

JAK UCZYĆ KWANTOWEJ TEORII POLA

Piotr Chankowski

KMMF 17.05.2012

“Pomysł nie doszedł do skutku ponieważ autorzy postawili sobie zbyt ambitne zadanie napisania podręcznika bezbłędnego w warstwie matematycznej”

IBB & JK & MC *Teoria kwantów*

“Nie sposób nie nadmienić, że w porównaniu z porównaniu z pracami oryginalnymi wiele kursów mechaniki kwantowej jest o wiele bardziej skomplikowanych. Chociaż tłumaczy się to zwykle koniecznością zachowania ogólności i ścisłości rozważań, to przy uważnym spojrzeniu na sprawę można bez trudu zauważyć, że duża część *ściśłych* twierdzeń jest błędna”

LDL & JML *Mechanika kwantowa*

”Eksperymentalne” korzenie QFT:

- Spektroskopia atomowa - 1925 kwantowa teoria promieniowania Diraca
- radioaktywność - 1932 teoria Fermiego rozpadów beta (skok koncepcyjny!)

QFT dziś:

- “maszynka” do obliczania amplitud procesów
- uniwersalny język do opisu rzeczywistości fizycznej

DWIE (LUB TRZY) DROGI DO QFT

Komplementarne podejścia

- urelatywistyczna mechanika kwantowa wielu cząstek (bez żadnych równań falowych!!!)
- kwantyzacja relatywistycznych pól operatorowo
- kwantyzacja pól przez całki funkcjonalne

Analogia: rozmaitość ze zbiorem map (atlasem)

RELATYWISTYCZNA MECH KWANT CZAŚTEK

Symetria Poincaré $O(1,3)$: $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\omega)x^{\nu} - a^{\mu}$
 \implies w p. Hilb działają op. unitarne $U(\Lambda, a)$

$$|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)|\Psi\rangle$$

Hermitowskie generatory $J^{\mu\nu} = (J^i, K^i)$, P^{μ}
(znane związki komutacyjne)

Stany jednocząstkowe $|\mathbf{p}, \sigma\rangle \equiv$ stany własne:
 $P^{\mu}P_{\mu}$, P^i , $W^{\mu}W_{\mu}$, i W^0 lub $s_p^{\mu}W_{\mu}$

Konstrukcja reprezentacji $O(1,3)$ na stanach jednocząstkowych przez reprezentację indukowaną: czteropęd standardowy k^{μ} , $p^{\mu} = (L_p)^{\mu}_{\nu}k^{\nu}$

$$|\mathbf{p}, \sigma\rangle =: U(L_p, 0)|\mathbf{k}, \sigma\rangle$$

Cząstki bezmasowe - inna grupa stabilności
 k^{μ} .

P. HILB (Focka) CZĄSTEK SWOBODNYCH

(w niej uprawia się rachunek zaburzeń)

Baza stanów $|\alpha_0\rangle \equiv |(\mathbf{p}_1\sigma_1 \dots \mathbf{p}_n\sigma_n)_0\rangle$:

$$|\Omega_0\rangle, \quad a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p})|\Omega_0\rangle, \quad a_{\sigma_2}^{\dagger}(\mathbf{p}_2)a_{\sigma_1}^{\dagger}(\mathbf{p}_1)|\Omega_0\rangle \quad \dots$$

$\langle\Omega_0|\Omega_0\rangle = 1$ i $U_0(\Lambda, a)|\alpha_0\rangle =$ wiadomo jak.

Bozony

$$[a_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1), a_{\sigma_2}^{\dagger}(\mathbf{p}_2)] = \delta_{\sigma_1\sigma_2}\delta_{\Gamma}^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$$

fermiony

$$\{a_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1), a_{\sigma_2}^{\dagger}(\mathbf{p}_2)\} = \delta_{\sigma_1\sigma_2}\delta_{\Gamma}^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$$

Spin-statystyka jeszcze bez uzasadnienia!

