

## RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE 2014/2015

Paweł Urbański  
Division of Mathematical Methods in Physics  
University of Warsaw  
Pasteura 5, 02-093 Warszawa

- (1) Wstęp
- (2) Równania pierwszego rzędu geometrycznie.
- (3) Twierdzenie Cauchy-Kowalewskiej.
- (4) Twierdzenie o jednoznaczności Holmgrena.
- (5) Rozchodzenie się nieciągłości.
- (6) Równanie falowe jako przykład równania hiperbolicznego.
- (7) Zagadnienie początkowe a hiperboliczność. Warunek Gårdinga
- (8) Równania paraboliczne na przykładzie równania przewodnictwa cieplnego.
- (9) Równania Laplace'a i Poissona klasycznie.
- (10) Fakty z analizy funkcjonalnej. Przestrzenie Sobolewa.
- (11) Zagadnienia eliptyczne metodą bezpośrednią.

### 1. Wstęp.

Równania różniczkowe na pewien obiekt geometryczny są warunkami na infinitezymalne (cokolwiek miałyby to znaczyć) 'części' obiektu. Na ogół obiektami tymi są odwzorowania. Weźmy dla przykładu odwzorowania  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ , gdzie  $M$  jest rozmaitością różniczkową. Infinitezymalnym kawałkiem krzywej jest wektor styczny jakiegoś rzędu. Zatem równaniem różniczkowym rzędu  $k$  na krzywej jest podzbiór  $D$   $k$ -tej wiązki stycznej  $T^k M$ . Krzywa  $\gamma$  jest rozwiązaniem równania, jeżeli dla każdego  $t \in \mathbb{R}$   $k$ -ty wektor styczny krzywej  $t^k \gamma(t)$  należy do  $D$ . Standardowe równanie dostajemy, jeżeli  $D = G^{-1}(0)$  dla pewnej funkcji  $G: T^k M \rightarrow \mathbb{R}$ . Zamiast krzywych, możemy rozpatrywać odwzorowania z jednowymiarowej rozmaitości  $N$  w  $M$ , lub po prostu jednowymiarowe podrozmaitości w  $M$ . Trzeba tylko wyjaśnić, co oznacza 'infinitezymalny kawałek'. Równania, które wymieniliśmy są równaniami różniczkowymi na obiekty jednowymiarowe. Takie równania różniczkowe nazywamy zwyczajnymi (ODE).

Równania różniczkowe cząstkowe (PDE) są równaniami na obiekty wielowymiarowe, na przykład na odwzorowania  $f: N \rightarrow M$ . W dalszej części zajmować się będziemy przypadkiem  $M = \mathbb{R}$ , czyli równaniami na funkcje.

### 2. Równania pierwszego rzędu.

**2.1. Bez wartości.** Niech  $Q$  będzie rozmaitością różniczkową. Pierwsze pochodne funkcji na  $Q$ , z pominięciem wartości, składają się na różniczkę funkcji. Zbiór wszystkich różniczek stanowi wiązki kostyczną  $T^*Q$ . Zatem równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu na funkcje na  $M$ , nie zawierające wartości funkcji, można interpretować jako podzbiór  $K \subset T^*Q$ . Funkcję  $f \in C^1(Q)$  nazywamy rozwiązaniem równania, jeżeli  $df(Q) \subset K$ . W dalszym ciągu zajmować się będziemy przypadkiem, gdy  $K$  jest podrozmaitością kowymiaru 1, poziomica  $h(p) = e$  pewnej funkcji różniczkowalnej  $h: Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Równanie przyjmuje więc znaną z mechaniki analitycznej postać równania Hamiltona-Jacobiego  $h(df) = e$ .

