
Pulsar Hulse’a-Taylora

Studium ewolucji pólasi wielkiej i okresu orbitalnego w reżimie postnewtonowskim

Jakub Artyszuk, Karol Gajek, Jakub Górnikowski, Dorota Jeż, Kacper Lisiak

Streszczenie. W pracy przeanalizowano wpływ emisji fal grawitacyjnych na ewolucję parametrów orbitalnych układu podwójnego pulsara PSR B1913+16. Przedstawiono w niej wyprowadzenie postaci potencjału radiacyjnego, jak również opis implementacji algorytmów Rungego-Kutty i Dormanda-Prince’a. Zarówno podejście numeryczne, jak i to korzystające ze wzoru kwadrupolowego pozwoliły uzyskać wyniki, które wykazują bardzo wysoką zgodność ilościową ze sobą oraz z danymi dostępnymi w literaturze.

Słowa kluczowe: algorytm Dormanda-Prince’a, algorytm Rungego-Kutty, poprawka postnewtonowska, potencjał radiacyjny Burke’ego-Thorne’a, relatywistyczne obliczenia numeryczne

Copyright (c) 2026 Jakub Artyszuk, Karol Gajek, Jakub Górnikowski, Dorota Jeż, Kacper Lisiak. Udostępniono na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa – Na tych samych warunkach 4.0 Międzynarodowa. Pełna treść licencji dostępna jest pod adresem <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

10 LIPCA 2026

Wstęp

Fale grawitacyjne są przemieszczającymi się z prędkością światła zaburzeniami krzywizny czasoprzestrzeni [1]. Ich źródłem są masywne obiekty poruszające się z przyspieszeniem [2], takie jak na przykład układy podwójne czarnych dziur [3], gwiazd neutronowych [4], podlegające precesji pulsary [5], jak również zapadające się jadra masywnych gwiazd [6]. Istnienie tego fenomenu zostało przewidziane przez ogólną teorię względności (OTW) już na początku XX wieku [2], a pierwsze pośrednie dowody obserwacyjne na ich istnienie zostały dostarczone w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych przez Russella A. Hulse’a i Josepha H. Taylora, za co zostali uhonorowani Nagrodą Nobla [7]. Badali oni układ podwójny PSR B1913+16, składający się z dwóch gwiazd neutronowych, z których jedna jest pulsarem, orbitujących wokół wspólnego środka masy po ciasnej orbicie o dużym mimośrodku [8]. Dzięki pomiarom interwałów między czasami dotarcia na Ziemię impulsów radiowych wysyłanych przez pulsar, możliwe było wyznaczenie między innymi okresu orbitalnego P_b (ang. *binary period*) układu, mimośrodu orbity e , ruchu periastronu $\dot{\omega}$ oraz parametru γ , określającego wpływ grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni oraz dylatacji czasu [9]. W konsekwencji możliwe było wyznaczenie mas obu ciał w układzie PSR B1913+16. Obserwacje prowadzone były na przestrzeni ponad sześciu lat, co pozwoliło na zbadanie, jak zmienia się w czasie okres orbitalny [10]. Energia układu takiego jak PSR B1913+16 powinna w sposób mierzalny z czasem maleć na skutek promieniowania grawitacyjnego. Z tym faktem jest związane kurczenie się orbity (opisywane dalej poprzez zmniejszanie się pólasi wielkiej) oraz zanik okresu orbitalnego. Druga z tych wartości, otrzymana w wyniku obserwacji Hulse’a i Taylora, wykazała wysoką zgodność z wartością przewidywaną przez OTW. To z kolei pozwoliło na uzyskanie pośredniego potwierdzenia istnienia fal grawitacyjnych. Obserwacje Hulse’a i Taylora stanowiły kolejny dowód słuszności OTW.

Jednym z celów tej pracy jest rozwiązanie równań ruchu układu PSR B1913+16 w przybliżeniu postnewtonowskim (PN) wprowadzającym poprawki rzędu 2,5 (oznaczanym dalej jako

2.5PN). W ogólnie przyjętej konwencji, rząd poprawki k odpowiada uwzględnianiu wyrazów zawierających ϵ w k -tej potęgze, gdzie $\epsilon \sim (v/c)^2$ [11]. 2.5PN uwzględnia więc wyrazy do rzędu $\epsilon^{5/2}$ włącznie. Wybraliśmy 2.5PN, ponieważ jest to najniższy rząd, w którym pojawia się wynikający z emisji promieniowania grawitacyjnego człon niezachowawczy [12]. Chociaż formalnie zastosowanie PN ogranicza się do układów o małych prędkościach i słabego pola grawitacyjnego, okazują się one również wyjątkowo skuteczne w opisie niektórych układów niepełniających tych założeń, takich jak rozpatrywany przez nas PSR B1913+16 [13].

Promieniowanie grawitacyjne w rzędzie 2.5PN można wyjaśnić za pomocą nielokalnego grawitacyjnego potencjału radiacyjnego Burke’ego-Thorne’a (BT) V_{BT} , będącego dodatkiem do standardowego newtonowskiego potencjału grawitacyjnego. W celu oswojenia się z teorią poprawek postnewtonowskich wynikających z OTW, przedstawiono w dodatku teoretycznym wyprowadzenie postaci potencjału BT oparte na wzorze opisujące moc wypromieniowywaną grawitacyjną przez układ mas, tzw. wzorze kwadrupolowym będącym konsekwencją OTW, oraz na zasadzie zachowania energii wiążącej wzór kwadrupolowy z mocą traconą przez ciała na skutek potencjału radiacyjnego. Otrzymana ostatecznie postać V_{BT} , choć jak najbardziej poprawna, nie jest najużyteczniejsza do oszacowania zaniku orbity oraz okresu orbitalnego układu binarnego, takiego jak w przypadku PSR 1913+16, gdyż zawiera ona piątą pochodną czasową bezśladowego momentu kwadrupolowego układu (szczegółowy w dodatku teoretycznym). Pięciokrotne różniczkowanie tej wielkości jest problematyczne. Można jednak wybrać inną strategię wykonywania rachunków. Korzystając bezpośrednio ze wzoru kwadrupolowego oblicza się moc wypromieniowywaną przez układ binarny, którą następnie jest zrównywana z tempem zmiany energii ruchu względnego (orbitalnego) układu. Można zauważyć, że ruch orbitalny układu binarnego PSR B1913+16 charakteryzuje się na tyle małymi prędkościami w skali relatywistycznej oraz na tyle dużą separacją składników, że energia wypromieniowana w ciągu jednego okresu orbitalnego jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z całkowitą energią orbitalną układu. Można zatem