Jawna konstrukcja generatorów $J^{\mu\nu}$, P^{μ} : np.

$$P^0 \equiv H_0 = \int d\Gamma_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}) \sum a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p})a_{\sigma}(\mathbf{p})$$

CZĄSTKI ODDZIAŁUJĄCE

Założenie: H ma stany jednocząstkowe.

Bazy *in* i *out* stanów własnych H : $|\alpha_{in}\rangle, |\alpha_{out}\rangle$
odpowiedniość jeden do jeden $|\alpha_{in}\rangle, |\alpha_{out}\rangle$ i
stanów $|\alpha_0\rangle$ pewnego H_0 :

$$H|\alpha_{in}\rangle = E_\alpha|\alpha_{in}\rangle$$

$$H|\alpha_{out}\rangle = E_\alpha|\alpha_{out}\rangle$$

$$H|\alpha_0\rangle = E_\alpha|\alpha_0\rangle$$

(to samo spektrum H i H_0) oraz

$$e^{-iHt} \int d\alpha g(\alpha)|\alpha_{in}\rangle \longrightarrow e^{-iH_0t} \int d\alpha g(\alpha)|\alpha_0\rangle$$

dla $t \rightarrow -\infty$ ($+\infty$ dla stanów *out*). Formalnie

$$|\alpha_{in}\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} e^{-iH_0t} |\alpha_0\rangle$$

Oddziaływanie:

$$V \equiv H - H_0$$

Zbiór amplitud przejścia: macierz S

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta_{out} | \alpha_{in} \rangle = \langle \beta_0 | S_0 | \alpha_0 \rangle$$

$$S_0 = T \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt V_I(t) \right\}$$

$V_I(t) \equiv e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$. T - uporządkowanie chronologiczne. S unitarna:

$$\sum_{\gamma} S_{\gamma\beta}^* S_{\gamma\alpha} = \sum_{\gamma} S_{\beta\gamma} S_{\alpha\gamma}^* = \delta_{\beta\alpha}, \quad S_0^\dagger S_0 = S_0 S_0^\dagger = 1$$

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} - i2\pi\delta(E_\alpha - E_\beta) T_{\beta\alpha}^+(E_\alpha)$$

Z elementów macierzy S przekroje, czasy życia.

RELATYWISTYCZNA MACIERZ S

$U(\Lambda, a)|\alpha_{in,out}\rangle$ tak samo i tak jak $U(\Lambda, a)|\alpha_0\rangle$.
Relatywistycznie współzmiennicza, gdy

$$[U_0(\Lambda, a), S_0] = 0$$

Silne warunki na V . Spełnione gdy

$$V_I(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}_I(t, \mathbf{x})$$

$$U_0(\Lambda, a)\mathcal{H}_I(x)U_0^\dagger(\Lambda, a) = \mathcal{H}_I(\Lambda \cdot x - a)$$

$$[\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(y)] = 0 \quad \text{gdy} \quad (x - y)^2 \leq 0$$

Macierz $S_{\beta\alpha}$ spełnia “rozkład gronowy” (faktoryzowalna) gdy V zbudowane z $a_\sigma^\dagger(\mathbf{p})$ i $a_\sigma(\mathbf{p})$

$\mathcal{H}_I(t, \mathbf{x})$ zbudowany z iloczynów operatorów pola

$$\phi_a(x) = \int d\Gamma_{\mathbf{p}} \sum_{\sigma} \left[u_a(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a_{\sigma}(\mathbf{p}) + v_a(\mathbf{p}, \sigma) e^{+ip \cdot x} a_{\sigma}^{c\dagger}(\mathbf{p}) \right]$$

$$U_0(\Lambda, a) \phi_a(x) U_0^{\dagger}(\Lambda, a) = D_{ab}^{-1}(\Lambda) \phi_a(\Lambda \cdot x - a)$$

$H = H_0 + V_I$ nie zachowuje liczby cząstek!

