

Projekt ZPS: "Numeryczne równania ruchu z poprawkami relatywistycznymi" *

Jakub Szyndler

3 lipca 2025

1 Wstęp

Jednym z efektów przewidzianych przez Ogólną Teorię Względności jest ruch linii apsyd (Misner et al., 2018). Widoczny dla Merkurego stanowił zagadkę, którą próbowano wyjaśnić na wiele sposobów między innymi przez obecność innej planety zwanej Wulkanem. Jednak dopiero teoria Einsteina swoją modyfikacją zasad panujących od Newtona w fizyce, rozwiązała trwający przez wiele lat problem.

Z efektami relatywistycznymi dla ruchu dwóch ciał, wiąże się wytracanie energii, poprzez emisję fal grawitacyjnych (Schutz, 2009), która po raz pierwszy została zauważona dla układu podwójnego pulsara i gwiazdy neutronowej PSR B1913+16 w 1982 (Taylor and Weisberg, 1982).

Za pomocą oryginalnych równań Einsteina ciężko jest otrzymać "proste" równania ruchu, podobne do tych z Mechaniki Newtonowskiej. W tym celu korzysta się z tzw. Przybliżeń Post-Newtonowskich, które polegają na znalezieniu rozwiązań równań OTW, które stanowią poprawki do oryginalnych formuł Newtona. Dla układu dwóch sferycznie symetrycznych, nierotujących ciał możemy je opisać w następujący sposób (Pati and Will, 2002; Blanchet, 2014).

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = & -\frac{m}{r^2} \mathbf{n} + \frac{m}{r^2} [\mathbf{n}(A_{\text{PN}} + A_{2\text{PN}} + A_{3\text{PN}}) + \dot{r} \mathbf{v}(B_{\text{PN}} + B_{2\text{PN}} + B_{3\text{PN}})] \\ & + \frac{8}{5} \eta \frac{m^2}{r^3} [\dot{r} \mathbf{n}(A_{2.5\text{PN}} + A_{3.5\text{PN}}) - \mathbf{v}(B_{2.5\text{PN}} + B_{3.5\text{PN}})] \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, $r \equiv |\mathbf{x}|$, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{x}/r$, $m \equiv m_1 + m_2$, $\eta \equiv \frac{m_1 m_2}{m^2}$, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt}$

*Sprawozdanie było wykonywane w ramach przedmiotu „Zespołowe projekty studenckie 2” w grupie, której opiekunem był Dr Tomasz Tarkowski

$$A_{\text{PN}} = -(1 + 3\eta)v^2 + \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2 + 2(2 + \eta)\frac{m}{r} \quad (2)$$

$$B_{\text{PN}} = 2(2 - \eta) \quad (3)$$

$$A_{2\text{PN}} = -\eta(3 - 4\eta)v^4 + \frac{1}{2}\eta(13 - 4\eta)v^2\frac{m}{r} + \frac{3}{2}\eta(3 - 4\eta)v^2\dot{r}^2 + (2 + 25\eta + 2\eta^2)\dot{r}^2\frac{m}{r} - \frac{15}{8}\eta(1 - 3\eta)\dot{r}^4 - \frac{3}{4}(12 + 29\eta)\left(\frac{m}{r}\right)^2 \quad (4)$$

$$B_{2\text{PN}} = \frac{1}{2}\eta(15 + 4\eta)v^2 - \frac{3}{2}\eta(3 + 2\eta)\dot{r}^2 - \frac{1}{2}(4 + 41\eta + 8\eta^2)\frac{m}{r} \quad (5)$$

$$A_{2.5\text{PN}} = 3v^2 + \frac{17}{3}\frac{m}{r} \quad (6)$$

$$B_{2.5\text{PN}} = v^2 + 3\frac{m}{r} \quad (7)$$

$$A_{3.5\text{PN}} = -\frac{3}{28}(61 + 70\eta)v^4 - \frac{1}{42}(519 - 1267\eta)v^2\frac{m}{r} + \frac{15}{4}(19 + 2\eta)v^2\dot{r}^2 - \frac{1}{4}(147 + 188\eta)\dot{r}^2\frac{m}{r} - 70\dot{r}^4 - \frac{23}{14}(43 + 14\eta)\left(\frac{m}{r}\right)^2 \quad (8)$$