zastosować przybliżenie adiabatyczne, tzn. uznać, że w każdej chwili słuszny jest wzór newtonowski na energię orbitalną PSR 1913+16:

$$E(t) = -G \frac{m_1 m_2}{2a(t)} \quad (1)$$

gdzie m_1 i m_2 to masy gwiazd tworzących układ binarny, natomiast $a(t)$ to bardzo wolno zmieniająca się półos wielka orbity. Bazując na powyższej obserwacji oraz danych astronomicznych dla PSR 1913+16, otrzymujemy, że w ciągu jednego roku półos wielka orbity tego systemu zmniejsza się o 3,379 m, a okres orbitalny zmniejsza się 77,4 μ s. Otrzymane wyniki wykazują bardzo wysoką zgodność ilościową z ogólnie przyjętymi danymi obserwacyjnymi dla PSR 1913+16.

1 Modelowanie numeryczne

Postnewtonowska korekta do przyspieszenia względnego, $\vec{a} \equiv \vec{a}_1 - \vec{a}_2$, uwzględniając rzędy nieparzyste w potęgach c^2 do siódmego włącznie, dana jest przez [14]:

$$\vec{a} = -\frac{8}{5}\eta \frac{m}{r^2} \frac{m}{r} \left[-\left(A_{5/2} + A_{7/2}\right) \dot{r} \hat{n} + \left(B_{5/2} + A_{B/2}\right) \vec{v} \right] \quad (2)$$

gdzie $\eta = \mu/m$, $m \equiv m_1 + m_2$, $\mu \equiv m_1 m_2 / m$ jest masą zredukowaną, podczas gdy $\hat{n} = \vec{x}/r$, $\vec{x}$ to wektor separacji pomiędzy dwoma ciałami, r to długość tegoż wektora, $r \equiv |\vec{x}|$, natomiast $\vec{v}$ jest prędkością orbitalną. Zaniedbując rząd 7/2 oraz dodając wkład newtonowski, zmiana względnego położenia $\vec{x}$ wyraża się przez ($G = c = 1$):

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a}_{\text{Newton}} + \vec{a}_{\text{PN}} = -\frac{m\vec{x}}{r^2} - \frac{8}{5}\eta \frac{m}{r^2} \frac{m}{r} \left[-A_{5/2} \dot{r} \hat{n} + B_{5/2} \vec{v} \right] \quad (3)$$

gdzie użyte powyżej współczynniki przyjmują wartość:

$$A_{5/2} = 3(1 + \beta)v^2 + \frac{1}{3}(23 + 6\alpha - 9\beta)m/r - 5\beta\dot{r}^2 \quad (4)$$

$$B_{5/2} = (2 + \alpha)v^2 + (2 - \alpha)m/r - 3(1 + \alpha)\dot{r}^2 \quad (5)$$

W formalizmie BT:

$$A_{5/2} = 18v^2 + \frac{2}{3}m/r - 25\dot{r}^2, \quad (6)$$

$$B_{5/2} = 6v^2 - 2m/r - 15\dot{r}^2, \quad (7)$$

Ujednolicając notację:

$$\vec{a} = -\frac{m\vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{8}{5}\eta \frac{m^2}{|\vec{x}|^3} \left[-A_{5/2} \frac{d|\vec{x}|}{dt} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} + B_{5/2} \dot{\vec{x}} \right] \quad (8)$$

Korzystając z tożsamości $d|\vec{x}|/dt = \vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}/|\vec{x}|$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} &= -\frac{m\vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{8}{5}\eta \frac{m^2}{|\vec{x}|^3} \left[-A_{5/2} \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} + B_{5/2} \dot{\vec{x}} \right] \\ &= -\frac{m\vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{8}{5}\eta \frac{m^2}{|\vec{x}|^3} \left\{ -\left[18|\dot{\vec{x}}|^2 + \frac{2}{3} \frac{m}{|\vec{x}|} - 25 \left(\frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{|\vec{x}|} \right)^2 \right] \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \right. \\ &\quad \left. + \left[6|\dot{\vec{x}}|^2 - 2 \frac{m}{|\vec{x}|} - 15 \left(\frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{|\vec{x}|} \right)^2 \right] \dot{\vec{x}} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

Aby uczynić równanie rozwiązywalnym przy użyciu standardowych metod numerycznych, niezbędne jest przekształcenie

go do równania różniczkowego pierwszego rzędu. Definiując $\vec{y} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$ otrzymujemy układ:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{y} \\ \dot{\vec{y}} &= -\frac{m\vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{8}{5}\eta \frac{m^2}{|\vec{x}|^3} \left\{ -\left[18|\vec{y}|^2 + \frac{2}{3} \frac{m}{|\vec{x}|} - 25 \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} \right)^2 \right] \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \right. \\ &\quad \left. + \left[6|\vec{y}|^2 - 2 \frac{m}{|\vec{x}|} - 15 \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} \right)^2 \right] \vec{y} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

