ROZWIĄZANIE ZADANIA 1.1 Z PUNKTACJĄ

Na cząstkę naładowaną opisaną w zadaniu działa siła Lorenza. Część pochodząca od pola magnetycznego wyraża się iloczynem wektorowym $q(\bar{v} \times \bar{B})$, gdzie $\bar{v}$ jest prędkością cząstki. Pracujemy w kartezjańskim układzie współrzędnych

$$\bar{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z$$

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = (\dot{y}B - 0)\hat{e}_x + (0 - \dot{x}B)\hat{e}_y + (0-0)\hat{e}_z = \dot{y}B\hat{e}_x - \dot{x}B\hat{e}_y$$

(1p) za prawidłowe wyznaczenie magnetycznej części siły Lorenza

Cała siła Lorenza ma więc postać

$$\bar{F} = \dot{y}Bq\hat{e}_x - (\dot{x}Bq + Eq)\hat{e}_y$$

Zapisujemy równanie ruchu we współrzędnych

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \dot{y}Bq \\ m\ddot{y} = -\dot{x}Bq - Eq \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Z trzeciego równania wynika iż $z(t) = at + b$. Z warunków początkowych $\dot{z}(0) = 0$ i $z(0) = 0$ otrzymujemy $a=0, b=0$. Stwierdzamy zatem, że ruch odbywa się w płaszczyźnie $\langle \hat{e}_x, \hat{e}_y \rangle$

(2p) za poprawne wypisanie równań ruchu

(1p) za ustalenie, że ruch jest płaski

Dalej zajmujemy się już jedynie dwoma pierwszymi równaniami. Dla wygody dzielimy je przez m i wprowadzamy oznaczenie $\mu = q/m$

$$\ddot{x} = \dot{y}B\mu$$
$$\ddot{y} = -\dot{x}B\mu - E\mu$$

Od tego momentu możliwych jest kilka dróg postępowania. Przedstawimy dwie z nich:

(2p) za wybranie skutecznej metody rachunkowej

I: Wprowadzamy zmienną zespoloną $\zeta = x + iy$

$$\ddot{\zeta} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \dot{y}B\mu - i\dot{x}B\mu - iE\mu = -iB\mu(\dot{x} + i\dot{y}) - iE\mu = -iB\mu\dot{\zeta} - iE\mu$$

$$\ddot{\zeta} + iB\mu\dot{\zeta} = -iE\mu$$

jest to równanie różniczkowe, liniowe, drugiego rzędu o stałych współczynnikach w zmiennej zespolonej. Stosujemy zwyczajowe metody:

Szukamy rozwiązania równania jednorodnego, badając równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 + iB\mu\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda + iB\mu) = 0 \quad \lambda \in \{0, -iB\mu\}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać:

$$\zeta(t) = a + be^{-iB\mu t}$$

(1p) za r.o.r.j

Niejednorodność jest stała. W takim przypadku zazwyczaj rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego także przewidujemy w postaci stałej, jednak w tym przypadku jest to sytuacja „rezonansowa”, bo jedna z wartości własnych jest 0, zatem stałe rozwiązanie jest jednym z rozwiązań równania jednorodnego. Właściwym przewidywaniem r.s.r.n jest

$$\xi(t)=\alpha t \quad \dot{\xi}=\alpha \quad \ddot{\xi}=0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{i}B\cancel{\mu}\alpha=-\cancel{i}\cancel{\mu}E \quad \Rightarrow \quad \alpha=-E/B$$

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego ma postać

$$\xi(t)=a+be^{-iB\mu t}-E/B\,t$$

1p za r.o.r.n.