Dla $(x - y)^2 \leq 0$ operatory pola muszą spełniać

$$\begin{aligned} [\phi_a(x), \phi'_a(y)] &= 0 && \text{bozony} \\ \{\psi_a(x), \psi'_a(y)\} &= 0 && \text{fermiony} \end{aligned}$$

Związek spinu ze statystyką!

Jeśli $[Q, H] = 0$ (zachowane wewn. l. kwant.)

to muszą być antycząstki! $a_{\sigma}(\mathbf{p}) \leftrightarrow a_{\sigma}^c(\mathbf{p})$

Ważne:

Cząstki o masie zero i spinie 1 (np. foton):
rzut spinu na kierunek pędu: tylko +1 lub -1
(ale nie zero jak dla cząstek masywnych)

Z operatorów anihilacji i kreacji nie da się zbudować operatora pola A^μ przekształcającego się jak uczciwy wektor

$$U(\Lambda, a)A^\mu(x)U^\dagger(\Lambda, a) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda x - a) - \partial^\mu \Omega(x)$$

Oddziaływanie musi mieć specjalną postać by ten “ogon” skompensować

Wzór $S_0 = T \exp \{ -i \int dx \mathcal{H}_I(x) \}$ prowadzi do diagramów i reguł Feynmana. Propagatory:

$$i\Delta^{\text{F}}(x - y) \equiv \theta(x^0 - y^0) \left[\phi^{(+)}(x), \phi^{\dagger(-)}(y) \right] \\ + \theta(y^0 - x^0) \left[\phi^{(+)}(y), \phi^{\dagger(-)}(x) \right]$$

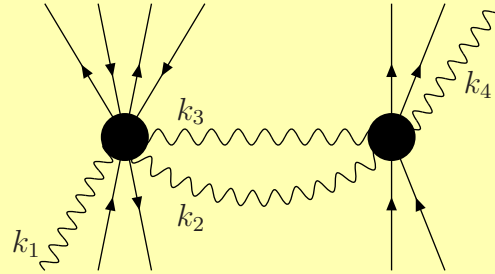
Oddziaływania z $J^\mu V_\mu(x)$ (z bozonami o $M \neq 0$ i spinie 1 lub 0 $\partial_\mu \phi$) - niekowariantności:

$$i\Delta_{\mu\nu}^{\text{F}}(x - y) = \partial_\mu^{(x)} \partial_\nu^{(y)} i\Delta^{\text{F}}(x - y) - i\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \delta^{(4)}(x - y)$$

Oddziaływanie $J^\mu A_\mu$ z fotonem

$$iD_{\mu\nu}^{\text{F}}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{iP_{\mu\nu}(\mathbf{k})}{k^2 + i0} e^{-ik \cdot (x-y)}$$

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_0(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu) - k_\mu k_\nu - k^2 n_\mu n_\nu}{|\mathbf{k}|^2}$$



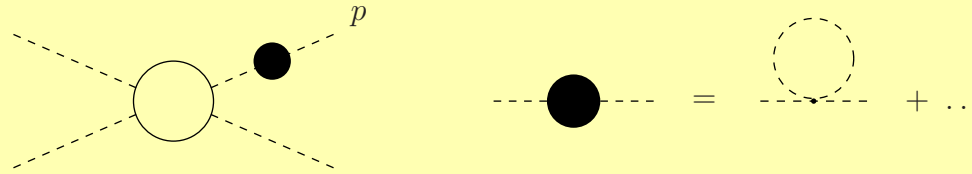
Rysunek 1: Definicja $\mathcal{N}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}(k_1, k_2, \dots, k_n, \mathbf{p}_1, \dots)$: np. lewy czarny bąbel

$$\Delta \mathcal{H}_I = \frac{1}{2M^2} J^0(x) J^0(x)$$

**W QED: prąd musi być zachowany $\partial^\mu J^\mu = 0$,
trzeba dodać**

$$V_{\text{nonlocal}}^I(t) = \frac{e^2}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \frac{J^0(t, \mathbf{x}) J^0(t, \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

$$k_i^{\mu_i} \mathcal{N}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}(k_1, k_2, \dots, k_n, \mathbf{p}_1, \dots) = 0$$