Znów, wprowadzając oznaczenie:

$$\vec{z} \equiv \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

zwektoryzowane równanie zapisać możemy jako:

$$\dot{\vec{z}} = F(\vec{z}) \quad (12)$$

gdzie F odpowiada prawej stronie równania (9). W jednostkach SI równanie (9) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{y} \\ \dot{\vec{y}} &= -\frac{Gm\vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{8}{5}\eta \frac{G^2 m^2}{c^5 |\vec{x}|^3} \left\{ -\left[18|\vec{y}|^2 + \frac{2}{3} \frac{Gm}{|\vec{x}|} - 25 \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} \right)^2 \right] \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \right. \\ &\quad \left. + \left[6|\vec{y}|^2 - 2 \frac{Gm}{|\vec{x}|} - 15 \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} \right)^2 \right] \vec{y} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

Ta wersja wykorzystana zostanie podczas symulacji.

2 Całkowanie numeryczne

Do znalezienia ewolucji czasowej zagadnienia wykorzystano algorytm Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4). Położmy $t = 0$ w chwili, gdy $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ (periastron). Niech oś periastronu podąża za półosią $+Ox$, a ruch odbywa się w płaszczyźnie Oxy . Symulację ewolucji orbity układu binarnego PSR B1913+16 przeprowadzono dla mas komponentów $m_1 = 1,441M_\odot$ i $m_2 = 1,387M_\odot$ oraz dla odległości periastronu $r_{\text{per}} = 746600$ km. Prędkość początkowa jest z założenia zgodna z orientacją półosi $+Oy$ i jest równa $v_{\text{per}} = 9,016 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$.

Podczas symulacji monitorujemy zmianę iloczynu skalarnego $\vec{x} \cdot \vec{y}$. Warunkiem początkowym jest prostopadłość wektorów $\vec{x}$ oraz $\vec{y}$, co czyni ich iloczyn skalarny wygodnym parametrem kontrolnym. Do obliczenia okresu orbitalnego wykorzystany zostanie czas, który upłynął do powrotu do wartości zero tego parametru.

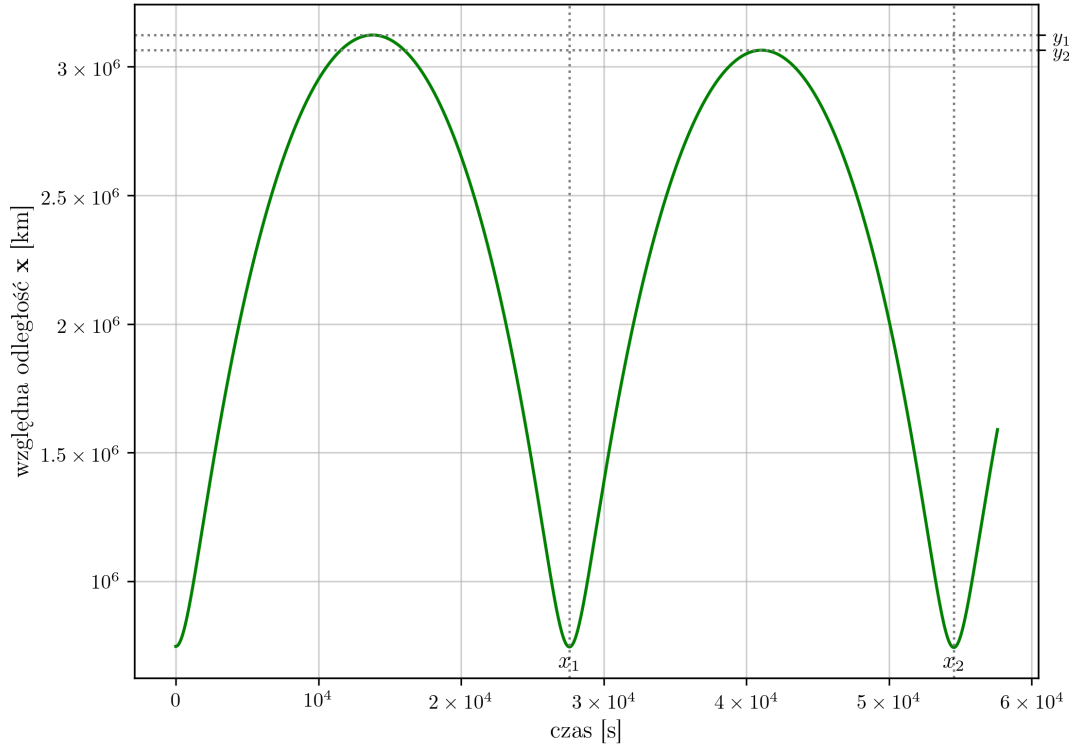
Poszukiwane zacieśnianie się orbity wyraża się przez liczbę małą względem wielkości astronomicznych występujących w rozważanym problemie — to człon newtonowski pełni w równaniu dominującą rolę. Dla skuteczności numerycznej zwiększono siłę efektów prowadzących do zacieśniania się orbity, tj. wprowadzono multiplikatywny czynnik K mnożący człon postnewtonowski:

$$\dot{\vec{y}} = \vec{a}_{\text{Newton}} + K\vec{a}_{\text{PN}} \quad (14)$$

Aby wybrać jego rząd wielkości, obliczamy wybrane współczynniki równania:

$$Gm \approx 3,753 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \text{ kg s}^{-2} \quad (15)$$

$$\eta \frac{G^2 m^2}{c^5} \approx 1,453 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ s}^1 \quad (16)$$



Rysunek 1: Wyniki symulacji numerycznej dla układu podwójnego pulsara PSR B1913+16: odległość między składnikami układu w funkcji czasu w przedziale $t \in (0, 2/3)$ doby. Wpływ poprawek postnewtonowskich został uwypuklony przez wprowadzenie czynnika skalującego.