Wyznaczamy stałe: $\xi(0)=0$ tzn. $a+b=0$ $\quad b=-a$

$$\xi(t)=a-ae^{-iB\mu t}-E/B\,t$$

$$\dot{\xi}(0)=v_0=a\,iB\mu-E/B \qquad a=\frac{1}{iB\mu}\left(v_0+E/B\right)=-i\frac{1}{B\mu}\left(v_0+E/B\right)$$

Rozwiązanie zagadnienia początkowego:

$$\xi(t)=-i\frac{1}{B\mu}\left(v_0+E/B\right)+\frac{i}{B\mu}\left(v_0+E/B\right)e^{-iB\mu t}-E/B\,t$$

Wracamy do zmiennych rzeczywistych

$$x(t)+iy(t)=\frac{-i}{B\mu}\left(v_0+E/B\right)+\frac{1}{B\mu}\left(v_0+\frac{E}{B}\right)\left[i\cos(-B\mu t)-\sin(-B\mu t)\right]-E/B\,t=$$

$$=\frac{1}{B\mu}\left(v_0+\frac{E}{B}\right)\sin(B\mu t)-E/B\,t+i\left[\frac{1}{B\mu}\left(v_0+\frac{E}{B}\right)\cos(B\mu t)-\frac{1}{B\mu}\left(v_0+\frac{E}{B}\right)\right]$$

$$x(t)=\frac{1}{B\mu}\left(v_0+\frac{E}{B}\right)\sin(B\mu t)-E/B\,t$$

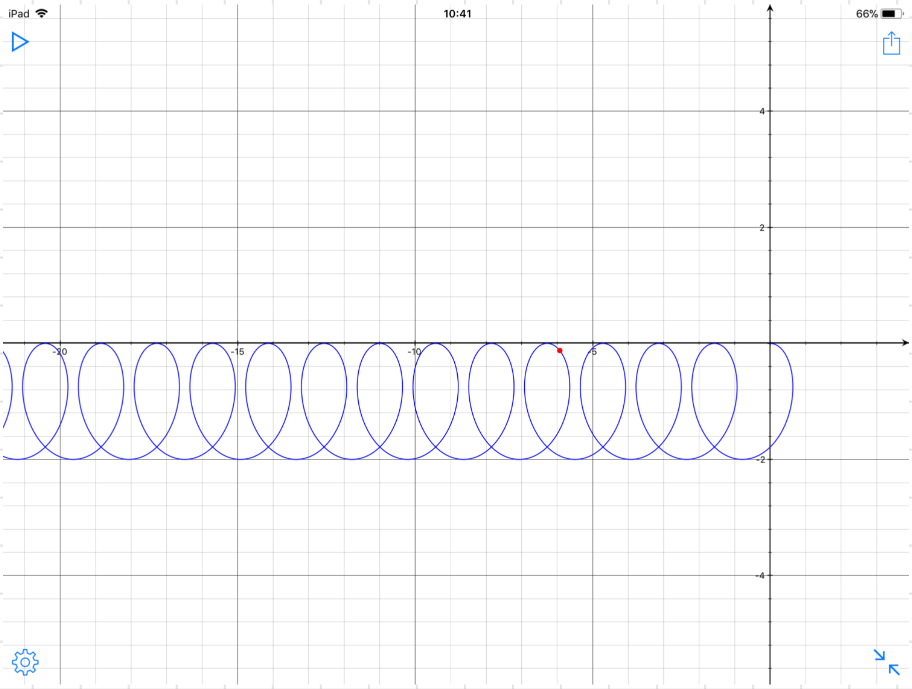
$$y(t)=\frac{1}{B\mu}\left(v_0+E/B\right)\left[\cos(B\mu t)-1\right]$$

