdego kroku w celu uzyskania lepszych rozwiązań długoterminowych. Zaczniemy od wprowadzenia mechaniki hamiltonowskiej na rozmaitościach symplektycznych. Zainteresowany szczegółami Czytelnik może chcieć zapoznać się z ref. [26].

2.1 Zasada działania

Na rzecz tej pracy zdefiniujemy hamiltonian jako gładką funkcję $H: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$. Dla hamiltonianu H możemy zdefiniować pole wektorowe zwane polem hamiltonowskim poprzez relację:

$$dH = -i_{X_H}(\omega) \quad (8)$$

gdzie i oznacza zwężenie a ω jest formą symplektyczną. Dla wygody często zamiast (q, p) będziemy pisać z i wówczas klasyczne równania Hamiltona:

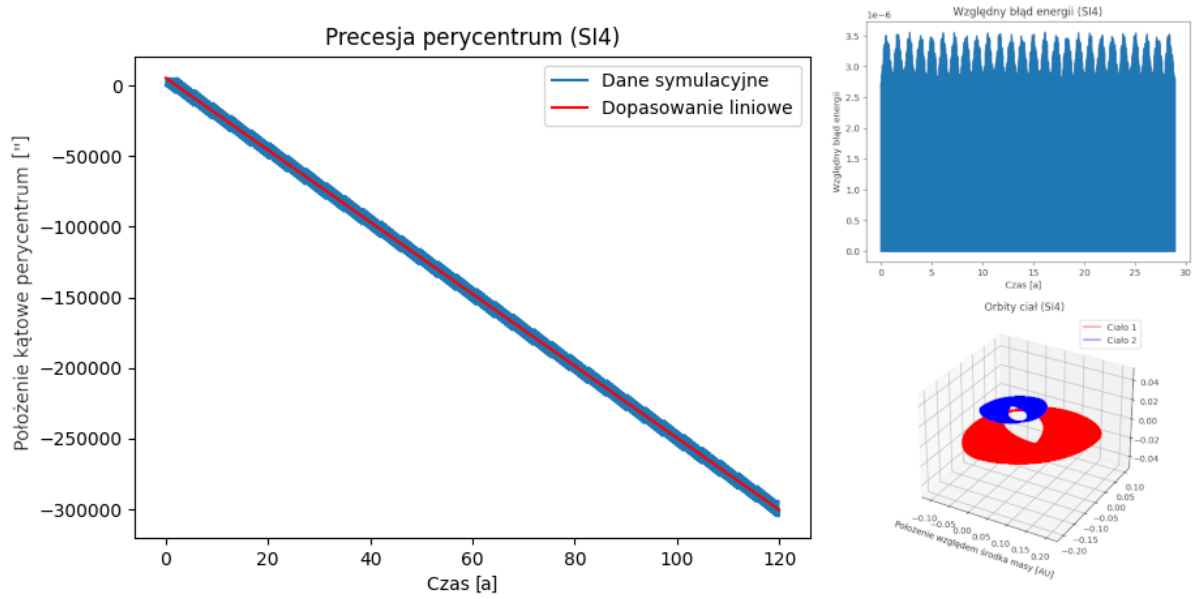
$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (9a)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (9b)$$

zapiszemy jako:

$$\frac{dz}{dt} = X_H(z) \quad (10)$$

Dwie najważniejsze własności rozwiązań równań Hamiltona (potoku pola hamiltonowskiego) to zachowywanie energii i formy symplektycznej. W tej części pracy zajmiemy się integratorami, które zachowują formę symplektyczną.



Rysunek 3: Wyniki symulacji z użyciem algorytmu symplektycznego czwartego rzędu (SI4) dla przykładowego zwanego układu podwójnego z poprawką postnewtonowską pierwszego rzędu. Parametry symulacji: $m_1 = 2M_\odot = 3,978 \cdot 10^{30}$ kg, $m_2 = M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, periastron $q = 4,6 \cdot 10^{10}$ m $\approx 0,307$ AU, $v_0 = 50$ km/s, krok czasowy $\tau = 1520$ s, czas 120 lat juliańskich, $\lambda = 1/150$, $\Omega = 4/\tau$. Panel lewy: Położenie katowe periastronu wraz z dopasowaną prostą. Panel prawy górny: Względny błąd energii w funkcji czasu. Panel prawy dolny: Tory ruchu dwóch ciał.