Wynik symulacji zostanie na koniec z powrotem przeskalowany o czynnik K .

poprawności teorii opisującej emisję fal grawitacyjnych i motywuje do przetestowania działania innych algorytmów.

3 Wyniki symulacji

Na rysunku 1 przedstawiono numerycznie zasymulowany przebieg zmienności funkcji $|\vec{x}(t)|$. Analizując odległość i czas periastronu (por. oznaczenia x_1 i x_2 na rysunku 1) wyznaczono tempo zacieśniania się orbity (półosi wielkiej) oraz skracania się okresu orbitalnego $\dot{P}_b$:

$$\dot{a} \approx -3,397 \frac{\text{m}}{\text{rok}}, \quad \dot{P}_b \approx -75,5 \frac{\mu\text{s}}{\text{rok}} \quad (17)$$

Wynik zgadza się z tym uzyskanym na gruncie teoretycznym.

Podsumowanie

Podejście numeryczne opierające się na algorytmie Rungego-Kutty dało wyniki pokrywające się z tymi uzyskanymi wprost z relatywistycznego bilansu energii (zob. dodatek A) oraz z obserwacji astronomicznych. Stanowi to mocną przesłankę na rzecz

Udział autorów

Główny przegląd literatury: D.J.; metodyka: J.A., J.G., K.G.; szczegółowe rachunki teoretyczne: J.A.; oprogramowanie i obliczenia numeryczne: J.G. (algorytm Rungego-Kutty, program komputerowy napisany w języku C++), K.L. (algorytm Dormanda-Prince'a, program komputerowy napisany w języku Python); analiza, weryfikacja, rysunek: J.G.; tekst: D.J. (streszczenie, wstęp, podsumowanie), J.A. (wstęp, dodatek A), J.G. (sekcje 1, 2 oraz 3), K.G. (dodatek B).

Kody źródłowe

Pliki programów do symulacji numerycznych napisane w językach C++ (algorytm Rungego-Kutty) oraz Python (algorytm Dormanda-Prince'a) zarchiwizowano pod adresami:

<https://github.com/jgornikowski-beemovie4/postnewtonian-decay>
<https://www.fuw.edu.pl/~ttark/www/raporty/publiczne/2026-07-10/suplement/>

A Wyprowadzenie postaci potencjału radiacyjnego Burke'ego-Thorne'a

Poniższe wyprowadzenie zostało oparte na materiale dydaktycznym opublikowanym przez prof. Andreia Starinetsa z Uniwersytetu Oksfordzkiego [15].

Naszym punktem wyjścia będzie wzór opisujący całkowitą moc P traconą przez materię opisywaną gęstością masy $\rho(\vec{x})$ na skutek emisji promieniowania grawitacyjnego. Mianowicie:

$$P = -\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \left(\frac{d^3 I_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 I^{ij}}{dt^3} \right) \quad (18)$$

gdzie przyjmujemy konwencję sumacyjną Einsteina, np. $A^i A_i = (A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2$ przy czym $A_i = A^i$. I_{ij} to bezśladowy moment kwadrupolowy układu:

$$I_{ij} := \int d^3x \rho(\vec{x}) \left[x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^k x_k \right] \quad (19)$$

Bezśladowość oznacza w tym przypadku, iż $I_{ij} \delta_{ij} = 0$. Oczekujemy, że moc traconą w wyniku emisji fal grawitacyjnych przez system mas można wyjaśnić lokalnie za pomocą radiacyjnego potencjału grawitacyjnego V , tzn.:

$$P = \int d^3x \rho(\vec{x}) \left(-\vec{\nabla} V \right) \cdot \vec{v} \quad (20)$$

gdzie $\vec{v}$ to prędkość małego kawałka materii znajdującego się w punkcie $\vec{x}$.

Ograniczmy nasze rozważania do układów materialnych zachowujących się w sposób (kwazi-)periodyczny. Okres oscylacji systemu oznaczmy jako T . Dzięki równaniu (18) możemy obliczyć zmianę energii ΔE układu w ciągu całego okresu T :

$$\Delta E = -\frac{G}{5c^5} \int_0^T dt \left(\frac{d^3 I_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 I^{ij}}{dt^3} \right) = -\frac{G}{5c^5} \int_0^T dt \left[\frac{d}{dt} \left(\ddot{I}_{ij} I_{ij}^{(3)} \right) - \ddot{I}_{ij} I_{ij}^{(4)} \right]$$

Wyraz $\int_0^T dt \partial_t \left(\ddot{I}_{ij} I_{ij}^{(3)} \right) = \ddot{I}_{ij} I_{ij}^{(3)}(T) - \ddot{I}_{ij} I_{ij}^{(3)}(0) = 0$ na mocy przybliżenia kwaziperiodycznego. Stosując po raz drugi tę samą procedurę otrzymamy ostatecznie:

$$\Delta E = \frac{G}{5c^5} \int_0^T dt \ddot{I}_{ij} I_{ij}^{(4)} = -\frac{G}{5c^5} \int_0^T dt \dot{I}_{ij} I_{ij}^{(5)} \quad (21)$$

Przekształćmy wyrażenie na ΔE za pomocą równania (20):

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_0^T P dt \\ &= - \int_0^T dt \int d^3x \rho(\vec{x}) \left(\vec{\nabla} V \right) \cdot \vec{v} \\ &= - \int_0^T dt \int d^3x \left[\vec{\nabla} \cdot (\rho V \vec{v}) - V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] \\ &= \int_0^T dt \int d^3x V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \end{aligned} \quad (22)$$

W ostatnim przejściu wykorzystaliśmy fakt, że po scałkowaniu po całej przestrzeni dywergencji pola $\rho V \vec{v}$ otrzymujemy wyraz zależny wyłącznie od wartości tego pola w przestrzennej nieskończoności. Przyjmując fizycznie uzasadnione założenie o ograniczonym rozmiarze materii emitującej promieniowanie, wyraz brzegowy staje się równy 0.