Opowieść geometryczną o takim równaniu zacznę od rozpoznania struktury wiązki kostycznej  $\pi_Q: T^*Q \rightarrow Q$ . Na  $T^*Q$  mamy kanoniczną 1-formę  $\theta_Q$  zadaną wzorem

$$\langle \theta_Q, v \rangle = \langle \tau_{T^*Q} v, T\pi_Q \rangle, \quad (1)$$

gdzie  $\tau_Q: \mathbb{T}Q \rightarrow Q$  jest kanonicznym rzutowaniem. Forma  $\theta_Q$  nazywana jest *formą Liouville'a*. Można ją zdefiniować trochę inaczej, wskazując funkcję na  $\mathbb{T}^*Q$  reprezentującą  $\theta(p)$  dla  $p \in \mathbb{T}^*Q$ . Niech para  $(q, f)$  reprezentuje  $p$ , tzn.  $p = d_q f$ . Wówczas

$$\theta_Q(p) = d_p \pi_Q^* f. \quad (2)$$

W lokalnym układzie współrzędnych forma Liouville'a zapisuje się wzorem

$$\theta_Q = p_\kappa dx^\kappa \quad (3)$$

(sumowanie po  $\kappa$ ).

Forma Liouville'a charakteryzowana jest przez następującą swoją własność.

**STWIERDZENIE 1.** Dla każdej jednoformy  $\alpha: Q \rightarrow \mathbb{T}^*Q$  mamy równość  $\alpha^* \theta_Q = \alpha$ .

**DOWÓD:** Niech  $v \in \mathbb{T}_q Q$ , wówczas  $\mathbb{T}\alpha(v) \in \mathbb{T}_{\alpha(q)} \mathbb{T}^*Q$  i

$$\langle \alpha^* \theta_Q, v \rangle = \langle \theta_Q, \mathbb{T}\alpha(v) \rangle = \langle \alpha(q), \mathbb{T}\pi_M(\mathbb{T}\alpha(v)) \rangle = \langle \alpha(q), v \rangle.$$

■

Różniczkę zewnętrzną  $d\theta_Q$  formy Liouville'a nazywamy *kanoniczną formą symplektyczną* i oznaczamy  $\omega_Q$ . W lokalnym układzie współrzędnych mamy

$$\omega_Q = dp_\kappa \wedge dx^\kappa. \quad (4)$$

W każdym punkcie wiązki kostycznej  $p \in \mathbb{T}^*Q$  forma  $\omega_Q$  wyznacza (tak jak każda forma dwuliniowa) odwzorowanie

$$\tilde{\omega}_Q(p): \mathbb{T}_p \mathbb{T}^*Q \rightarrow \mathbb{T}_p^* \mathbb{T}^*Q \quad (5)$$

wzorem

$$\langle \tilde{\omega}_Q(p)v, w \rangle = \omega_Q(v, w). \quad (6)$$

W adaptowanym układzie współrzędnych

$$v = \dot{x}^\kappa(v) \frac{\partial}{\partial x^\kappa} + \dot{p}_\lambda(v) \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \quad (7)$$

i z wyrażenia (4) dostajemy

$$\tilde{\omega}_Q(p)v = \dot{p}_\lambda(v) dx^\lambda - \dot{x}^\kappa(v) dp_\kappa. \quad (8)$$

Z wzoru tego wynika, że  $\tilde{\omega}_Q(p)$  jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych, a  $\tilde{\omega}_Q: \mathbb{T}\mathbb{T}^*Q \rightarrow \mathbb{T}^*\mathbb{T}^*Q$  izomorfizmem wiązek wektorowych.

Niech  $V \subset \mathbb{T}_p \mathbb{T}^*Q$  będzie podprzestrzenią wektorową. Przez  $V^\circ \subset \mathbb{T}^*\mathbb{T}^*P$  oznaczamy anihilator  $V$  (zbiór kowektorów zerujących się na podprzestrzeni  $V$ ).

**DEFINICJA 1.** Polarą symplektyczną  $V^\S$  podprzestrzeni  $V$  nazywamy podprzestrzeń  $\tilde{\omega}_Q^{-1}(V^\circ)$  przestrzeni  $\mathbb{T}_p \mathbb{T}^*Q$ .