1p za wyznaczenie stałych

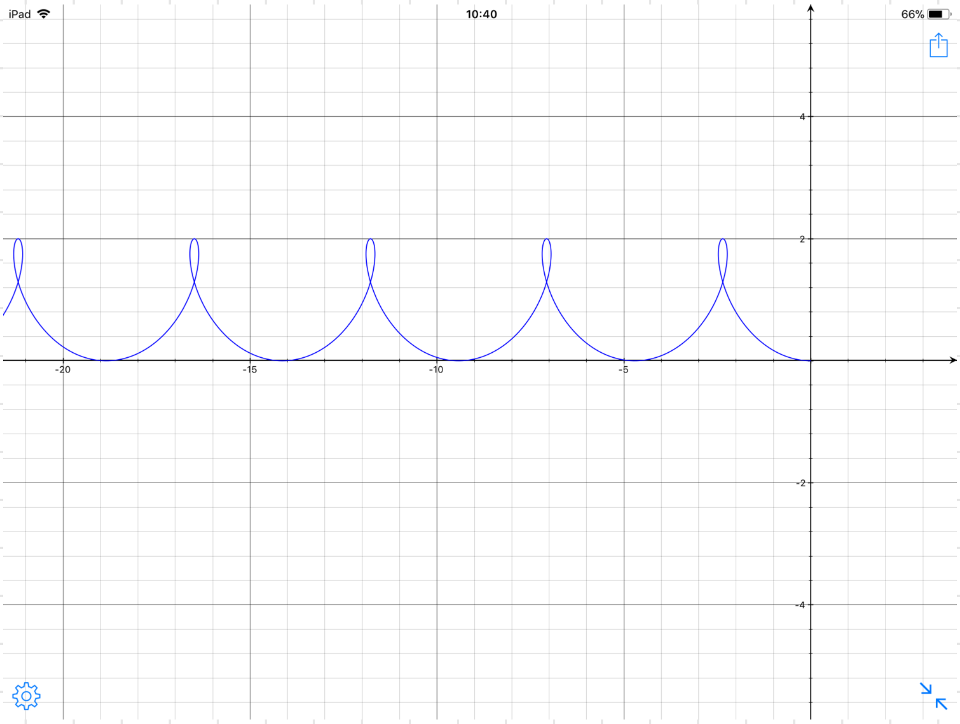
W szczególnym przypadku, gdy $v_0=-E/B$ ruch odbywa się wzdłuż osi x w kierunku przeciwnym do $\hat{e}_x$

W pozostałych przypadkach ruch odbywa się po rozciągniętej spirali. Dokładny kształt zależy od wzajemnych stosunków stałych E, B, μ, v_0

1p za dyskusję i szkic trajektorii



$v_0 > -E/B$



$v_0 < -E/B$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{y}B\mu \\ \ddot{y} = -\dot{x}B\mu - E\mu \end{cases}$$

II metoda rozwiązania: obserwujemy że jedno całkowanie można wykonać od razu

$$\begin{cases} \dot{x} - v_0 = yB\mu \quad \rightarrow \quad \dot{x} = yB\mu + v_0 \\ \dot{y} - 0 = -xB\mu - E\mu t \end{cases}$$

2p za wybranie skutecznej metody całkowania

Jedno z równań w wersji niescałkowanej używamy do zlikwidowania zmieszania zmiennych

$$\ddot{y} = -(yB\mu + v_0)B\mu - E\mu \qquad \ddot{y} + yB^2\mu^2 = -v_0B\mu - E\mu$$

r.o.r.j: $\quad y(t) = a\cos(B\mu t + \varphi)$

r.s.r.n. w postaci stałej α: $y(t) = \alpha \Rightarrow \alpha B^2\mu^2 = -v_0B\mu - E\mu \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{B^2\mu^2}(v_0B\mu + E\mu) =$

$$= -\frac{1}{B\mu}\left(v_0 + \frac{E}{B}\right)$$

r.o.r.n

$$y(t) = a\cos(B\mu t + \varphi) - \frac{1}{B\mu}\left(v_0 + \frac{E}{B}\right)$$

stałe wyznaczamy z war. pocz.

$$\dot{y}(t) = -aB\mu\sin(B\mu t + \varphi) = \Big|_{t=0} -aB\mu\cos\varphi \qquad \begin{cases} 0 = -aB\mu\sin\varphi \\ 0 = a\cos\varphi - \frac{1}{B\mu}\left(v_0 + \frac{E}{B}\right) \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{B\mu}(v_0 + E/B), \quad \varphi = 0$$

$$y(t) = \frac{1}{B\mu}(v_0 + E/B)[\cos(B\mu\varphi) - 1]$$

$$x(t) = \frac{1}{B\mu}(-\dot{y} - E\mu t) = \frac{1}{B\mu}\left(\left(v_0 + \frac{E}{B}\right)\sin(B\mu t) - E\mu t\right) = \frac{1}{B\mu}\left(v_0 + \frac{E}{B}\right)\sin(B\mu t) - E/B\, t$$

3p za poprawne przeprowadzenie rachunków w tym
1p za rorj.
1p za rorn.