Zadanie 3 JK

a) 3 pkt

Korzystając z definicji oraz opisując pierścień za pomocą cylindrycznego układu współrzędnych mamy

$$I = \int_V \varrho^2 \varrho_0 \, dV = \varrho_0 \int_{R/2}^{R} \int_0^{2\pi} \int_0^{d} \varrho^3 \, d\varrho \, d\varphi \, dz = 2\pi d \varrho_0 \cdot \frac{1}{4}\left(R^4 - \frac{R^4}{16}\right) =$$

$$= \frac{15}{32} \pi d \varrho_0 R^4$$

Liczę masę pierścienia

$$m = \varrho_0 \int_{R/2}^{R} \int_0^{2\pi} \int_0^{d} \varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz = 2\pi \varrho_0 d \cdot \frac{1}{2}\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{3}{4} \pi \varrho_0 d R^2$$

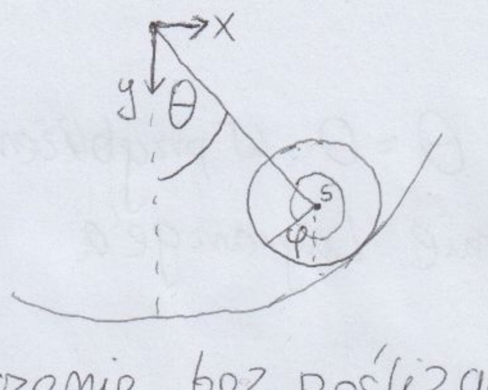
Czyli

$$I = \frac{15}{32} \pi \varrho_0 d R^4 = \left(\frac{3}{4} \pi \varrho_0 d R^2\right) \cdot \frac{5}{8} R^2 = \frac{5}{8} m R^2$$

b) 5 pkt

ruch pierścienia można traktować jako ruch postępowy środka masy oraz obrót wokół osi przechodzącej przez ten punkt i prostopadłej do przekroju poprzecznego pierścienia

Opisuję ruch dwoma kątami:



Toczenie bez poślizgu nakłada następujące więzy na ruch:

$$2R\theta = R(\theta + \varphi)$$

Mamy więc

$$\varphi = \theta$$

Położenie środka masy:

$$x_s = R\sin\theta$$

$$y_s = R\cos\theta$$

Energia kinetyczna ruchu postępowego środka masy:

$$T_1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2$$

Energia ruchu obrotowego

$$T_2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}mR^2\right)\cdot\dot{\theta}^2 = \frac{5}{16}mR^2\dot{\theta}^2$$

Energia potencjalna

$$V = -mgy_s = -mgR\cos\theta$$

Czyli

$$\mathcal{L} = \frac{13}{16}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta$$

Równania Lagrange'a

$$2\cdot\frac{13}{16}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -\cancel{m}g\cancel{R}\sin\theta$$

$$\Updownarrow$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{8g}{13R}\sin\theta$$

2pkt

c) Położenie równowagi trwałej to $\theta = 0$. W przybliżeniu ruchu wokół tego punktu równanie Lagrange'a można zapisać jako

$$\ddot{\theta} = -\frac{8g}{13R}\theta,$$

gdzie $\omega = \sqrt{\frac{8g}{13R}}$ jest częstością małych drgań.