Ze względu na usytuowanie  $V^\S$  względem  $V$  wyróżniamy następujące rodzaje podprzestrzeni:

- (1)  $V$  jest *izotropowa* jeżeli  $V^\S \supset V$ ,
- (2)  $V$  jest *koizotropowa* jeżeli  $V^\S \subset V$ ,
- (3)  $V$  jest *lagranżowska* jeżeli  $V^\S = V$ ,
- (4)  $V$  jest *symplektyczna* jeżeli  $V^\S \cap V = \{0\}$ .

Podrozmaitość  $N$  rozmaitości  $T^*Q$  nazywamy odpowiednio izotropową, koizotropową, lagranżowską lub symplektyczną, jeżeli w każdym punkcie jej przestrzeni styczna jest izotropowa, koizotropowa, lagranżowska lub symplektyczna.

Bezpośrednio z definicji wynika, że jeżeli  $m = \dim Q$ , to:

- (1)  $\dim N \leq m$  gdy  $N$  jest izotropowa,
- (2)  $\dim N \geq m$  gdy  $N$  jest koizotropowa,
- (3)  $\dim N = m$  gdy  $N$  jest lagranżowska,
- (4)  $\dim N$  jest liczbą parzystą gdy  $N$  jest symplektyczna.

Zauważmy, że podrozmaitość lagranżowska jest jednocześnie izotropowa i koizotropowa, a podrozmaitość wymiaru jeden jest zawsze izotropowa.

**STWIERDZENIE 2.** *Podrozmaitość  $N$  kowymiaru 1 jest zawsze koizotropowa.*

**DOWÓD:** Mamy pokazać, że  $(T_p N)^\S \subset T_p N$ . Przypuśćmy, że tak nie jest. Ponieważ  $N$  jest kowymiaru 1, to  $(T_p N)^\S$  jest wymiaru 1. Niech  $v$  będzie niezerowym wektorem z  $(T_p N)^\S$ . Oznacza to, że  $\omega(v, w) = 0$  dla każdego wektora  $w \in T_p N$ . Ale  $\omega(v, v) = 0$ , więc  $\omega(v, w) = 0$  dla każdego  $w \in T_p P$ , co oznacza, że  $\tilde{\omega}(p) = 0$ . Sprzeczność. ■

Podstawowy przykład podrozmaitości lagranżowskiej wynika z następującego stwierdzenia:

**STWIERDZENIE 3.** *Obraz jednoformy  $\alpha: Q \rightarrow T^*Q$  jest podrozmaitością lagranżowską wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha$  jest formą zamkniętą, tzn.  $d\alpha = 0$ .*

**DOWÓD:** Ze Stwierdzenia 1 mamy  $\alpha^* \theta_Q = \alpha$ , a z przemienności transportu formy z różniczkowaniem zewnętrznym

$$\alpha^* \omega_Q = \alpha^* d\theta_Q = d\alpha. \quad (9)$$

Z drugiej strony,  $\alpha(Q)$  jest podrozmaitością lagranżowską jeśli  $\alpha^* \omega_Q = 0$ , bo wymiar  $\alpha(Q)$  jest równy wymiarowi  $Q$ . ■

Zajmijmy się teraz jednym równaniem, więc zadanym podrozmaitością  $K \subset T^*Q$  o ko-wymiarze 1. Na mocy ostatniego stwierdzenia rozwiązanie równania zadaje podrozmaitość lagranżowską, zawartą w  $K$ . Rozwiązywanie równania możemy podzielić na dwa etapy:

- (a) znajdowanie podrozmaitości lagranżowskiej  $L$ , zawartej w  $K$ ,
- (b) szukanie 'potencjału' dla  $L$ .