Mając na uwadze równanie ciągłości materii $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$, możemy napisać:

$$\Delta E = - \int_0^T dt \int d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} V \quad (23)$$

Postulujemy następującą formę potencjału $V(t, \vec{x}) = F^{ij}(\vec{x}) G^{ij}(t)$:

$$\Delta E = - \int_0^T dt \left[G_{ij}(t) \left(\frac{d}{dt} \int d^3x \rho F_{ij}(\vec{x}) \right) \right] \quad (24)$$

Przepiszmy równanie (21) w innej postaci:

$$\Delta E = - \int_0^T dt \left[\frac{G}{5c^5} I_{ij}^{(5)}(t) \left(\frac{d}{dt} \int d^3x \rho \left[x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^k x_k \right] \right) \right] \quad (25)$$

Porównując równania (24) oraz (25) widzimy, że będą ze sobą zgodne jeśli:

$$G_{ij} = \frac{G}{5c^5} I_{ij}^{(5)}, \quad F_{ij} = x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^k x_k. \quad (26)$$

Otrzymujemy zatem postać potencjału radiacyjnego BT:

$$V_{BT} = \frac{G}{5c^5} I_{ij}^{(5)} \left[x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^k x_k \right] = \frac{G}{5c^5} I_{ij}^{(5)} x_i x_j \quad (27)$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z bezśladowości I_{ij} .

Na koniec wyrażmy wkład do przyspieszenia cząstki spowodowany promieniowaniem grawitacyjnym:

$$a_{BT}^k = -\partial_k V_{BT} = -\frac{G}{5c^5} I_{ij}^{(5)} \partial_k (x_i x_j) = -\frac{G}{5c^5} I_{ij}^{(5)} (\delta_k^i x_j + x_i \delta_k^j) = -\frac{2G}{5c^5} x_i I_{ik}^{(5)}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że I_{ij} jest tensorem symetrycznym.

Policzenie piątej pochodnej po czasie momentu kwadrupolowego nawet dla układu dwóch mas punktowych oddziałujących grawitacyjnie jest trudnym zadaniem. Spróbujemy zatem innej metody oszacowania wpływu promieniowania grawitacyjnego na orbitę obu ciał. Mianowicie, zatrzymamy się na trzeciej pochodnej po czasie I_{ij} , co pozwoli nam skorzystać ze wzoru kwadrupolowego oraz oszacować zanik pól wielkiej orbity oraz okresu orbitalnego w przeciągu roku dla pulsara Hulse'a-Taylora.

Rozpatrzmy system dwóch mas oddziałujących grawitacyjnie w układzie jego środka masy. W ślad za Peterem i Matthewsem [16] narzucamy prawoskrętny kartezjański układ współrzędnych. W tym układzie położenie masy oznaczonej liczbą 1 to $\vec{R}_1 = (d_1 \cos \psi, d_1 \sin \psi, 0)$. W przypadku masy nr 2 analogicznie $\vec{R}_2 = (-d_2 \cos \psi, -d_2 \sin \psi, 0)$, gdzie $d_1, d_2 > 0$. Położenie środka masy układu to $(0, 0, 0)$, stąd $m_1 d_1 = m_2 d_2$. Definiując $d := d_1 + d_2$, stwierdzimy, że $d_1 = (m_2/M)d$ oraz $d_2 = (m_1/M)d$, gdzie $M := m_1 + m_2$ to całkowita masa układu.

Policzymy najpierw składowe tensora $\tilde{I}^{ij} := \int d^3x \rho(\vec{x}) x_i x_j$ oraz jego pochodne czasowe, po czym odejmiemy ślad $\tilde{I} := \tilde{I}^{ij} \delta_{ij}$ by otrzymać wyrażenie na składowe $I_{ij} = \tilde{I}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{I}$ oraz jego pochodnych czasowych. W rozważanym przez nas układzie dwóch mas punktowych $\rho(\vec{x}) = m_1 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{R}_1) + m_2 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{R}_2)$, stąd $\tilde{I}_{ij} = m_1 x_i^1 x_j^1 + m_2 x_i^2 x_j^2$.

Mamy:

$$\tilde{I}_{xx} = m_1 (d_1)^2 \cos^2 \psi + m_2 (d_2)^2 \cos^2 \psi = \mu d^2 \cos^2 \psi \quad (28)$$

gdzie $\mu := (m_1 m_2)/M$ to zredukowana masa układu. W analogiczny sposób wnioskujemy, iż:

$$\tilde{I}_{yy} = \mu d^2 \sin^2 \psi, \quad \tilde{I}_{xy} = \tilde{I}_{yx} = \mu d^2 \sin \psi \cos \psi, \quad \tilde{I}_{iz} = 0 \quad (29)$$

gdzie i w ostatnim wzorze oznacza dowolną współrzędną przestrzenną. Rozpatrzmy wektor względnego położenia obu mas $\vec{d} := \vec{R}_1 - \vec{R}_2 = d(\cos \psi, \sin \psi, 0)$.

Dzięki mechanice klasycznej wiemy, że wektor $\vec{d}$ spełnia takie samo równanie różniczkowe jak wektor położenia cząstki o masie μ w polu grawitacyjnym nieruchomego obiektu o masie M :

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{d} = -\frac{GM}{d^3} \vec{d} \quad (30)$$

Znamy zatem zależność względnej odległości obu ciał $d = |\vec{d}|$ od kąta ψ :

$$d(\psi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\psi - \psi_0)} \quad (31)$$

gdzie a to pół wielka orbity, e – mimośród orbity, ψ_0 – stała ustalająca orientację orbity w danym układzie współrzędnych. Przyjmujemy następującą konwencję: dla $\psi = 0$ osiągamy periastron — d osiąga minimum. Stąd, $\psi_0 = 0$.

