

# Analiza I - 2013/14

## Zadania domowe - seria 11

**Zadanie 1.** Wykazać, że dla  $x \in ]1, +\infty[$  zachodzą nierówności:

$$2^{x-1} < \frac{3^x - 2^x}{x} < 3^{x-1}.$$

**Zadanie 2.** Zbadać, czy dla  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  spełnione są nierówności:

$$x^3 - \frac{1}{10}x^5 < 3 \sin x - 3x \cos x < x^3.$$

**Zadanie 3.** Obliczyć  $n$ -tą pochodną funkcji:  $f(x) = e^{ax} \sin x$ .

**Zadanie 4.** Wykazać, że dla  $n \in \mathbb{N}$  funkcja  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$  jest wielomianem stopnia  $n$ , posiadającym dokładnie  $n$  różnych pierwiastków rzeczywistych.

i) Sprawdzić, że  $y(x) = H_n(x)$  spełnia równanie różniczkowe:

$$y''(x) - 2x y'(x) + 2n y(x) = 0.$$

ii) Pokazać, że zachodzą związki rekurencyjne

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0.$$

(Wielomiany  $H_n(x)$  noszą nazwę wielomianów Hermite'a.)

Wskazówka: Wykorzystać tożsamość:  $(e^{-x^2})' + 2x e^{-x^2} = 0$ .

**Zadanie 5.** Znaleźć pierwszych kilka wyrazów rozwinięcia Taylora wokół  $x = 0$ , funkcji:

a)  $f(x) = \log \cos(ax)$ ,

b)  $f(x) = \arcsin x$ ,

c)  $f(x) = \operatorname{arsinh} x$ ,

d)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Zadanie 6.** Korzystając z rozwinięcia Taylora zbadać granicę  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , jeśli:

a)  $f(x) = \frac{\log(\cos ax)}{x^2 \log(\cos bx)}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ),

b)  $f(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{x \cdot (\cosh x - \cos x)}$ ,

c)  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \arcsin x} - \frac{1}{x \cdot \operatorname{arsinh} x}$ ,

d)  $f(x) = \left[ \operatorname{th} \left( \frac{1}{x} \right) \right]^{\frac{1}{x}}$ .

**Zadanie 7.** Dla funkcji

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) := (x^2 - 3)e^x \in \mathbb{R}$$

- i) podać miejsca zerowe,
- ii) opisać przedziały monotoniczności,
- iii) zbadać ekstrema i punkty przegięcia,
- iv) zbadać zachowanie w  $-\infty$  oraz  $+\infty$ ,
- v) naszkicować wykres.

**Zadanie 8.** Dla funkcji

$$\mathbb{R} \setminus \{-1\} \ni x \mapsto f(x) := \frac{e^x}{1+x} \in \mathbb{R}$$

- i) opisać przedziały monotoniczności,
- ii) zbadać ekstrema i punkty przegięcia,
- iii) zbadać zachowanie na końcach przedziałów  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, +\infty[$ ,
- iv) naszkicować wykres.

**Zadanie 9.** Znaleźć funkcje pierwotne :

a)  $\int (x^4 - 3x^2 + 6x + 5) dx;$

b)  $\int \cos^2 x dx;$

c)  $\int \frac{2x^2 + x - 1}{1 + x^2} dx;$

d)  $\int \frac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

d)  $\int \operatorname{tg} x dx;$

d)  $\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos^2 x} dx.$