Do obliczeń numerycznych wykorzystamy algorytm wprowadzony w 2016 przez Molei Tao [27], który wykorzystuje metodę podwajania przestrzeni fazowej $M^2 = M \times M$. Na tej nowej rozmiarowości M^2 wprowadzimy współrzędne (q, x) , a na T^*M^2 współrzędne (q, x, p, y) z formą symplektyczną:

$$\omega = dq^i \wedge dp_i + dx^i \wedge dy_i \quad (11)$$

Algorytm pozwala na rozwiązywanie problemów, w których występuje dowolny hamiltonian niezależny od czasu, a dobrych długotrwałych rozwiązań możemy oczekiwać od układów całkowalnych (bez dodatniego wykładnika Lyapunova). Algorytm polega na rozwiązywaniu równań dla zmienionego hamiltonianu:

$$\begin{aligned} \bar{H}(q, x, p, y) &= H_A(q, y) + H_B(x, p) + \Omega H_C \\ &= H_A(q, y) + H_B(x, p) + \Omega \frac{\|q - x\|^2 + \lambda^2 \|p - y\|^2}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie $H_A = H_B = H$, a część ΩH_C odpowiada za utrzymywanie dwóch kopii współrzędnych blisko siebie podczas całkowania numerycznego. Teraz równania Hamiltona to:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i} + \Omega \lambda^2 (p_i - y_i) \quad (13a)$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i} = \frac{\partial H(q, y)}{\partial y_i} + \Omega \lambda^2 (y_i - p_i) \quad (13b)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q^i} = -\frac{\partial H(q, y)}{\partial q^i} - \Omega (q^i - x^i) \quad (13c)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x^i} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x^i} - \Omega (x^i - q^i) \quad (13d)$$

Zauważmy, że rozwiązania dokładne tych równań pokrywają się z rozwiązaniami dla oryginalnego hamiltonianu H jeśli tylko $q_0 = x_0$ i $p_0 = y_0$. Jako, że pochodne H_A po położeniach q nie zależą od pędów p i *vice versa* to możemy znaleźć dokładne

rozwiązania na potoki części H_A , H_B i H_C a następnie numerycznie je składać by przybliżać rozwiązanie $\bar{H}$. Jeśli potok pola hamiltonowskiego od funkcji f oznaczmy przez ϕ_f^τ to:

$$\phi_{H_A}^\tau : \begin{bmatrix} q \\ x \\ p \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} q \\ x + \tau \partial_y H(q, y) \\ p - \tau \partial_q H(q, y) \\ y \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$\phi_{H_B}^\tau : \begin{bmatrix} q \\ x \\ p \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} q + \tau \partial_p H(x, p) \\ x \\ p \\ y - \tau \partial_x H(x, p) \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$\phi_{H_C}^\tau : \begin{bmatrix} q \\ x \\ p \\ y \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q(1 + \cos \alpha) + x(1 - \cos \alpha) + \lambda \sin \alpha (p - y) \\ x(1 + \cos \alpha) + q(1 - \cos \alpha) - \lambda \sin \alpha (p - y) \\ p(1 + \cos \alpha) + y(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{\lambda} \sin \alpha (q - x) \\ y(1 + \cos \alpha) + p(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{\lambda} \sin \alpha (q - x) \end{bmatrix} \quad (14c)$$

$$\alpha = 2\Omega\lambda\tau \quad (14d)$$

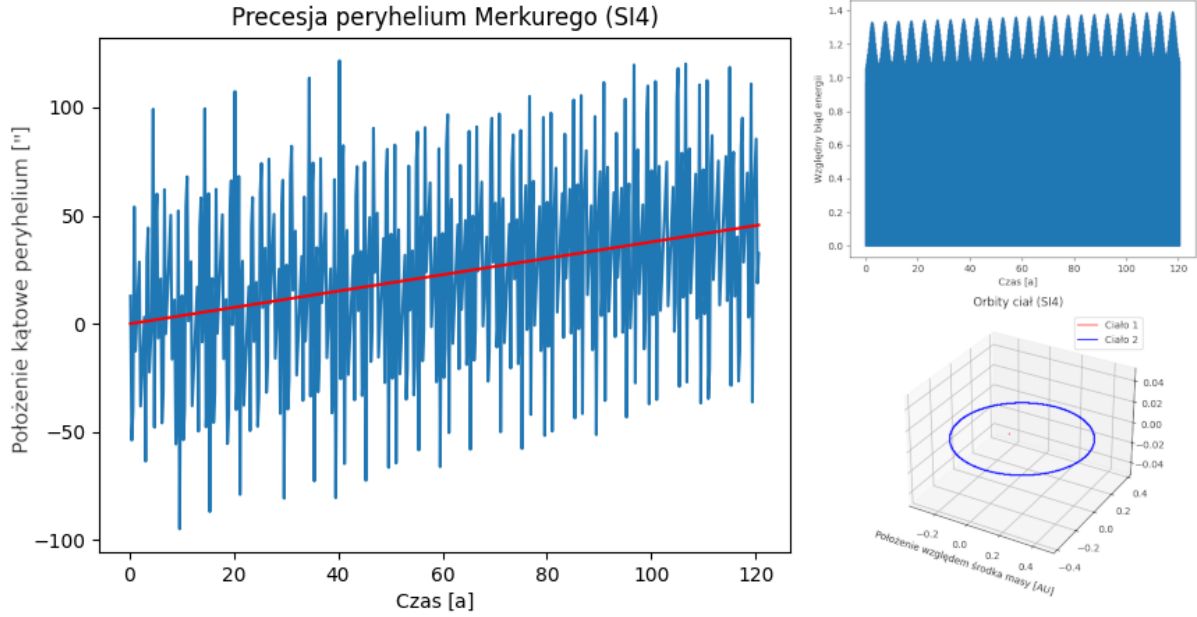
By utrzymać przybliżony (do drugiego rzędu) potok pola hamiltonowskiego od hamiltonianu $\bar{H}$ użyjemy rozdzielania Stranga. Wówczas:

$$\phi_2^\tau = \phi_{H_A}^{\tau/2} \circ \phi_{H_B}^{\tau/2} \circ \phi_{H_C}^\tau \circ \phi_{H_B}^{\tau/2} \circ \phi_{H_A}^{\tau/2} \quad (15)$$

Możemy również otrzymać integrator dowolnego (parzystego) rzędu przy pomocy skoku potrójnego:

$$\phi_l^\tau = \phi_{l-2}^{\gamma_l \tau} \circ \phi_{l-2}^{(1-2\gamma_l)\tau} \circ \phi_{l-2}^{\gamma_l \tau} \quad (16)$$

Hamiltonian dla problemu dwóch ciał w przybliżeniu 1PN



Rysunek 4: Wyniki symulacji z użyciem algorytmu symplektycznego czwartego rzędu (SI4) dla układu Słońce-Merkury z poprawką postnewtonowską pierwszego rzędu. Parametry symulacji: $m_1 = M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, $m_2 = M_\text{M} = 3,3285 \cdot 10^{23}$ kg $\approx 1,7 \cdot 10^{-7} M_\odot$, peryhelium $q = 4,6 \cdot 10^{10}$ m $\approx 0,307$ AU, $v_0 = 58,97$ km/s, krok czasowy $\tau = T/25000 \approx 304$ s (gdzie T to okres orbitalny Merkurego, tzn. 88 dni), czas $t = 500T$ (czyli ok. 120 lat juliańskich), $\lambda = 1$, $\Omega = 4/\tau$. *Panel lewy*: Położenie kątowe peryhelium Merkurego wraz z dopasowaną prostą. *Panel prawy górny*: Względny błąd energii w funkcji czasu. *Panel prawy dolny*: Tory ruchu Słońca oraz Merkurego.

dany jest wzorem [10, str. 147, wzory (351a) i (351b)]:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{m_1^2} + \frac{p_2^2}{m_2^2} \right) - G \frac{m_1 m_2}{R_{12}} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{G^2}{2} \left(\frac{m_1^2 m_2}{R_{12}^2} + \frac{m_1 m_2^2}{R_{12}^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{p_1^4}{m_1^3} + \frac{p_2^4}{m_2^3} \right) + \frac{G m_1 m_2}{8 R_{12}} \left(28 \frac{p_1 \cdot p_2}{m_1 m_2} - 12 \left(\frac{p_1^2}{m_1^2} + \frac{p_2^2}{m_2^2} \right) + 4 \frac{(N_{12} \cdot p_1)(N_{12} \cdot p_2)}{m_1 m_2} \right) \right] \quad (17)$$

gdzie p_i są pędami dwóch ciał, m_i ich masami a R_{12} i N_{12} mają to samo znaczenie co we wzorze (1). Poprzez μ oznaczamy masę zredukowaną, czyli $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Tak jak w przypadku czysto newtonowskim możemy użyć współrzędnych środka masy, co zredukuje problem do jedynie trzech współrzędnych położenia i trzech współrzędnych pędów.

Algorytmy symplektyczne zachowują energię z dokładnością do poprawki w kroku przynajmniej rzędu integratora [28]. To oznacza, że dla integratora rzędu n zachowywane jest:

$$H' = H + \tau^n H_n + O(\tau^{n+1}) \quad (18)$$

gdzie H to oryginalny hamiltonian, H_n jest nieznaną poprawką, a τ jest krokiem całkowania.