Na podstawie mechaniki klasycznej można wyprowadzić wzór wyrażający szybkość zmiany kąta ψ jako funkcję d :

$$\dot{\psi} = \frac{[GMa(1 - e^2)]^{1/2}}{d^2} \quad (32)$$

Podstawiając równanie (31) do (32) otrzymujemy:

$$\dot{\psi} = S(1 + e \cos \psi)^2, \quad S := (GM)^{1/2} [a(1 - e^2)]^{-3/2} \quad (33)$$

Mając te równania, otrzymujemy postać składowej $\tilde{I}_{xx}$ oraz jej pochodnych czasowych:

$$\tilde{I}_{xx} = \mu d^2 \cos^2 \psi = \mu \left(\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi} \right)^2 \cos^2 \psi = Q \cos^2 \psi (1 + e \cos \psi)^{-2} \quad (34)$$

gdzie $Q := \mu a^2 (1 - e^2)^2$. Następnie:

$$\ddot{\tilde{I}}_{xx} = -\frac{QS \sin(2\psi)}{1 + e \cos \psi} \ddot{\tilde{I}}_{xx} = -QS^2 [2 \cos(2\psi) + 2e \cos(\psi) \cos(2\psi) + e \sin(\psi) \sin(2\psi)] \tilde{I}_{xx}^{(3)} = \beta (1 + e \cos \psi)^2 (2 \sin 2\psi + 3e \sin \psi \cos^2 \psi) \quad (35)$$

gdzie $\beta := 2QS^3$. Okazuje się, że:

$$\beta^2 = \frac{4G^3 m_1^2 m_2^2 M}{a^5 (1 - e^2)^5} \quad (36)$$

Podobnie dla składowych yy oraz xy tensora $\tilde{I}$:

$$\dot{\tilde{I}}_{yy} = QS [\sin(2\psi) + 2e \sin^3(\psi)(1 + e \cos \psi)^{-1}] \quad (37)$$

$$\ddot{\tilde{I}}_{yy} = QS^2 [2 \cos(2\psi)(1 + e \cos \psi)^2 + 6e \sin^2(\psi) \cos(\psi)(1 + e \cos(\psi)) + 2e^2 \sin^4 \psi] \quad (38)$$

$$\tilde{I}_{yy}^{(3)} = -\beta(1 + e \cos \psi)^2 [2 \sin(2\psi) + e \sin \psi(1 + 3 \cos^2 \psi)] \quad (39)$$

$$\dot{\tilde{I}}_{xy} = QS (1 + e \cos \psi)^{-1} (\cos(2\psi) + e \cos \psi) \quad (40)$$

$$\ddot{\tilde{I}}_{xy} = -2QS^2 (\sin(2\psi) + e \sin \psi + e \sin \psi \cos^2 \psi) \quad (41)$$

$$\tilde{I}_{xy}^{(3)} = -\beta (1 + e \cos \psi)^2 [2 \cos(2\psi) - e \cos \psi(1 - 3 \cos^2 \psi)] \quad (42)$$

Dodatkowo:

$$\frac{d^3}{dt^3} \tilde{I} = -e\beta (1 + e \cos \psi)^2 \sin \psi \quad (43)$$

By móc skorzystać ze wzoru kwadrupolowego, musimy policzyć:

$$\frac{d^3 I_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 I^{ij}}{dt^3} = \left(\frac{d^3 \tilde{I}_{ij}}{dt^3} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tilde{I} \right) \left(\frac{d^3 \tilde{I}^{ij}}{dt^3} - \frac{\delta^{ij}}{3} \tilde{I} \right) \quad (44)$$

Po rozpisaniu powyższego iloczynu otrzymujemy, że:

$$\frac{d^3 I_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 I^{ij}}{dt^3} = \frac{d^3 \tilde{I}_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 \tilde{I}^{ij}}{dt^3} - \frac{1}{3} \tilde{I}^{(3)} = \frac{2\beta^2}{3} (1 + e \cos \psi)^4 [12(1 + e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi] \quad (45)$$

Korzystając ze wzoru (18) otrzymujemy całkowitą wypromieniowywaną moc chwilową:

$$P = -K(1 + e \cos \psi)^4 [12(1 + e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi] \quad (46)$$

Wprowadziliśmy oznaczenie:

$$K := \frac{8G^4}{15c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^5} \quad (47)$$

Tę moc chwilową uśrednimy po okresie orbitalnym T . III prawo Keplera mówi, że:

$$T = 2\pi a^{3/2} (GM)^{-1/2} \quad (48)$$

Uśredniona moc po jednym okresie:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &:= \frac{1}{T} \int_0^T P dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} P \frac{d\psi}{\dot{\psi}} \\ &= \frac{K}{TS} \int_0^{2\pi} [12(1 + e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi] (1 + e \cos \psi)^2 d\psi \end{aligned} \quad (49)$$

Całka:

$$\int_0^{2\pi} [12(1 + e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi] (1 + e \cos \psi)^2 d\psi = \frac{\pi}{4} (37e^4 + 292e^2 + 96) \quad (50)$$

Korzystając z definicji K , T oraz S otrzymujemy ostatecznie:

$$\langle P \rangle = -\frac{32G}{5c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e + \frac{37}{96}e^2 \right) \quad (51)$$

Potwierdziliśmy zatem rachunek Petersa i Matthews [16].

