

Zadania domowe z *Podstaw fizyki współczesnej II*
Seria 11

Zad. 1

Obliczyć poprawkę (pierwszego rzędu) do energii stanu 1s oraz 2s atomu wodoru z zaburzeniem postaci (tzw. poprawka relatywistyczna):

$$\delta\hat{H} = -\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^4}.$$

Wskazówki:

- nie uwzględniamy spinu,
- równanie Schrodingera (dla tych stanów) wygodnie jest zapisać w sposób:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m}|\Psi_{n00}\rangle = (E_n^{(0)} + \frac{\alpha}{r})|\Psi_{n00}\rangle$$

(bez uwzględnienia zaburzenia) i wykorzystać to do odpowiedniego przedstawienia kwadratu operatora pędu $\hat{p}^2$.

Zad.2

Atom wodoru w jednorodnym polu elektrycznym można opisać hamiltonianem:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + e\vec{E} \cdot \vec{r},$$

gdzie $\vec{E} = (0, 0, E)$, e jest ładunkiem elementarnym.

Obliczyć poprawki pierwszego rzędu do energii stanów o $n = 1$ i $n = 2$. (Jest to tzw. efekt Starka). *Wskazówka*: nie trzeba uwzględniać spinu.

Zad.3

Obliczyć dla atomu wodoru poprawkę pierwszego rzędu do energii stanu $n = 2$, wynikającą z uwzględnienia sprzężenia *spin-orbita*, tj. pojawienia się w hamiltonianie członu zaburzającego:

$$\delta\hat{H} = f(r)\hat{L} \cdot \hat{S},$$

gdzie:

$$f(r) = \frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}.$$

Komentarz: W układach atomowych (a więc także w atomach jednoelektronowych) spinowy i orbitalny moment pędu dodają się do *całkowitego momentu pędu*:

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S},$$

którego kwadrat wynosi:

$$\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L} \cdot \hat{S}.$$

Stany własne są jednocześnie stanami własnymi operatorów:

$$\{\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2, \hat{S}^2\},$$

a postać równań na wartości własne jest następująca:

$$\begin{aligned}\hat{J}^2|jm_jls\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|jm_jls\rangle \\ \hat{J}_z|jm_jls\rangle &= \hbar m_j|jm_jls\rangle \\ \hat{L}^2|jm_jls\rangle &= \hbar^2 l(l+1)|jm_jls\rangle \\ \hat{S}^2|jm_jls\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|jm_jls\rangle\end{aligned}$$

Wartości l i s są znane, a j przebiega całkowitymi krokami od wartości maksymalnej:

$$j_{max} = l + s,$$

do wartości minimalnej:

$$j_{min} = |l - s|,$$

natomiast m_j przyjmuje wartości od $-j$ do $+j$, różniąc się od $-j$ o kolejne liczby naturalne. Stany własne w notacji bra-ketowej można więc zapisać:

$$|\phi\rangle = |nl\rangle|jls m_j\rangle,$$

gdzie $|nl\rangle$ reprezentuje składową radialną stanów własnych operatora $\hat{H}_0$.

Uwagi:

- $\frac{\hbar^2}{2n}\langle f \rangle_{nl} = \left(\frac{me^4 Z^2}{2^2 n^2}\right)^2 \frac{1}{mc^2(l+\frac{1}{2})(l+1)l},$
- w tym przypadku (elektron o spinie $\frac{1}{2}$) dla danej wartości l liczba kwantowa j przyjmuje dwie wartości.
- w razie potrzeby, dodatkowych wyjaśnień i informacji należy szukać w odpowiednich książkach.

A. Chęcińska
W. Kamiński
D. Rudeńska
K. Turzyński