Rysunek 2:

WAŻNA KONSEKWENCJA ZAŁOŻEŃ
 Propagator ma mieć biegun w $p^2 = M^2$ (fizyczna masa = masie z H_0 !)
 residuum bieguna ma być i

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \langle \Omega_0 | \varphi(x) | (\mathbf{p})_0 \rangle = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \langle \Omega_0 | e^{iH_0 t} e^{-iHt} e^{iHt} \varphi(0, \mathbf{x}) e^{-iHt} e^{iHt} | (\mathbf{p})_0 \rangle$$

$$= \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \langle \Omega_{\pm} | \tilde{\varphi}_H(t, \mathbf{x}) | (\mathbf{p})_{\pm} \rangle ,$$

V trzeba dopasować!

$$\Delta \mathcal{H}_I = -\frac{1}{2} \delta Z \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi + \frac{1}{2} \Delta M^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} \delta Z' \partial_0 \varphi \partial_0 \varphi$$

ZALETY (DYDAKTYCZNE) TEGO PODEJŚCIA

- bezpośredni związek z zasadami QM (wzory na przekroje)
- oczywiste pochodzenie “funkcji falowych” w diagramach Feynmana
- spin-statystyka, antycząstki, niezachowywanie liczby cząstek

WADY TEGO PODEJŚCIA

- silne założenia: V budowane z a i a^\dagger z H_0
- ściśle perturbacyjne sformułowanie
- konieczność “ręcznego” poprawiania kowariantności
- nieabelowe YM - beznadziejnie skompliko-

POLA RELATYWISTYCZNE

Klasyczna teoria pola zadana przez działanie

$$I_{\text{cl}}[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_{ai}(x), \partial_\mu \phi_{ia}(x))$$

$\delta I_{\text{cl}} = 0$ daje równania ruchu.

Symetrie I_{cl} względem grup przekształceń pól:
Poincaré

$$\phi_{ia}(x') = D_{ab}(\Lambda) \phi_{ib}(x)$$

wewnętrznych

$$\phi'_{ia}(x) = U_{ij}(\theta) \phi_{ja}(x)$$

Prądy Noether symetrii zachowane

$$\partial^\mu j_\mu^A(x) = 0, \quad \frac{d}{dt} Q^A \equiv \frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{x} j_0^A(t, \mathbf{x}) = 0$$

KWANTOWANIE (kanoniczne)

Pędy kanoniczne $\Pi = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\phi)$ i Hamiltonian

$$H = \int d^3\mathbf{x} [\Pi\partial_t\phi(\Pi, \phi) - \mathcal{L}(\Pi, \phi, \nabla\phi)]$$

Pola stają się operatorami z ETC

$$[\phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

oraz $[\phi, \phi] = [\Pi, \Pi] = 0$ (lub antykomutatory).

Ładunki Noether stają się operatorami. Np. symetria Poincaré daje P^i, J^i, K^i .

Operatory Heisenbergowskie

$$O_H(t, \mathbf{x}) = e^{iHt} O(0, \mathbf{x}) e^{-iHt} \quad \frac{d}{dt} O_H(t, \mathbf{x}) = i[H, O_H(t, \mathbf{x})]$$

Pola wektorowe masywne lub bezmasowe -
kwantowanie z więzami

Daje automatycznie niekowariantne wyrazy
w \mathcal{H}_I :

$$\Delta\mathcal{H}_I = \frac{1}{2M^2} J^0(x) J^0(x)$$

w przypadku masywnych pól oraz

$$V_{\text{nonlocal}}^I(t) = \frac{e^2}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \frac{J^0(t, \mathbf{x}) J^0(t, \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

i inne takie jak

$$\Delta\mathcal{H}_I = e^2 \phi^\dagger \phi A_\mu A^\mu$$

w przypadku elektrodynamiki

Jak zawsze $H = H_0$ (kwadratowy) + V .