Zajmijmy się etapem pierwszym. Podrozmaitość  $K$  jest koizotropowa (Stwierdzenie 2), więc  $(TK)^\S$  tworzy na  $K$  dystrybucję jednowymiarową. Lokalnie jest ona rozpięta przez gładkie pole wektorowe, wszędzie różne od zera, więc trajektorie tego pola zadają (lokalnie) foliację  $K$  jednowymiarowymi podrozmaitościami zwanymi *charakterystykami*  $K$ . Niech teraz  $L \subset K$  będzie podrozmaitością lagranżowską. Mamy dla  $p \in L$

$$T_p L = (T_p L)^\S \supset (T_p K)^\S,$$

więc dystrybucja charakterystyczna  $K$  jest, na  $L$ , styczna do  $L$ . Stąd charakterystyka  $K$ , przechodząca przez  $p \in L$ , jest zawarta w  $L$ . Możemy powiedzieć, że  $L$  jest 'utkana' z charakterystyk  $K$ . Podpowiada to następującą konstrukcję rozwiązania: Jeżeli mamy podrozmaitość izotropową  $C \subset K$  wymiaru  $m-1$  i transwersalną do charakterystyk, to podrozmaitość  $L$  możemy dostać wypuszczając z każdego punktu  $C$  charakterystykę  $K$ .

**Uwaga terminologiczna.** Matematycy często charakterystyki  $K$  nazywają *bicharakterystykami*, a charakterystykami ich rzuty na  $Q$ . My nazywać je będziemy  $Q$ -charakterystykami równania.  $Q$ -charakterystyki pochodzące od jednej podrozmaitości lagranżowskiej dają rodzinę zwaną polem charakterystyk (np. polem geodezyjnym). Bywa, że rodzina ta daje foliację  $Q$ .

Typowe zagadnienie: znaleźć rozwiązanie takie, że na zadanej podrozmaitości  $N \subset Q$  jest zadaną funkcją  $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ .

Rozwiązanie: Mamy kanoniczne rzutowanie  $\mathbb{T}_N^*Q \rightarrow \mathbb{T}^*N$  i szukamy podrozumności izotropowej  $C \subset K$  o wymiarze  $m - 1$  rzutuującej się na  $N$ . Następnie, metodą charakterystyk, uzupełniamy ją do podrozumności lagranżowskiej  $L$ , a potem znajdujemy na niej potencjał, na przykład poprzez odcałkowanie formy  $\theta_Q$  wzdłuż charakterystyk, z warunkiem początkowym  $g$  na  $C$ .

Rozpatrzmy dwie, najczęściej rozpatrywane sytuacje przy ogólnym założeniu, że kanoniczne rzutowanie  $\pi_Q: K \rightarrow Q$  jest surjektywną submersją, czyli rozwłóknieniem. Włókno tego rozwłóknienia w  $q \in Q$ , czyli przecięcie  $K \cap \mathbb{T}_q^*Q$  jest podrozumnością wymiaru  $m - 1$ .

- (1)  $\dim N = m - 1$  i włókno rzutowania  $\mathbb{T}_N^*Q \rightarrow \mathbb{T}^*N$  ma wymiar 1, zatem, w ogólnym położeniu,  $dg(N)$  podnosi się jednoznacznie do  $C \subset K$ .
- (2)  $N = \{q\}$  jest jednym punktem, więc  $C_q = K \cap \mathbb{T}_q^*Q$ . Pole  $Q$ -charakterystyk otrzymane z charakterystyk  $K$  wychodzących z  $C_q$  nazywane jest polem centralnym.

*Rozwiązaniem zupełnym* nazywamy rodzinę rozwiązań zadających foliację  $K$  podrozumnościami lagranżowskimi.

PRZYKŁAD 1.

**2.2. Z wartościami.** Pierwsze pochodne funkcji  $f$  na  $Q$ , z uwzględnieniem wartości, składają się na *element kontaktowy*, który możemy uważać za parę: różniczkę funkcji  $d_q f$  w punkcie  $q$  i jej wartość  $f(q)$ . Element kontaktowy funkcji  $f$  w punkcie  $q$  oznaczamy będziemy  $c_q f$ . Zbiór wszystkich elementów kontaktowych tworzy wiązkę kontaktową  $\mathbb{T}^*Q \times \mathbb{R}$ . Zatem równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu na funkcje na  $Q$ , zawierające wartości funkcji, można interpretować jako pozbiór  $K \subset \mathbb{T}^*Q \times \mathbb{R}$ . Funkcję  $f \in C^1(Q)$  nazywamy rozwiązaniem równania, jeżeli  $c f(Q) \subset K$ . W dalszym ciągu zajmować się będziemy przypadkiem, gdy  $K$  jest podrozumnością kowymiaru 1, poziomicą  $h(p) = 0$  pewnej funkcji różniczkowalnej  $h: \rightarrow M$ .

