

ROZWIĄZANIE ZADANIA K 2.2 (8. I. 2018)

$$z = \frac{x^4}{a^3} \quad (t=0)$$

JAKO WSPÓRZĘDNA UOGÓLNIANA WYBIERAMY ODLEGŁOŚĆ KORBALKA OD OŚI OBROTU (ξ). (ZADMUDEMY SIĘ RUCHEM NA JEDNEJ Z "GAŁĘZI" KRZYWEJ).

(BARDZO ROZPATRUDEMY $\xi \in \mathbb{R}$)

LAGRANGIAN : $L = T - V$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \Omega t \\ y &= \xi \sin \Omega t \\ z &= \frac{\xi^4}{a^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\xi} \cos \Omega t - \xi \Omega \sin \Omega t \\ \dot{y} &= \dot{\xi} \sin \Omega t + \xi \Omega \cos \Omega t \\ \dot{z} &= \frac{4}{a^3} \xi^3 \dot{\xi} \end{aligned}$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\xi}^2 + \xi^2 \Omega^2 + \frac{16}{a^6} \xi^6 \dot{\xi}^2)$$

$$V = m g z = \frac{m g}{a^3} \xi^4$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\xi}^2 + \xi^2 \Omega^2 + \frac{16}{a^6} \xi^6 \dot{\xi}^2) - \frac{m g}{a^3} \xi^4 \quad (4p)$$

RÓWNANIE EULERA-LAGRANGE'A:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial L}{\partial \xi}$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m \dot{\xi} + \frac{16}{a^6} \xi^6 \dot{\xi} m$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m \ddot{\xi} + 16 \frac{m}{a^6} \xi^6 \ddot{\xi} + 96 \frac{m}{a^6} \xi^5 \dot{\xi}^2$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \xi} = m \Omega^2 \xi + 48 \frac{m}{a^6} \xi^5 \dot{\xi}^2 - 4 \frac{m g}{a^3} \xi^3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \xi} \rightarrow m \ddot{\xi} + 16 \frac{m}{a^6} \xi^6 \ddot{\xi} + 96 \frac{m}{a^6} \xi^5 \dot{\xi}^2 = m \Omega^2 \xi + 48 \frac{m}{a^6} \xi^5 \dot{\xi}^2 - 4 \frac{m g}{a^3} \xi^3 \quad (1p)$$

POŁOŻENIE RÓWNOWAGI TRWAŁEJ

UOGÓLNIANA ENERGIA POTENCJALNA : $U = \frac{m g}{a^3} \xi^4 - \frac{m}{2} \Omega^2 \xi^2 = U(\xi)$

STANAMI MINIMU $U(\xi)$: $\frac{dU}{d\xi} = 4 \frac{m g}{a^3} \xi^3 - m \Omega^2 \xi = 0$

$$\frac{dU}{d\xi} = 0 \Leftrightarrow \left(\xi = 0 \vee \xi = \sqrt{\frac{a^3}{g}} \frac{\Omega}{2} \right)$$

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} = 12 \frac{m g}{a^3} \xi^2 - m \Omega^2$$

→ sprawdzając
- czy odpowiadają
warunkom
2 drugiego
różniczkowania.

• $\xi_0 = 0$ JEST PUNKTEM RÓWNOWAGI NIETRWAŁEJ DLA $\Omega > 0$
(GDYŻ $\frac{d^2 U}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} < 0$)

• $\xi_1 = \left(\frac{a^3}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Omega}{2} \rightarrow \frac{d^2 U}{d\xi^2} \Big|_{\xi=\xi_1} = 12 \frac{m g}{a^3} \left(\frac{a^3}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Omega^2}{4} - m \Omega^2 = 2 m \Omega^2 > 0$

$\xi_1 = \left(\frac{a^3}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Omega}{2}$ JEST PUNKTEM RÓWNOWAGI TRWAŁEJ DLA $\Omega > 0$.

(2p)

ANALIZA MATYCH DRGAŃ WOLNE $g = g_1$

$$g = g_1 + \delta g$$

$$\dot{g} = \dot{\delta g}$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\delta g})^2 + (g_1 + \delta g)^2 \Omega^2 + \frac{16}{a^6} (g_1 + \delta g)^6 (\dot{\delta g})^2 - \frac{m g}{a^3} (g_1 + \delta g)^4$$

Rozwijam L z dokładnością do pierwszego rzędu $(\delta g)^1, (\dot{\delta g})^1$

$$L = \frac{m}{2} \left[(\dot{\delta g})^2 + g_1^2 \Omega^2 + 2 g_1 \Omega^2 \delta g + \Omega^2 (\delta g)^2 + \frac{16}{a^6} g_1^6 (\dot{\delta g})^2 \right] - \frac{m g}{a^3} g_1^4 +$$
$$- 4 \frac{m g}{a^3} g_1^3 \delta g - 6 \frac{m g}{a^3} g_1^2 (\delta g)^2 + \mathcal{R}$$

2) Wzrosty wyższego

$$L = \text{const} + \underbrace{\left(m g_1 \Omega^2 - 4 \frac{m g}{a^3} g_1^3 \right)}_{=0} \delta g + \frac{1}{2} m \Omega^2 (\delta g)^2 - 6 \frac{m g}{a^3} g_1^2 (\dot{\delta g})^2 + \frac{m}{2} \left(1 + \frac{16}{a^6} g_1^6 \right) (\dot{\delta g})^2 + \mathcal{R}$$

$$L = \text{const} + \left[\frac{1}{2} m \Omega^2 - 6 \frac{m g}{a^3} \frac{a^3}{g} \frac{\Omega^2}{4} \right] (\delta g)^2 + \frac{m}{2} \left(1 + \frac{16}{a^6} \left(\frac{a^3}{g} \right)^3 \frac{\Omega^6}{2^6} \right) (\dot{\delta g})^2 + \mathcal{R}$$

$$L \approx \text{const} - m \Omega^2 (\delta g)^2 + \frac{m}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{a^3}{g^3} \Omega^6 \right) (\dot{\delta g})^2$$

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^3 \Omega^6}{4 g^3} \right)}$$

(3p).