**H_0 diagonalizowany przez a a^\dagger . Stany własne $|\alpha_0\rangle$ H_0 są cząstkami
(bo P_0^i, J_0^i, K_0^i je przekształcają jak należy)**

Znów zakładamy, że $H = H_0 + V$ ma stany cząstkowe (tak może nie być!) *in* i *out* odpowiadające $|\alpha_0\rangle$. Przy tych założeniach

$$\begin{aligned} H &= H_0(\Pi_H(0, \mathbf{x}), \phi_H(0, \mathbf{x})) + V_{\text{int}}(\phi_H(0, \mathbf{x})) \\ &= H_0(\partial_0\phi_I(0, \mathbf{x}), \phi_I(0, \mathbf{x})) + V_{\text{int}}(\phi_I(0, \mathbf{x})) \end{aligned}$$

$$S_0 = T \exp \left\{ -i \int dt V_I(t) \right\}$$

z $V_I(t) = e^{iH_0t} V e^{-iH_0t}$; Pola $\phi_I(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0t} \phi_H(0, \mathbf{x}) e^{-iH_0t}$ mają rozkład na $a_\sigma(\mathbf{p}), a_\sigma^\dagger(\mathbf{p})$. Diagramy i reguły Feynmana jak poprzednio.

A co z poprawkami do linii zewnętrznych?

Inne zm kanoniczne: $\phi = Z^{1/2}\phi_{\text{ph}}, \Pi_{\text{ph}} = Z\partial_0\phi_{\text{ph}}$.

Nadal

$$[\phi_{\text{ph}}^H(t, \mathbf{x}), \Pi_{\text{ph}}^H(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Przejdźcie do obrazu oddziaływania

$$\phi_{\text{ph}}^H(0, \mathbf{x}) = \phi_I(0, \mathbf{x}) \quad \Pi_{\text{ph}}^H(0, \mathbf{x}) = \partial_0\phi_I(0, \mathbf{x})$$

daje

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I = & -\frac{1}{2}(Z - 1)\partial_\mu\phi_I\partial^\mu\phi_I + \frac{1}{2}\left(ZM^2 - M_{\text{ph}}^2\right)\phi_I^2 \\ & + \frac{\lambda}{4!}Z^2\phi_I^4 + \frac{1}{2}\left(Z^{-1} + Z - 2\right)\partial_0\phi_I\partial_0\phi_I. \end{aligned}$$

Kontrcślony takie by spełnić warunki (schemat “On Shell”). Morał: tylko jeden szczególny wybór zmiennych kanonicznych zgodny z założeniami (“operatory fizyczne”)

Jak się uwolnić od założenia o odpowiedniości $|\alpha_{in(out)}\rangle$ i $|\alpha_0\rangle$?

Najpierw pokazać że (wciąż w ramach założeń)

$$\begin{aligned} \langle \beta_0 | T \left[O_{l_1}(x_1) \dots O_{l_r}(x_r) \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right) \right] | \alpha_0 \rangle \\ = \langle \beta_{out} | T \left[O_{l_1}^H(x_1) \dots O_{l_r}^H(x_r) \right] | \alpha_{in} \rangle \end{aligned}$$

Potem że za podstawę QFT można przyjąć funkcje

$$G_{l_1 \dots l_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \left[O_{l_1}^H(x_1) \dots O_{l_n}^H(x_n) \right] | \Omega \rangle$$

wymagają tylko istnienia $|\Omega\rangle$; żadnych założeń czy są stany cząstkowe (i jak się mają do $|\alpha_0\rangle$ H_0).