Podobnie jak poprzednio, można scharakteryzować podrozumności  $\mathbb{T}^*Q \times \mathbb{R}$ , będące obrazami  $c f(Q)$ . Niech  $r$  oznacza współrzędną w  $\mathbb{R}$ . Na  $\mathbb{T}^*Q \times \mathbb{R}$  mamy kanoniczną 1-formę  $\bar{\theta}_Q = dr - \theta_Q$ , zwaną *formą kontaktową*.

**STWIERDZENIE 4.** Cięcie  $\bar{\alpha}: Q \rightarrow \mathbb{T}^* \times \mathbb{R}$  jest postaci  $c f$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $(\bar{\alpha})^* \bar{\theta}_Q = 0$ .

**DOWÓD:** Jeżeli  $\bar{\alpha} = c f$ , czyli  $\bar{\alpha} = (df, f)$ , to (Stwierdzenie 1)

$$(\bar{\alpha})^* \bar{\theta}_Q = df - (df)^* \theta_Q = df - df = 0.$$

Z drugiej strony, niech  $\bar{\alpha} = (\alpha, f)$  i niech  $(\bar{\alpha})^* \bar{\theta}_Q = 0$ . Mamy wówczas (Stwierdzenie 1)

$$0 = (\bar{\alpha})^* \bar{\theta}_Q = df - \alpha^* \theta_Q = df - \alpha.$$

Formę  $\bar{\theta}_Q$  można uważać za formę powiązanie na rozwłóknieniu  $\mathbb{T}^*Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^*Q$ . W tej interpretacji, powyższe Stwierdzenie mówi, że  $\bar{\alpha} = c f$  dla pewnej funkcji  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\bar{\alpha}(Q)$  jest horyzontalnym podniesieniem podrozumności lagranżowskiej w  $\mathbb{T}^*Q$ . Oznaczmy przez  $H_{(p,r)}$  przestrzeń wektorów horyzontalnych w punkcie  $(p, r) \in \mathbb{T}^*Q \times \mathbb{R}$ , to znaczy

$$H_{(p,r)} = \{v \in \mathbb{T}_{(p,r)}(\mathbb{T}^*Q \times \mathbb{R}) : \langle \bar{\theta}_Q, v \rangle = 0\}.$$

W sytuacji typowej, rzut podprzestrzeni  $\mathbb{T}_{(p,r)}K \cap H_{(p,r)}$  na  $\mathbb{T}_p \mathbb{T}^*Q$  jest podprzestrzenią kowymiaru 1. Załóżmy, że jest tak dla każdego  $(p, r) \in K$ . Polara symplektyczna tej podprzestrzeni jest jej jednowymiarową podprzestrzenią. Jej podniesienie horyzontalne do  $(p, r)$  należy oczywiście do  $\mathbb{T}_{(p,r)}K \cap H_{(p,r)}$ . W ten sposób dostajemy na  $K$  jednowymiarową dystrybucję - *dystrybucję charakterystyczną*  $K$ . Podrozumności całkowite tej dystrybucji nazywamy *charakterystykami* równania  $K$ . Jak i w przypadku 'bez wartości' pokazujemy, że

jeżeli  $cf(Q) \subset K$ , to dystrybucja charakterystyczna jest styczna do  $cf(Q)$ , czyli rozwiązanie jest 'utkane' z charakterystyk.

