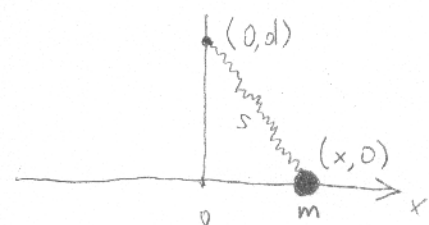


Zad 1.

 l_0 - dł. swobodna sprężyny

$$d = \frac{4}{5} l_0$$

Wiemy: $y = z = 0$. Masa m porusza się jedynie wzdłuż osi X , więc wybieramy współrzędną uogólnioną: $q = x$.

Energia kinetyczna: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

1p.

Energia potencjalna: $V = \frac{1}{2} k (s - l_0)^2$, gdzie s - dł. sprężyny

Z tw. Pitagorasa: $d^2 + x^2 = s^2$

$$s = \sqrt{d^2 + x^2}$$

czyli $V = \frac{1}{2} k (\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)^2$

3p.

Lagrangian: $L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)^2$

1p.

Pozycje równowagi: $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k (\sqrt{d^2 + x^2} - l_0) \cdot \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \sqrt{d^2 + x^2} = l_0$$

$$x^2 = l_0^2 - d^2 = \frac{9}{25} l_0^2$$

$$x = \pm \frac{3}{5} l_0$$

Śs 3 pozycje równowagi: $x_0 = 0$, $x_{\pm} = \pm \frac{3}{5} l_0$

2p.

Pozycje równowagi trwałe:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right) \right] = k \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} + \frac{l_0 x^2}{(d^2 + x^2)^{3/2}} \right)$$

dla $x_0 = 0$: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = k \left(1 - \frac{l_0}{d} \right) = -\frac{k}{4} < 0$, więc $x_0 = 0$ nie jest p. pol. równ. trwałej.

dla $x_{\pm} = \pm \frac{3}{5} l_0$: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm \frac{3}{5} l_0} = k \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2} l_0} + \frac{l_0 (\frac{3}{5})^2 l_0^2}{((\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2)^{3/2} \cdot l_0^3} \right) = \frac{9}{25} k > 0$,

więc punkty $x_{\pm} = \pm \frac{3}{5} l_0$ są punktami pol. równ. trwałej.

1p.

Równanie ruchu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -k \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right) x$$

Stąd:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right) x = 0$$

Niech

$$y_{\pm} = x \pm \frac{3}{5} l_0 \Rightarrow \ddot{y}_{\pm} = \ddot{x}$$

Rozwinięcie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{d^2 + x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{d^2 + (y_{\pm} \mp \frac{3}{5} l_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{y_{\pm}^2 \mp \frac{6}{5} l_0 y_{\pm} + l_0^2}} = \\ &= \frac{1}{l_0} - \frac{y_{\pm} \mp \frac{3}{5} l_0}{(y_{\pm}^2 \mp \frac{6}{5} l_0 y_{\pm} + l_0^2)^{3/2}} \Big|_{y_{\pm}=0} \cdot y_{\pm} + \dots \\ &= \frac{1}{l_0} \pm \frac{3}{5} \frac{1}{l_0^2} \cdot y_{\pm} + \dots \end{aligned}$$

Czyli

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right) x &= \left(1 - 1 \mp \frac{3}{5} \frac{y_{\pm}}{l_0} + \dots \right) (y_{\pm} \mp \frac{3}{5} l_0) = \\ &= \left(\frac{3}{5} \right)^2 y_{\pm} + \dots \end{aligned}$$

Stąd dostajemy przybliżone równ. ruchu wchodząc p. równ. trójkąt:

$$\ddot{y}_{\pm} + \left(\frac{3}{5} \right)^2 \frac{k}{m} y_{\pm} = 0$$

Jest to równanie oscylatora o częstotli $\omega = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{k}{m}}$ (2p.)

Uwaga: Można dokonać przybliżenia już na poziomie Lagrangianu:

$$\begin{aligned} \sqrt{d^2 + x^2} &= \sqrt{d^2 + (y_{\pm} \mp \frac{3}{5} l_0)^2} = \sqrt{y_{\pm}^2 \mp \frac{6}{5} l_0 y_{\pm} + l_0^2} = l_0 + \frac{y_{\pm} \mp \frac{3}{5} l_0}{\sqrt{y_{\pm}^2 \mp \frac{6}{5} l_0 y_{\pm} + l_0^2}} \Big|_{y_{\pm}=0} \cdot y_{\pm} + \dots \\ &= l_0 \mp \frac{3}{5} y_{\pm} + \dots \end{aligned}$$

$$L \approx \frac{1}{2} m \dot{y}_{\pm}^2 - \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^2 y_{\pm}^2$$