Wzór z rachunku zaburzeń

$$\begin{aligned} \langle \Omega_0 | T \left[O_{l_1}(x_1) \dots O_{l_r}(x_r) \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right) \right] | \Omega_0 \rangle \\ = \langle \Omega_{out} | T \left[O_{l_1}^H(x_1) \dots O_{l_r}^H(x_r) \right] | \Omega_{in} \rangle \end{aligned}$$

nadal słuszny bo

$$|\Omega_{in(out)}\rangle = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} |\Omega_0\rangle = U_I(0, \mp\infty) |\Omega_0\rangle ,$$

wynika ze zwykłego rachunku zaburzeń (stany $|\Omega_0\rangle$ i $|\Omega_{in(out)}\rangle$ są jedynymi dyskretnymi stanami H_0 i H)

Wybór zmiennych kanonicznych **nieistotny** Można wziąć dowolne zmienne $\phi_R = Z^{1/2}\phi$ i dowolnie rozbić $M^2 = M_R^2 + \delta M^2$.

Wybór zmiennych kanonicznych **nieistotny** Można
wziąć dowolne zmienne $\phi_R = Z^{1/2}\phi$ i dowolnie
rozbić $M^2 = M_R^2 + \delta M^2$ (czyli H na H_0 i V).
operatory a i a^\dagger diagonalizują wydzielony H_0 ;
Z nich $\phi_I(x) = e^{iH_0t}\phi_R^H(0, \mathbf{x})e^{-iH_0t}$.

Rachunek zaburzeń:

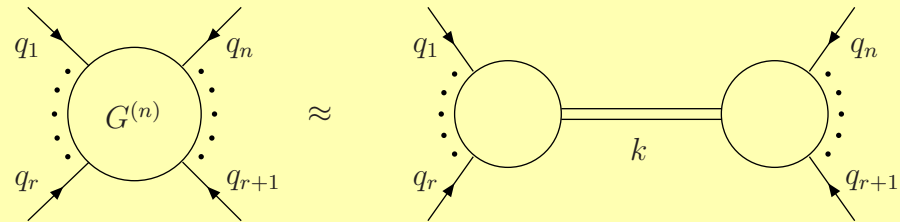
$$O_l^H(x) \equiv O_l(\phi^H(x), \partial) = O_l(Z^{1/2}\phi_R^H(x), \partial) \rightarrow O_l(Z^{1/2}\phi_I(x), \partial)$$

Operatory $O_l^H(x)$ dowolnie z(re)normalizowane

Wszystkie operatory tak samo dobre

Reszta - twierdzenie Wicka plus wzór

Żadnych problemów z liniami zewnętrznymi



Rysunek 3: Factorization of a pole of a Green's function.

Ale po co nam późniowe funkcje Greena? Z nich widmo cząstek (jeśli dana teoria je opisuje - konforemne np. nie!) i elementy macierzy S - przez **LSZ**.

$$\begin{aligned}
 G_c^{(n)}(q_n, \dots, q_1) &= FT \langle \Omega | T [O_n(x_n) \dots O_1(x_1)] | \Omega \rangle \\
 &\approx \frac{i}{p^2 - m_{\text{ph}}^2 + i0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_n + \dots + q_1) \\
 &\quad \times \sum_{\sigma} \mathcal{M}(q_n, \dots, q_{r+1} | \mathbf{p}\sigma) \mathcal{M}(\mathbf{p}\sigma | q_r, \dots, q_1)
 \end{aligned}$$

Dla funkcji dwupunktowej (propagatora)

$$G_{l_1 l_2}^{(2)}(p_1, p_2) \approx (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2) \sum_{\sigma} \langle \Omega | O_{l_1}(0) | \mathbf{p}_1 \sigma \rangle \\ \times \frac{i}{p_1^2 - m_{\text{ph}}^2 + i0} \langle \mathbf{p}_1 \sigma | O_{l_1}^{\dagger}(0) | \Omega \rangle .$$

Z relatywistycznej niezmienniczości

$$\langle \Omega | O_l(x) | \mathbf{p}_1 \sigma \rangle = \mathcal{Z}_O^{1/2} u_l(\mathbf{p}_1, \sigma) e^{-ip_1 \cdot x}$$

Czynnik \mathcal{Z}_O operatora O potrzebny do macierzy S Nie mylić ich z czynnikami Z pol elementarnych: odpowiednio wybierając Z (tj. schemat renorm) można zrobić $\mathcal{Z} = 1$ (czyli operatory ϕ_{ph}^H mają $\mathcal{Z} = 1$).