2.2 Symulacja

Podobnie jak w przypadku metody RK4 wykonaliśmy, tym razem z użyciem języka Python, obliczenia dla układu Słońce-Merkury oraz dla hipotetycznego zwartego układu podwójnego o wcześniej opisanych parametrach. Zaczniemy od omówienia symulacji dla hipotetycznego zwartego układu podwójnego. Używamy tutaj integratora rzędu $n = 4$ z parametrami $\lambda = 1/150$ oraz $\Omega = 4/\tau$,

gdzie $\tau = 1520$ s jest krokiem czasowym. Zasympulowaliśmy czas $t = 120$ a a wyniki obliczeń zostały przedstawione na rys. 3. Widzimy, że błąd energii jest ograniczony w czasie i nie ma komponentu liniowego (zgodnie z przewidywaniami). Na wykresie trajektorii odnotowujemy spore przesunięcia periastronu co potwierdza wykres przesunięcia periastronu od czasu, do którego dopasowano prostą, której nachylenie wynosi $-2549''/a$. Wartość ta nie zgadza się z wynikiem obliczeń RK4. Wynika to z faktu, że wybrany został zbyt duży krok całkowania. Dla stabilności algorytmu symplektycznego należy wybierać mniejsze wartości tego kroku. I tak właśnie uczyniliśmy w przypadku obliczeń dla układu Słońce-Merkury. Podobnie jak w poprzednim przypadku $n = 4$, $\Omega = 4/\tau$, z tym, że tym razem $\tau = T/25000 \approx 304$ s, $t = 500T$, gdzie T jest okresem orbitalnym Merkurego. Nauczni poprzednim przykładem, w którym krok był zdecydowanie zbyt duży by uzyskać sensowny wynik, obniżyliśmy jego wartość o czynnik pięć. Wyniki symulacji przedstawiliśmy na rys. 4. Znow widzimy, że błąd jest ograniczony w czasie. Na wykresie trajektorii nie widać oczywistego przesunięcia od orbity eliptycznej. Na wykresie przesunięcia peryhelium od czasu widzimy jednak, że jakieś przesunięcie występuje. Dane są bardzo zażsumione, co wynika z niepewności wyznaczenia minimum odległości między ciałami. Mimo tego, do danych dopasowano funkcję liniową, której nachylenie jest równe $37,8''/100$ a, co stanowi błąd na poziomie 12%-14% względem wartości otrzymanej z obserwacji astronomicznych [24]. Uzyskany wynik uznajemy za satysfakcjonujący. Jako ciekawostkę chcielibyśmy jeszcze dodać, że wykonaliśmy obliczenia dla układu Słońce-Merkury z krokiem całkowania $\tau = 1520$ s i otrzymany wynik, pomimo większego o czynnik pięć kroku, był odległy jedynie o 20% od prawdziwej wartości. Z drugiej strony, metoda RK4 była w stanie wyznaczyć tempo precesji z błędem na poziomie zaledwie 7%. Oznacza to, że SI, choć jest zaprojektowany aby zachowywać rozwiązania długoterminowo, może mieć gorszą lokalną precyzję niż algorytm RK, co może być widoczne przy subtelnym problemie precesji peryhelium.

3 Algorytm Bulirscha-Stoera

W tej części naszej pracy znajduje się krótki opis działania algorytmu Bulirscha-Stoera, zwanego dalej algorytmem B-S. Znajduje się tutaj wyjaśnienie, jakie znaczenie mają i jak w algorytmie B-S współdziałają ze sobą metoda punktu środkowego i ekstrapolacja Richardsona. Zawarliśmy tutaj przykłady wykorzystania algorytmu B-S. Opis algorytmu można znaleźć w literaturze, w szczególności ref. [29] zawiera pełne wyjaśnienie, które zostało tutaj jedynie skrótowo omówione.

Algorytm B-S jest metodą numeryczną pozwalającą rozwiązywać RRZ z wysoką dokładnością. Algorytm łączy tzw. metodę punktu środkowego (ang. *modified midpoint method*) oraz ekstrapolację Richardsona w celu rozwiązania RRZ. Metoda punktu środkowego jest wykorzystywana do rozwiązania RRZ z określoną wielkością kroku, a ekstrapolacja Richardsona jest używana w celu poprawy dokładności rozwiązania poprzez zmniejszenie błędu metody.

3.1 Metoda punktu środkowego

Zmodyfikowana metoda punktu środkowego już sama w sobie może być używana do znajdowania przybliżonych rozwiązań równań różniczkowych [30, 31]. Bierze ona wartość jakiejś funkcji w punktach x_n należących do przedziału $[x, x + H]$, oddalonych od siebie o H/n , gdzie n jest liczbą naturalną. Ma to na celu przybliżenie wartości funkcji w punkcie $x + H$. Cały algorytm można przedstawić formie zwięzłej instrukcji pokazanej poniżej.

