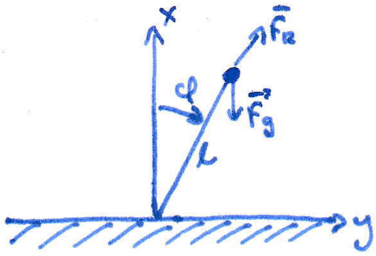
# ZAD. K1.3

ROZPOCZYNAMY OD OBSERWACJI, ŻE RUCH KOTKA ODBYWA SIĘ PO WYCINKU OKRĘGU. NATURALNYM JEST WYBÓR WSPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH. $(\rho,\varphi)$




W UKŁADZIE INERCJALNYM NA KOTKA DZIAŁA SIŁA GRAWITACJI ($\bar{F}_g$) ORAZ SIŁA REAKCJI WIĘZÓW ($\bar{F}_R$)

RÓWNANIA LAGRANGE'A 1-GO RODZAJU: $\begin{cases} m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + \lambda\nabla f \quad (*) \\ f(\rho,\varphi) = \rho - l = 0 \end{cases}$

$$\nabla f = \bar{e}_\rho$$

W UKŁADZIE BIEGUNOWYM: $\bar{r} = \rho\bar{e}_\rho$, $\dot{\bar{r}} = \dot{\rho}\bar{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi$, $\ddot{\bar{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\bar{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\bar{e}_\varphi$

U NAS (Z RÓWNANIA WIĘZÓW) $\dot{\rho} = 0$, $\ddot{\rho} = 0$ I $\ddot{\bar{r}} = -\rho\dot{\varphi}^2\bar{e}_\rho + \rho\ddot{\varphi}\bar{e}_\varphi$ ORAZ $\rho = l$

WSTAWIAJĄC DO $(*)$, ORAZ KORZYSTAJĄC Z $\bar{g} = -g\bar{e}_x = -g\cos\varphi\,\bar{e}_\rho + g\sin\varphi\,\bar{e}_\varphi$ MAMY:

$$m(-l\dot{\varphi}^2\bar{e}_\rho + l\ddot{\varphi}\bar{e}_\varphi) = (-mg\cos\varphi + \lambda)\bar{e}_\rho + mg\sin\varphi\,\bar{e}_\varphi$$

I STĄD $\begin{cases} ml\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi \quad (**) \\ -ml\dot{\varphi}^2 = -mg\cos\varphi + \lambda \end{cases}$ (4p)

Z DRUGIEGO Z TYCH RÓWNAŃ ŁATWO WYZNACZYĆ $\lambda$. MUSIMY JEDNAK POZBYĆ SIĘ ZALEŻNOŚCI OD $\dot{\varphi}$. DO TEGO POSŁUŻY PIERWSZE RÓWNANIE. $ml\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi \rightarrow \dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{g}{l}\dot{\varphi}\sin\varphi \rightarrow$ $\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{g}{l}\cos\varphi\right) \rightarrow \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{l}\cos\varphi + C$, CO REPREZENTUJE ZASADĘ ZACHOWANIA ENERGII. Z WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH MAMY: $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = 0$. STĄD $C = \frac{g}{l}$ I MAMY: $\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l}(1-\cos\varphi)$ (3p)

WSTAWIAJĄC TO DO DRUGIEGO Z RÓWNAŃ $(**)$ MAMY $\lambda = mg\cos\varphi - 2mg(1-\cos\varphi)$ $\rightarrow \lambda = mg(3\cos\varphi - 2)$. NATOMIAST $\cos\varphi = \frac{x}{l}$ I STĄD $\lambda = mg\left(3\frac{x}{l} - 2\right)$ (1p)

SIŁA REAKCJI $\bar{F}_R = \lambda\bar{e}_\rho = mg\left(3\frac{x}{l} - 2\right)\bar{e}_\rho$ (1p)

$\bar{F}_R = 0$ DLA $\frac{x}{l} = \frac{2}{3}$ (1p)