Macierz S z redukcji LSZ

Warunek asymptotyczny: dla $x^0 \rightarrow -\infty(+\infty)$

$$O_l(x) \longrightarrow \mathcal{Z}_O^{1/2} \phi_l^{\text{in(out)}}(x)$$

Sens: lokalność i faktoryzacja elementów maci!

Dwa razy faktoryzacja biegunów

$$G^{(n)}(q_n, \dots, q_1) \approx (2\pi)^4 \delta^{(4)}(-p'_n + q_{n-1} + \dots + q_2 + p_1) \sum_{\sigma'_n} \sum_{\sigma_1} \frac{i}{p_n'^2 - m_{\text{ph},n}^2 + i0} \mathcal{M}(\mathbf{p}'_n \sigma'_n | q_{n-1}, \dots, q_2 | \mathbf{p}_1 \sigma_1) \frac{i}{p_1^2 - m_{\text{ph},1}^2 + i0} \\ \times \langle \Omega | O_n(0) | \mathbf{p}'_n \sigma'_n \rangle \times \langle \mathbf{p}_1 \sigma_1 | O_1(0) | \Omega \rangle ,$$

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^4 \delta^{(4)}(-p'_n + q_{n-1} + \dots + q_2 + p_1) \\
& \quad \times \mathcal{M}(\mathbf{p}'_n \sigma'_n | q_{n-1}, \dots, q_2 | \mathbf{p}_1 \sigma_1) \\
& = \int d^4 x_{n-1} \dots \int d^4 x_2 e^{-i q_{n-1} x_{n-1}} \dots e^{-i q_2 x_2} \\
& \quad \langle \mathbf{p}'_n \sigma'_n | T[O_{n-1}(x_{n-1}) \dots O_2(x_2)] | \mathbf{p}_1 \sigma_1 \rangle.
\end{aligned}$$

Niech O_2 będzie zdolny anihilować cząstkę in o $\mathbf{p}_2 \sigma_2$. Rozpatrujemy wkład obszaru $x_{n-1}^0, \dots, x_3^0 > x_2^0$

$$\begin{aligned}
& \int d^4x_{n-1} \dots \int d^4x_2 e^{-iq_{n-1}x_{n-1}} \dots e^{-iq_2x_2} \\
& \Theta \left(\min(x_{n-1}^0, \dots, x_3^0) - x_2^0 \right) \int d\Gamma_{\mathbf{k}_1} \int d\Gamma_{\mathbf{k}_2} \sum_{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2} \\
& \langle \mathbf{p}'_n \sigma'_n | T[O_{n-1}(x_{n-1}) \dots O_3(x_3)] | (\mathbf{k}_1 \tilde{\sigma}_1, \mathbf{k}_2 \tilde{\sigma}_2)_{in} \rangle \\
& \times \langle (\mathbf{k}_1 \tilde{\sigma}_1, \mathbf{k}_2 \tilde{\sigma}_2)_{in} | O_2(x_2) | (\mathbf{p}_1 \sigma_1)_{in} \rangle + \text{reszta}.
\end{aligned}$$