Ustaw:

$$z_0 = y(x)$$

Oblicz pierwszy krok jawnie:

$$z_1 = z_0 + hf(x, z_0)$$

Następnie stosuj rekurencję:

$$z_{m+1} = z_m + 2hf(x + mh, z_m), \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots, n-1$$

Końcowe przybliżenie rozwiązania:

$$y(x + H) \approx \frac{1}{2} (z_n + z_{n-1} + hf(x + H, z_n))$$

3.2 Ekstrapolacja Richardsona

Ekstrapolacja Richardsona [32] służy do poprawy szybkości zbieżności oszacowanego ciągu [33, str. 185-200]. Osiąga to poprzez użycie oszacowań z różnymi krokami i ich połączenie w celu wyeliminowania głównego składnika błędu. Pozwala to na lepsze przybliżenia. Metoda ta działa, gdy estymowaną wartość wraz otrzymanymi błędami można zapisać w postaci:

$$A(h) = A + c_1 h^p + c_2 h^{p+1} + \dots \quad (19)$$

Można następnie zapisać estymowane wartości dla różnych kroków przykładowo h i $h/2$:

$$A(h) = A + c_1 h^p + O(h^{p+1}) \quad (20a)$$

$$A(h/2) = A + c_1 \left(\frac{h}{2}\right)^p + O(h^{p+1}) = A + \frac{c_1 h^p}{2^p} + O(h^{p+1}) \quad (20b)$$

gdzie $R(h)$ to wartość ekstrapolowana, $A(h)$ i $A(h/2)$ to przybliżenia z krokami h i $h/2$ zaś p to rząd metody (dla metody

punktu środkowego $p = 2$). Wartość ekstrapolowaną $R(h)$ można obliczyć odejmując powyższe wyrażenia w sposób eliminujący h :

$$R(h) = \frac{2^p A(h/2) - A(h)}{2^p - 1} \quad (21)$$

Skutkuje to tym, że główny składnik błędu w poprzednim równaniu zostaje wyeliminowany. W notacji dużego O , ekstrapolacja Richardsona zmienia rząd błędu z $O(h^p)$ na $O(h^{p+1})$, poprawiając dokładność.

3.3 Algorytm Bulirscha-Stoera

Metoda Bulirscha-Stoera łączy zmodyfikowaną metodę punktu środkowego oraz ekstrapolację Richardsona w celu uzyskania dokładniejszych rozwiązań RRZ [29]. Algorytm B-S działa dobrze przede wszystkim dla gładkich problemów, które nie mają punktów osobliwych w rozważanym przedziale całkowania. Algorytm B-S jest bardzo precyzyjny kosztem trudniejszej implementacji. W praktyce, dla każdego kroku całkowania H , algorytm dzieli go przez kolejne parzyste liczby $n = 2, 4, 6, \dots$, a dla każdego takiego podziału wykonuje obliczenia zmodyfikowaną metodą punktu środkowego. Wyniki tych obliczeń są następnie poddawane ekstrapolacji wielomianowej, co pozwala na eliminację głównych składników błędu. Istnieje górny limit liczby elementów ciągu używanych w zmodyfikowanej metodzie punktu środkowego, po którym zamiast dzielić H przez n , zmniejszane jest H . Zwykle ten limit ustawia się na ósmym elemencie ciągu, czyli 16.

Każdy wynik całkowania zmodyfikowaną metodą punktu środkowego dla elementu ciągu jest używany do adaptacyjnej kontroli błędu i kroku poprzez porównanie. Przy zadanej tolerancji błędu, definiuje się warunki, jakie musi spełniać przybliżenie, aby zostało uznane za poprawne.

W celu uzyskania adaptacyjnej kontroli kroków i błędu wykorzystuje się pojęcie lokalnego błędu ucięcia (ang. *local truncation error*). Licząc go dla zmodyfikowanej metody punktu środkowego można otrzymać macierz trójkątną. Dla kolejnych wartości liczby podkroków n_j , metoda B-S tworzy tablicę $T_{k,j}$, której kolejne wiersze odpowiadają kolejnym przybliżeniom uzyskanym dla różnych wartości n uzyskanych na podstawie metody zmodyfikowanego punktu środkowego i ekstrapolacji wielomianowej [29]:

$$\begin{array}{cccc} T_{0,0} & & & \\ T_{1,0} & T_{1,1} & & \\ T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} & \\ T_{3,0} & T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad (22)$$

