

Analiza I - 2013/14

Zadania domowe - seria 6

Zadanie 1. Obliczyć granicę ciągu:

a)
$$a_n = \frac{1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + \dots - 3n}{n^2 + n + 1}.$$

b)
$$b_n = \frac{\sqrt{1 + 2 + \dots + n}}{n}.$$

Zadanie 2. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu zadanego rekurencyjnie:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć granicę górną i granicę dolną ciągu:

a)
$$a_n = \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{2n\pi}{4}\right).$$

b)
$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

c)
$$c_n = (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right).$$

d)
$$d_n = 1 + (-1)^{n+1} \cdot 2 + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 3.$$

Zadanie 4. Niech $X \subseteq \mathbb{R}$. Zbadać, czy funkcja $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$d(x_1, x_2) = |x_1^2 - x_2^2|$$
 jest metryką w zbiorze X , jeśli.

a) $X = \mathbb{R}$.

b) $X = [0, +\infty[$.

W przypadku odpowiedzi pozytywnej opisać kulę $K(a, r)$ w zależności od $a \in X$, $r > 0$.