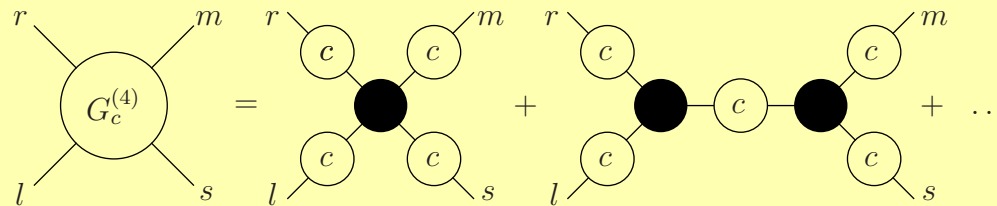
Biegun dla $p_2^2 \rightarrow m_{\text{ph } 2}^2$ od $x_2^0 \rightarrow -\infty$ a wtedy warunek asymptotyczny daje

$$\begin{aligned}
& \langle (\mathbf{k}_1 \tilde{\sigma}_1, \mathbf{k}_2 \tilde{\sigma}_2)_{in} | O_2(x_2) | (\mathbf{p}_1 \sigma_1)_{in} \rangle \rightarrow \\
& \langle (\mathbf{k}_1 \tilde{\sigma}_1)_{in} | (\mathbf{p}_1 \sigma_1)_{in} \rangle \times \langle (\mathbf{k}_2 \tilde{\sigma}_2)_{in} | O_2(x_2) | \Omega \rangle .
\end{aligned}$$

lokalność \implies faktoryzacja!

$$\begin{aligned}
G_c^{(n)}(-p'_n, \dots, -p'_{r+1}, p_1, \dots, p_r) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(-\sum p' + \sum p) \\
&\times \prod_{j=r+1}^n \left[\sum_{\sigma'_j} \frac{i \mathcal{Z}_{O_j}^{1/2}}{p_j'^2 - m_{\text{ph},j}^2 + i0} u(\mathbf{p}'_j, \sigma'_j) \right] \\
&\times \prod_{k=1}^r \left[\sum_{\sigma_k} u^*(\mathbf{p}_k, \sigma_k) \frac{i \mathcal{Z}_{O_k}^{1/2}}{p_k^2 - m_{\text{ph},k}^2 + i0} \right] \\
&(-i) \mathcal{M}(\mathbf{p}'_n \sigma'_n, \dots, \mathbf{p}_1 \sigma_1) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} &= \langle (\mathbf{p}'_n \sigma'_n, \dots, \mathbf{p}'_{r+1} \sigma'_{r+1})_{\text{out}} | (\mathbf{p}_1 \sigma_1, \dots, \mathbf{p}_r \sigma_r)_{\text{in}} \rangle_{\text{con}} \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(-\sum p' + \sum p) (-i) \mathcal{M}(\mathbf{p}'_n \sigma'_n, \dots, \mathbf{p}_1 \sigma_1) .
\end{aligned}$$



Rysunek 4:

$$\begin{aligned}
 G_c^{(n)}(q_n, \dots, q_1) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i q_i \right) \tilde{G}_c^{(2)}(q_1) \mathcal{N}_c(q_n, \dots, q_1) \\
 &\approx (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i q_i \right) \sum_{\sigma_1} i \tilde{\mathcal{Z}} \frac{u(\mathbf{p}_1, \sigma_1) \otimes u^*(\mathbf{p}_1, \sigma_1)}{p_1^2 - m_{\text{ph},1}^2 + i0} \mathcal{N}_c(q_n, \dots, p_1)
 \end{aligned}$$

- LSZ: ściśle nieperturbacyjne sformułowanie
- niema żadnej odpowiedniości pole z $\mathcal{L} \leftrightarrow$ cząstka!
(ten sam stan asympt z różnych operatorów,
cząstki nietrwale; stany związane)
- można używać dowolnego schematu ren. \implies
grupa renormalizacji
- zrenormalizowane operatory nie są w jakikolwiek sposób lepsze od “gołych”
- to ujęcie pozwala lepiej zrozumieć renormalizację operatorów złożonych i OPE
- i w ogóle całą strukturę logiczną RQFT!

Amen.