$$B_{3.5\text{PN}} = -\frac{1}{28}(313 + 42\eta)v^4 + \frac{1}{42}(205 + 777\eta)v^2\frac{m}{r} + \frac{3}{4}(113 + 2\eta)v^2\dot{r}^2 - \frac{1}{12}(205 + 424\eta)\dot{r}^2\frac{m}{r} - 75\dot{r}^4 - \frac{1}{42}(1325 + 546\eta)\left(\frac{m}{r}\right)^2 \quad (9)$$

Powyższe równania pozwalają nam opisanie ruchu dwóch ciał. Jak można zauważyć nie da się ich rozwiązać analitycznie w prosty sposób.

2 Kod i metoda rozwiązywania równań

Aby rozwiązać powyższe równania stosujemy używaną przy przybliżeniu wykresów częstotliwości fal grawitacyjnych metodę Bulirsch'a-Stoer'a (BS) (Bokholt et al., 2021). Aby ją zaimplementować w kodzie napisanym języku Python korzystamy z informacji zawartych w (Kiusalaas, 2013). Do przyspieszenia kodu skorzystano z pakietu Numba (Lam et al., 2015).

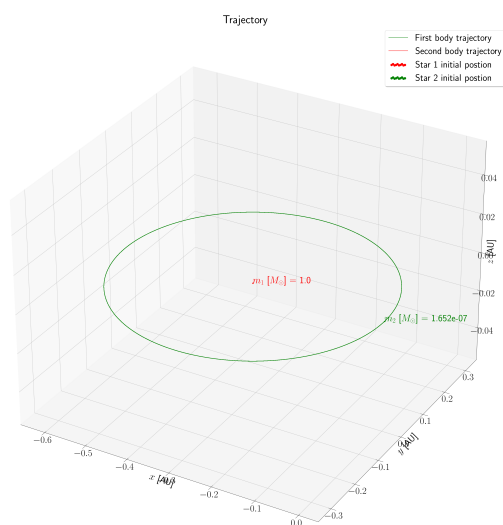
Program składa się z trzech kodów :ZPS.py, bulStoer.py, midpoint.py, input.py. Pierwszy z nich zawiera główną część kodu, dwa kolejne obejmują metodę całkowania równania 1, a ostatni zawiera dane początkowe.

W kodzie zakładamy że sferycznie symetryczne ciała nie rotują i poruszają się po orbitach kołowych wokół środka masy. W ten sposób ułatwiamy znacząco obliczenia i ustalenia warunków początkowych.

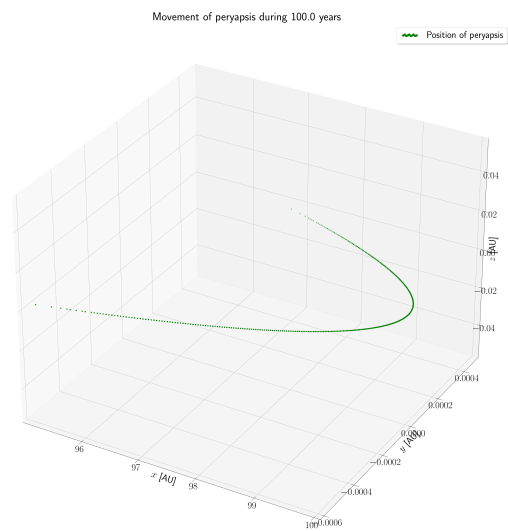
3 Przykładowe Wyniki

W ramach przykładowych wyników rozpatrzono dwa przypadki . Pierwszy z nich obejmował układ dwóch obiektów, pierwszego o masie Słońca a drugiego o masie Merkurego. Drugi natomiast dotyczył dwóch gwiazd neutronowych o masach 1.4 mas Słońca.