Oszacujmy teraz wpływ promieniowania na półoś orbity a oraz okresu T . Energia względnego ruchu układu binarnego to:

$$E = -\frac{GM\mu}{2a} \quad (52)$$

Zasada zachowania energii mówi, że:

$$\frac{dE}{dt} = \langle P \rangle \quad (53)$$

Na mocy dwóch powyższych stwierdzeń oraz równania (48) otrzymujemy:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2\langle P \rangle}{\mu GM}, \quad \frac{dT}{dt} = \frac{6\pi a^{5/2}\langle P \rangle}{\mu(GM)^{3/2}} \quad (54)$$

Korzystających z części danych astronomicznych zawartych w referencji [17] podstawiamy wartości $m_A = 1,441M_\odot$, $m_B = 1,387M_\odot$, $a = 1,9501 \cdot 10^6$ km oraz $e = 0,617131$ do równań (51) oraz (54), otrzymując:

$$\langle P \rangle = -7,43 \cdot 10^{24} \text{ W}, \quad \dot{a} = -1,0715 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}, \quad \dot{T} = -2,4545 \cdot 10^{-12} \quad (55)$$

W ostatnim kroku naszych rozważań szacujemy zmiany a oraz T w przeciągu jednego roku, oznaczone odpowiednio jako Δa oraz ΔT :

$$\Delta a = -3,379 \text{ m}, \quad \Delta T = -0,0000774 \text{ s} = -77,4 \mu\text{s} \quad (56)$$

Otrzymane wartości wykazują bardzo wysoką zgodność ilościową z odpowiadającymi im wartościami przedstawionymi w [17], co uzasadnia nasze rozważania.

B Algorytm Dormanda-Prince'a

Metoda Dormanda-Prince'a należy do rodziny metod Rungego-Kutty, służących do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad (57)$$

z zadanymi wartościami początkowymi:

$$y(t_0) = y_0 \quad (58)$$

Jak w każdej metodzie z rodziny Rungego-Kutty, idea działania polega na obliczaniu nachylenia prostej stycznej do wyznaczonej funkcji w wybranych punktach, a następnie obliczeniu ich średniej z zastosowaniem odpowiednich wag. Co wyróżnia algorytm Dormanda-Prince'a to adaptacyjne dobieranie optymalnej długości kroku h , dla którego zachowana jest oczekiwana przez nas tolerancja błędów.

B.1 Schemat działania algorytmu

Dla pojedynczego kroku, metoda Dormanda-Prince'a oblicza nachylenie siedmiu różnych stycznych K_i , a następnie przez ich kombinacje liniowe tworzy dwa różne przybliżenia szukanej funkcji y_{tmp} o dokładności $O(h^4)$ i z_{tmp} o dokładności $O(h^5)$. Kolejne styczne obliczane są przy pomocy poniższego algorytmu:

$$K_1 = h \cdot f(t, y(t)) \quad (59)$$

$$K_2 = h \cdot f\left(t + \frac{1}{5}h, y(t) + \frac{1}{5}K_1\right) \quad (60)$$

$$K_3 = h \cdot f\left(t + \frac{3}{10}h, y(t) + \frac{3}{40}K_1 + \frac{9}{40}K_2\right) \quad (61)$$

$$K_4 = h \cdot f\left(t + \frac{4}{5}h, y(t) + \frac{44}{45}K_1 - \frac{56}{15}K_2 + \frac{32}{9}K_3\right) \quad (62)$$

$$K_5 = h \cdot f\left(t + \frac{8}{9}h, y(t) + \frac{19372}{6561}K_1 - \frac{25360}{2187}K_2 + \frac{64448}{6561}K_3 - \frac{212}{729}K_4\right) \quad (63)$$

$$K_6 = h \cdot f\left(t + h, y(t) + \frac{9017}{3168}K_1 - \frac{355}{33}K_2 - \frac{46732}{5247}K_3 + \frac{49}{176}K_4 - \frac{5103}{18656}K_5\right) \quad (64)$$

$$K_7 = h \cdot f\left(t + h, y(t) + \frac{35}{384}K_1 + \frac{500}{1113}K_3 + \frac{125}{192}K_4 - \frac{2187}{6784}K_5 + \frac{11}{84}K_6\right) \quad (65)$$

Przybliżenia y_{tmp} i z_{tmp} wyznaczone są w następujący sposób:

$$y_{\text{tmp}} = y(t) + \frac{5179}{57600}K_1 + \frac{7571}{16695}K_3 + \frac{393}{640}K_4 - \frac{92097}{339200}K_5 + \frac{187}{2100}K_6 + \frac{1}{40}K_7 \quad (66)$$

$$z_{\text{tmp}} = y(t) + \frac{35}{384}K_1 + \frac{500}{1113}K_3 + \frac{125}{192}K_4 - \frac{2187}{6784}K_5 + \frac{11}{84}K_6 \quad (67)$$

Wyznaczenie dwóch przybliżeń o różnej dokładności pozwala na oszacowanie błędów przybliżenia, który będzie różnicą $|z_{\text{tmp}} - y_{\text{tmp}}|$. Na podstawie tej wielkości można wyznaczyć współczynnik s , który informuje jak należy przeskalować krok h by ten był optymalny:

$$h_{\text{opt}} = hs \quad (68)$$

$$s = \left(\frac{\epsilon h}{2|z_{\text{tmp}} - y_{\text{tmp}}|} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (69)$$

gdzie ϵ jest wybraną tolerancją błędów finalnego wyniku względem wielkości prawdziwej. Istnieją również inne metody wyznaczania współczynnika s , gdzie wykładnik ma potęgę $\frac{1}{4}$. Poniższą metodę wybrano sugerując się opisem w oryginalnej publikacji Dormanda i Prince'a [18]:

Często w praktyce zamiast modyfikować krok h po każdej iteracji algorytmu, podwaja się go w przypadku gdy $s > 2$, dwukrotnie zmniejsza gdy $s < 1$ (przy zmniejszeniu kroku wykonuje się obliczenia ponownie) i pozostawia niezmiennym w przypadku gdy $1 \leq s \leq 2$.