Następnie na bazie tej tablicy, a dokładniej na podstawie różnic pomiędzy kolejnymi przybliżeniami, wyznaczany jest lokalny błąd ucięcia (ang. *local truncation error*) czyli wielkość ϵ_k , która służy do kontroli wartości błędu:

$$\epsilon_k = ||T_{k,k} - T_{k,k-1}|| \quad (23)$$

Od wartości ϵ_k wymaga się, aby była mniejsza od ustalonej tolerancji, co odpowiada za kontrolę błędu, przy czym błąd lokalny metody B-S wynosi $O(h^{2n})$ dzięki właściwościom ekstrapolacji Richardsona, a błąd globalny wynosi $O(h^{2n-1})$. Następnie, przez badanie lokalnego błędu ucięcia oraz pracy na krok (ang. *work per step*) algorytm ustala w jakim przypadku i jak zmniejszyć

Tabela 1: Porównanie metody Bulirsch–Stoera i Rungego–Kutty (RK4)

Cecha	Bulirsch–Stoer	Runge–Kutta (RK4)
Dokładność	Bardzo wysoka (adaptacyjna)	Wysoka (stała)
Koszt obliczeniowy	Wysoki	Średni/Niski
Krok adaptacyjny	Tak	Wymaga dodatkowych modyfikacji
Przydatność przy zbliżeniach	Wysoka	Średnia
Łatwość implementacji	Średnia/Trudna	Łatwa

krok całkowania H . Przybliżenie otrzymanego H dla indeksu k jest podane wzorem:

$$H_k = HS_1 \left(\frac{S_2}{\epsilon_k} \right)^{(2k+1)} \quad (24)$$

gdzie S_1 i S_2 są stałymi mniejszymi od jednego. Innymi słowy, algorytm sprawdza, które wartości indeksów k i j spełniają narzucone warunki i odpowiednio dostosowuje wartość błędu i kroku. Algorytm adaptacyjnie dobiera zarówno liczbę podkroków, jak i długość kroku całkowania, aby zapewnić wymaganą dokładność przy optymalnym nakładzie obliczeniowym.

3.4 Przykłady wykorzystania algorytmu Bulirsch–Stoera

Dalej przedstawiamy krótkie podsumowanie dwóch prac wykorzystujących algorytm B-S. W pierwszej z nich algorytm ten został zastosowany w celu badania jego skuteczności w numerycznym obliczaniu orbity komety C/1845 D1 (de Vico) [34]. Został on porównany z 12-rzędową metodą predyktora-korektora (P-C) ze względu na potencjał algorytmu B-S, czyli jego dokładność i adaptacyjność. Sam algorytm B-S cechuje się tym, że jest samostartujący, automatycznie kontroluje krok całkowania i dostarcza dokładności porównywalnej z metodą P-C. Jak się okazało niestety algorytm B-S wymagał znacznie więcej obliczeń, by uzyskać porównywalne wyniki — wymagał większej ilości pamięci oraz czasu. Dodatkowo algorytm B-S nie ma stałej wielkości kroku, przez co potrzebne było użycie interpolacji, co w tym przypadku wprowadzało dodatkowe błędy. Ostatecznie badany algorytm okazał się cechować elastycznością i dokładnością, lecz nadal był gorszy od wysokorzędowej techniki P-C w przypadku standardowych orbit. Jednakże stwierdzono, że algorytm B-S, dzięki dynamicznej kontroli wielkości kroku, nadal ma zastosowanie w przypadkach, w których obiekty zbliżają się na niewielkie odległości. Z kolei w drugiej pracy algorytm B-S znalazł zastosowanie w zagadnieniu planarnie ograniczonego problemu trzech ciał [35]. Algorytm B-S został do tego celu wybrany ze względu na jego dokładność w rozwiązywaniu równań różniczkowych dla problemów wyróżniających się gładkością oraz przez fakt, że dobrze sobie radzi w problemach, w których dochodzi do istotnych zbliżeń obiektów. Algorytm B-S okazał się skuteczny w badaniu dynamiki układów egzoplanetarnych z wysoką rozdzielczością.

Powyższe dwa przykłady zastosowań pokazują, że metoda B-S może być użyteczna w astrodynamice, zwłaszcza tam, gdzie inne metody mogą być mniej efektywne lub dokładne, czyli np. w sytuacji orbit o wysokiej ekscentryczności. Jeśli chodzi o problem układu Słońce-Merkury z poprawkami postnewtonowskimi algorytm mógłby okazać się mniej efektywny od RK, co jest spowodowane tym, że sama orbita jest mało ekscentryczna, a precesja jego peryhelium wywołana przez Słońce wynosi około $43''/100$ a. Algorytm B-S mógłby znaleźć zastosowanie między innymi w problemie trzech ciał, gdzie dochodzi do istotnych zbliżeń i jego koszty zostałyby zrównoważone przez uzyskane

efekty. Krótkie porównanie algorytmu B-S z metodą RK znajduje się w tab. 1.

