

Analiza I - 2013/14

Zadania domowe - seria 8

Zadanie 1. Zbadać ciągłość funkcji (parametr $a \in \mathbb{R}$):

$$\text{a) } \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{dla } x \neq 1 \\ a & \text{dla } x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{b) } \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

$$\text{a) } \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zadanie 2. W przestrzeni metrycznej (X, d) zbadać, czy istnieje podzbiór, który może reprezentować jeden z 16 możliwych wyników testowania sytuacji:

O(twarty)D(omknięty)Z(warty)S(pójny)

(np. czy istnieje podzbiór $A \subseteq X$, który: (jest otwarty) i (jest domknięty) i (nie jest zwarty) i (nie jest spójny)),
jeśli

a) $X =]0, 1[\cup]2, +\infty[$, a metryka $d(x, y) = |x - y|$.

a) $X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$, a metryka $d(x, y) = |x - y|$.

Zadanie 3. Niech A, B będą podzbiórami przestrzeni metrycznej (X, d) . Zbadać, czy

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) $\text{int}(A \cup B) = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$.

c) $(A, B \text{ spójne oraz } A \cap B \text{ spójny}) \implies (A \cup B \text{ spójny})$.

Zadanie 4. Zbadać jednostajną ciągłość funkcji:

a) $]0, +\infty[\ni x \mapsto f(x) = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

b) $X \ni x \mapsto \rho_A(x) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$,
gdzie A jest podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d)
(funkcja ρ_A mierzy odległość punktu x od podzbioru $A \subseteq X$).

Opisać przeciwobraz $\{0\} : \rho_A^{-1}\{0\}$.

c) $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = x^3 \in \mathbb{R}$.

d) $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = |x| \in \mathbb{R}$.

e) $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + x^2} \in \mathbb{R}$.