B.2 Przykłady zastosowania w astrofizyce

Współczesna astrofizyka w dużej mierze opiera się na modelowaniu numerycznym zjawisk, których opis analityczny jest niemożliwy lub bardzo utrudniony. Dotyczy to między innymi dynamiki układów wielu ciał, ewolucji orbit ciał niebieskich, ruchu cząstek w polach grawitacyjnych oraz propagacji promieniowania w zakrzywionej czasoprzestrzeni. Problemy te prowadzą najczęściej do układów zwyczajnych równań różniczkowych, których rozwiązanie wymaga zastosowania efektywnych i dokładnych metod całkowania numerycznego.

Metody z rodziny Rungego-Kutty z adaptacyjnym doбором kroku stanowią efektywny kompromis między prędkością osiągania zbieżności z rozwiązaniem dokładnym a kosztem obliczeniowym. Właśnie dlatego metoda Dormanda-Prince'a znalazła szerokie zastosowanie w obliczeniach astrofizycznych. Przykładowo, metodę zastosowano w oprogramowaniu OSIRIS służącym do symulowania trajektorii fotonów w pobliżu obiektów kompaktowych [19], a także jest standardową metodą numeryczną pakietu Python o nazwie EinsteinPy wprowadzającego funkcje implementujące ogólną teorię względności [20]. W przypadku analizy problemu wielu ciał, szeroko stosuje się zmodyfikowaną metodę Dormanda-Prince'a rzędu 5 i 3 DOPRI53, opisaną w książce D. Nerguta [21].

Bibliografia

- [1] K. S. Thorne. „Gravitational waves”. *arXiv preprint gr-qc/9506086* (1995). URL: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9506086>.
- [2] A. Le Tiec, J. Novak. „Theory of gravitational waves”. *An overview of gravitational waves: theory, sources and detection*. Singapore: World Scientific, 2017, 1–41.
- [3] B. P. Abbott i in. „Observation of gravitational waves from a binary black hole merger”. *Physical Review Letters* 116.6 (2016), 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- [4] B. P. Abbott i in. „Multi-messenger observations of a binary neutron star merger”. *The Astrophysical Journal Letters* 848.2 (2017), L12. DOI: 10.3847/2041-8213/aa91c9.
- [5] M. Zimmermann, E. Szedenits Jr. „Gravitational waves from rotating and precessing rigid bodies: Simple models and applications to pulsars”. *Physical Review D* 20.2 (1979), 351–373. DOI: 10.1103/PhysRevD.20.351.
- [6] D. Radice, V. Morozova, A. Burrows, D. Vartanyan, H. Nagakura. „Characterizing the gravitational wave signal from core-collapse supernovae”. *The Astrophysical Journal Letters* 876.1 (2019), L9. DOI: 10.3847/2041-8213/ab191a.
- [7] *The Nobel Prize in Physics 1993*. NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach. 2026. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1993/summary/> (term. wiz. 27.04.2026).
- [8] J. M. Weisberg, Y. Huang. „Relativistic Measurements from Timing the Binary Pulsar PSR B1913+16”. *The Astrophysical Journal* 829.1 (2016), 55. DOI: 10.3847/0004-637X/829/1/55.
- [9] J. H. Taylor, J. M. Weisberg. „Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913+16”. *Astrophysical Journal* 345 (1 paź. 1989). Research supported by NSF, 434–450. ISSN: 0004-637X.
- [10] J. H. Taylor, J. M. Weisberg. „A new test of general relativity: Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16”. *The Astrophysical Journal* 253 (1982), 908–920. DOI: 10.1086/159690.
- [11] M. E. Pati, C. M. Will. „Post-Newtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. II. Two-body equations of motion to second post-Newtonian order, and radiation reaction to 3.5 post-Newtonian order”. *Physical Review D* 65.10 (2002), 104008.
- [12] L. Blanchet. „Gravitational radiation from post-Newtonian sources and inspiralling compact binaries”. *Living Reviews in Relativity* 17.1 (2014), 2.
- [13] C. M. Will. „On the unreasonable effectiveness of the post-Newtonian approximation in gravitational physics”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108.15 (2011), 5938–5945. DOI: 10.1073/pnas.1103127108.
- [14] B. R. Iyer, C. M. Will. „Post-Newtonian gravitational radiation reaction for two-body systems: Nonspinning bodies”. *Phys. Rev. D* 52 (12 1995), 6882–6893. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.6882.
- [15] A. Starinets. *Problem Set 4: Gravitational radiation*. Materiały dydaktyczne do kursu General Relativity, HT23, Oxford University. URL: <https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/AndreiStarinets/TUTORIALS/GR-HT-2021/gr-ps-4-2023.pdf>.
- [16] P. C. Peters, J. Mathews. „Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit”. *Phys. Rev.* 131 (1 lip. 1963), 435–440. DOI: 10.1103/PhysRev.131.435. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.435>.
- [17] W. R. Johnston. *Binary pulsar PSR B1913+16*. 2004. URL: <https://www.johnstonsarchive.net/relativity/binpulsar.html>.

- [18] J. R. Dormand, P. J. Prince. „A family of embedded Runge-Kutta formulae”. *Journal of computational and applied mathematics* 6.1 (1980), 19–26.
- [19] J. Velásquez-Cadavid, J. Arrieta-Villamizar, F. Lora-Clavijo, O. Pimentel, J. Osorio-Vargas. „OSIRIS: a new code for ray tracing around compact objects”. *The European Physical Journal C* 82.2 (2022), 103.
- [20] S. Bapat i in. „EinsteinPy: A Community Python Package for General Relativity”. *arXiv preprint arXiv:2005.11288* (2020).
- [21] D. Negrut. *On the implicit integration of differential-algebraic equations of multibody dynamics*. The University of Iowa, 1998.