Podsumowanie

W pracy udało się prawidłowo wyznaczyć relatywistyczną część precesji peryhelium Merkurego na podstawie samodzielnie napisanych programów komputerowych działających w oparciu o dwucałowy hamiltonian z postnewtonowską poprawką pierwszego i drugiego rzędu. Stworzone przez nas oprogramowanie powinno znajdować się w obszarze zainteresowań zarówno astrofizyków jak i astronomów. Kolejnym etapem pracy mogłoby być napisanie odpowiedniej symulacji dla bardziej złożonych układów lub z wyższymi rzędami poprawek celem symulacji bardziej ekstremalnych zjawisk grawitacyjnych.

Udział autorów

Główny przegląd literatury: B. R.; opisy algorytmów numerycznych: K. G., P. G., K. R.; metodologia: B. R., K. G., P. G., K. R.; oprogramowanie, obliczenia numeryczne, analiza, weryfikacja, rysunki: K. G. (algorytm RK), P. G. (algorytm symplektyczny); tekst: B. R. (wstęp), K. G. (algorytm RK), P. G. (algorytm symplektyczny), K. R. (algorytm B-S).

Kody źródłowe

Stworzone przez nas oprogramowanie znajduje się w suplemencie do tego dokumentu na stronie:

<https://www.fuw.edu.pl/~ttark/www/raporty/publiczne/2025-07-01/>

Bibliografia

- [1] L. Blanchet. “Post-Newtonian Theory and the Two-Body Problem”. *Mass and Motion in General Relativity*. Red. L. Blanchet, A. Spallicci, B. Whiting. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011, 125–166. ISBN: 978-90-481-3015-3. doi: 10.1007/978-90-481-3015-3_5.
- [2] T. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer. “Conservative dynamics of two-body systems at the fourth post-Newtonian approximation of general relativity”. *Phys. Rev. D* 93 (8 2016), 084014. doi: 10.1103/PhysRevD.93.084014.
- [3] L. Blanchet. “Innermost circular orbit of binary black holes at the third post-Newtonian approximation”. *Phys. Rev. D* 65 (12 2002), 124009. doi: 10.1103/PhysRevD.65.124009.
- [4] D. Bini, T. Damour. “Gravitational scattering of two black holes at the fourth post-Newtonian approximation”. *Phys. Rev. D* 96 (6 2017), 064021. doi: 10.1103/PhysRevD.96.064021.

