

# Analiza I - 2013/14

## Zadania domowe - seria 7

**Zadanie 1.** Dowieść, że dla każdych trzech podzbiorów  $A, B$  i  $C$  zbioru  $X$  zachodzi

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

**Zadanie 2.** Metodą indukcji matematycznej udowodnić, że każda liczba postaci  $5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$  jest liczbą naturalną, jest podzielna przez 41.

**Zadanie 3.** Dla  $k \in \mathbb{Z}_+$  wyznaczyć kresy zbioru  $A_k = \left\{ \frac{kn}{1+k+n} : n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$ .

Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbioru  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ .

**Zadanie 4.** Wyznaczyć przeciwobraz  $f^{-1}\{B\}$  zbioru  $B$  dla  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (xy, x + y)$  i  $B = \{1\} \times [0, 1]$ .

**Zadanie 5.** Wykazać zbieżność i wyznaczyć granicę ciągu:

$$a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{-2n^2 + n} \left( \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \right).$$

**Zadanie 6.** Niech  $\mathbb{R}'$  oznacza zbiór  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , gdzie  $-\infty$  i  $+\infty$  oznaczają dwa różne, nie należące do  $\mathbb{R}$  elementy i niech  $f : \mathbb{R}' \rightarrow [-1, 1]$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{dla } x = +\infty \\ -1 & \text{dla } x = -\infty \end{cases}$$

a) Pokazać, że  $f(x)$  jest bijekcją.

b) Sprawdzić, że  $d : \mathbb{R}' \times \mathbb{R}' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$  jest metryką w  $\mathbb{R}'$ .