3.1 Słońce - Merkury

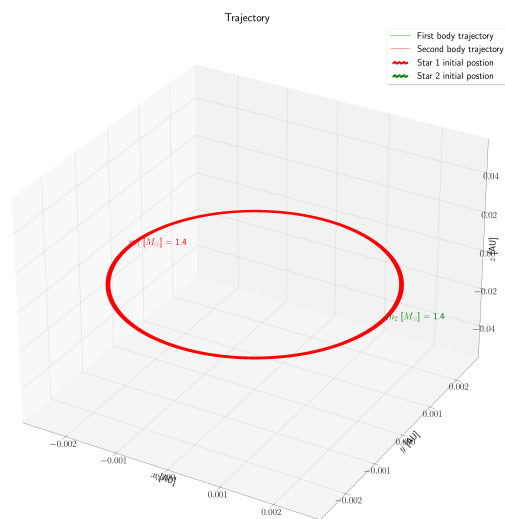


Rysunek 1: Trajektoria ciał w pierwszym przypadku

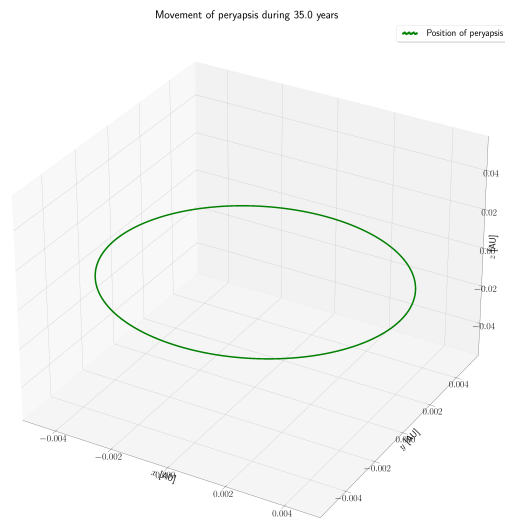


Rysunek 2: Ruch linii apsyd w pierwszym przypadku

3.2 Pulsar Hulse'a - Taylora (Taylor and Weisberg, 1982)



Rysunek 3: Trajektoria ciał w drugim przypadku



Rysunek 4: Ruch linii apsyd w drugim przypadku

4 Dyskusja wyników

Jak możemy zauważyć z rysunków 2 i 4 zachodzi ruch linii apsyd, co zgadza się z przewidywaniami Ogólnej Teorii Względności.

Kod może zostać w przyszłości zmodyfikowany poprzez dodanie efektów związanych z ekscentrycznością orbity.

Bibliografia

- Luc Blanchet. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. *Living Reviews in Relativity*, 17(1):2, December 2014. doi: 10.12942/lrr-2014-2.
- Tjarda C. N. Boekholt, Arend Moerman, and Simon F. Portegies Zwart. Relativistic Pythagorean three-body problem. , 104(8):083020, October 2021. doi: 10.1103/PhysRevD.104.083020.
- Jaan Kiusalaas. *Numerical Methods in Engineering with Python 3*. Cambridge University Press, 3 edition, 2013.

Siu Kwan Lam, Antoine Pitrou, and Stanley Seibert. Numba: A llvm-based python jit compiler. In Proceedings of the Second Workshop on the LLVM Compiler Infrastructure in HPC, pages 1–6, 2015.

Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, and David I. Kaiser. Gravitation. 2018.

Michael E. Pati and Clifford M. Will. Post-Newtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. II. Two-body equations of motion to second post-Newtonian order, and radiation reaction to 3.5 post-Newtonian order. , 65(10):104008, May 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.65.104008.

Bernard Schutz. A First Course in General Relativity. 2009.

J. H. Taylor and J. M. Weisberg. A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16. , 253:908–920, February 1982. doi: 10.1086/159690.

Na ten utwór udzielona jest licencja Creative Commons “Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe-Na tych samych warunkach 4.0 Międzynarodowe (CC BY-SA 4.0)”.