- [5] T. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer. “Dynamical invariants for general relativistic two-body systems at the third post-Newtonian approximation”. *Phys. Rev. D* 62 (4 2000), 044024. doi: 10.1103/PhysRevD.62.044024.
- [6] D. Bini, T. Damour. “Analytical determination of the two-body gravitational interaction potential at the fourth post-Newtonian approximation”. *Phys. Rev. D* 87 (12 2013), 121501. doi: 10.1103/PhysRevD.87.121501.
- [7] C. M. Will. “On the unreasonable effectiveness of the post-Newtonian approximation in gravitational physics”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108.15 (2011), 5938–5945. doi: 10.1073/pnas.1103127108.
- [8] L. Blanchet. “Second-post-Newtonian generation of gravitational radiation”. *Phys. Rev. D* 51 (6 1995), 2559–2583. doi: 10.1103/PhysRevD.51.2559.
- [9] L. Blanchet, B. R. Iyer, C. M. Will, A. G. Wiseman. “Gravitational waveforms from inspiralling compact binaries to second-post-Newtonian order”. *Classical and Quantum Gravity* 13.4 (1996), 575. doi: 10.1088/0264-9381/13/4/002.
- [10] L. Blanchet. “Post-Newtonian theory for gravitational waves”. *Living Reviews in Relativity* 27 (1 2024), 4. doi: 10.1007/s41114-024-00050-z.
- [11] R. A. Nelson. “Post-Newtonian approximation for an accelerated, rotating frame of reference”. *General Relativity and Gravitation* 22 (4 1990), 431–449. doi: 10.1007/BF00756150.
- [12] C. O. Lousto, H. Nakano. “Three-body equations of motion in successive post-Newtonian approximations”. *Classical and Quantum Gravity* 25.19 (2008), 195019. doi: 10.1088/0264-9381/25/19/195019.
- [13] M. J. Valtonen, S. Mikkola, H. Pietilä. “Burrau’s three-body problem in the post-Newtonian approximation”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 273.3 (1995), 751–754. doi: 10.1093/mnras/273.3.751.
- [14] S. Kopeikin, I. Vlasov. “Parametrized post-Newtonian theory of reference frames, multipolar expansions and equations of motion in the N -body problem”. *Physics Reports* 400.4 (2004), 209–318. doi: 10.1016/j.physrep.2004.08.004.
- [15] A. V. Voinov. “Motion and rotation of celestial bodies in the post-Newtonian approximation”. *Celestial mechanics* 42 (1 1987), 293–307. doi: 10.1007/BF01232964.
- [16] S. J. Aarseth. “Post-Newtonian N -body simulations”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 378.1 (2007), 285–292. doi: 10.1111/j.1365-2966.2007.11774.x.
- [17] T. Damour, D. Vokrouhlický. “Conservation laws for systems of extended bodies in the first post-Newtonian approximation”. *Phys. Rev. D* 52 (8 1995), 4455–4461. doi: 10.1103/PhysRevD.52.4455.
- [18] S. Chandrasekhar, F. P. Esposito. “The $2\frac{1}{2}$ -Post-Newtonian Equations of Hydrodynamics and Radiation Reaction in General Relativity”. *The Astrophysical Journal* 160 (1970), 153. doi: 10.1086/150414.
- [19] J. Hwang, H. Noh, D. Puetzfeld. “Cosmological non-linear hydrodynamics with post-Newtonian corrections”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2008.03 (2008), 010. doi: 10.1088/1475-7516/2008/03/010.
- [20] H. Noh, J. Hwang. “Cosmological post-Newtonian approximation compared with perturbation theory”. *The Astrophysical Journal* 757.2 (2012), 145. doi: 10.1088/0004-637X/757/2/145.
- [21] M. E. Pati, C. M. Will. “Post-Newtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. II. Two-body equations of motion to second post-Newtonian order, and radiation reaction to 3.5 post-Newtonian order”. *Phys. Rev. D* 65 (10 2002), 104008. doi: 10.1103/PhysRevD.65.104008.
- [22] K. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. 2nd Edition. John Wiley & Sons, Inc., 1991. ISBN: 978-0-471-62489-9.
- [23] *Mercury Fact Sheet*. NASA. URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>.
- [24] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, red. *Fundamental Astronomy*. Sixth Edition. Original Finnish edition published by Ursa, Helsinki, 1984. Springer Berlin, Heidelberg, 2016. ISBN: 978-3-662-53045-0. doi: 10.1007/978-3-662-53045-0.
- [25] G. Schäfer. “Post-Newtonian approximations and equations of motion of general relativity”. *Banach Center Publications* 41.2 (1997), 43–53. URL: <http://eudml.org/doc/252227>.
- [26] K. Grabowska. “Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa”. Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki, 2019. URL: https://www.fuw.edu.pl/~konieczn/geometria/geometry_lecture_2_0.pdf.
- [27] M. Tao. “Explicit symplectic approximation of nonseparable Hamiltonians: Algorithm and long time performance”. *Phys. Rev. E* 94 (4 2016), 043303. doi: 10.1103/PhysRevE.94.043303.
- [28] H. Yoshida. “Construction of higher order symplectic integrators”. *Physics Letters A* 150.5 (1990), 262–268. doi: 10.1016/0375-9601(90)90092-3.
- [29] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. 3rd Edition. Cambridge University Press, 2007. ISBN: 978-0-521-88068-8.
- [30] G. R. Dennis, J. J. Hope, M. T. Johnsson. “XMDS2: Fast, scalable simulation of coupled stochastic partial differential equations”. *Computer Physics Communications* 184.1 (2013), 201–208. doi: 10.1016/j.cpc.2012.08.016.
- [31] G. Dennis, J. Hope, M. Johnsson. *The XMDS2 documentation*. 2021. URL: <http://www.xmds.org/>.
- [32] L. F. Richardson, R. T. Glazebrook. “IX. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 210.459-470 (1911), 307–357. doi: 10.1098/rsta.1911.0009.
- [33] R. L. Burden, J. D. Faires. *Numerical Analysis*. 9th Edition. Brooks Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN: 978-0-538-73351-9.
- [34] R. L. Branham. “Orbit of Comet C/1845 D1 (de Vico) and the utility of Bulirsch–Stoer integration”. *Planetary and Space Science* 58.10 (2010), 1307–1313. doi: 10.1016/j.pss.2010.05.014.
- [35] T. Demidova. “Bulirsch–Stoer algorithm in the planar restricted three-body problem”. *Astronomy and Computing* 41 (2022), 100635. doi: 10.1016/j.ascom.2022.100635.