Jak te konstrukcje wyglądają w przypadku  $K = h^{-1}(0)$ ? Niech  $(p, r) \in K$ , to

$$\mathbb{T}_{(p,r)}K = \{(v, \dot{r}): \langle dh, (v, \dot{r}) \rangle = 0\}, \quad H_{(p,r)} = \{(v, \dot{r}): \dot{r} = \langle p, \mathbb{T}\pi_Q(v) \rangle\}$$

i stąd

$$\mathbb{T}_{(p,r)}K \cap H_{(p,r)} = \{(v, \dot{r}): \langle dh, (v, \dot{r}) \rangle = 0, \quad \dot{r} = \langle p, \mathbb{T}\pi_Q(v) \rangle\}.$$

Zatem rzut  $W$  przecięcia  $\mathbb{T}_{(p,r)}K \cap H_{(p,r)}$  na  $\mathbb{T}_p\mathbb{T}^*Q$  jest podprzestrzenią

$$\begin{aligned} W &= \{v \in \mathbb{T}_p\mathbb{T}^*Q: \langle dh, (v, \langle p, \mathbb{T}\pi_Q(v) \rangle) \rangle = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{T}_p\mathbb{T}^*Q: \langle \frac{\partial h}{\partial p}, v \rangle + \frac{\partial h}{\partial r} \langle p, \mathbb{T}\pi_Q(v) \rangle = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{T}_p\mathbb{T}^*Q: \langle \frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial r} \theta_Q, v \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Anihilatorem  $W$  jest podprzestrzeń rozpięta kowektorem  $\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial r} \theta_Q$  któremu, poprzez formę symplektyczną, odpowiada pole  $X_h + \frac{\partial h}{\partial r} E_{\mathbb{T}^*Q}$ , gdzie  $E_{\mathbb{T}^*Q}$  jest polem Eulera wiązki ( $\mathbb{T}^*Q$  (wyjaśnienie poniżej).

Polem Eulera wiązki wektorowej  $\tau: F \rightarrow M$  nazywamy pole, którego wartość w punkcie  $f \in F$  jest wektorem stycznym, reprezentowanym krzywą  $t \mapsto f + tf$ . W lokalnym układzie współrzędnych  $(x^i, f^a)$ , zgodnym ze strukturą wiązki,  $E_F = \sum_a f^a \frac{\partial}{\partial f^a}$ .

Zatem, podniesiony poziomo wektor  $X_h + \frac{\partial h}{\partial r} E_{\mathbb{T}^*Q}$  dany jest wzorem

$$\bar{X}_h(p, r) = X_h + \frac{\partial h}{\partial r} E_{\mathbb{T}^*Q} + \langle p, \mathbb{T}\pi_Q X_h \rangle \frac{\partial}{\partial r}.$$

We współrzędnych,

$$\bar{X}_h = -\frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial h}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial h}{\partial r} p_i \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i} p_i \frac{\partial}{\partial r}$$

i stąd równanie charakterystyk

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= -\frac{\partial h}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial q^i} + \frac{\partial h}{\partial r} p_i \\ \frac{dr}{dt} &= -\frac{\partial h}{\partial p_i} p_i. \end{aligned}$$

### 3. Twierdzenie Cauchy-Kowalewskiej.

**3.1. Oznaczenia i podstawowe relacje.** Używać będziemy standardowych oznaczeń dla wielowskaźników i operatorów:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n), & |\alpha| &= \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \\ \alpha! &= \alpha_0! \alpha_1! \dots \alpha_n!, & \xi^\alpha &= \xi_0^{\alpha_0} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \\ D^\alpha &= D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, & \text{gdzie } D_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

W powyższych i poniższych wzorach  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Zachodzą wzory, będące łatwymi uogólnieniami znanych wzorów z Analizy I:

$$(1) \quad (x+y)^\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} x^\beta y^\gamma,$$

$$(2) \quad D^\alpha(f \cdot g) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} D^\beta f D^\gamma g,$$

$$(3) \quad \sum_{\alpha} x^\alpha = \frac{1}{(1-x_0)(1-x_1)\cdots(1-x_n)}, \quad |x_i| < 1,$$

$$(4) \quad \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha = (x_0 + x_1 + \cdots + x_n)^m$$

$$(5) \quad \sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha!}{\alpha!} x^\alpha = \frac{1}{1-x_0-x_1-\cdots-x_n}, \quad \text{przy } |x_0| + |x_1| + \cdots + |x_n| < 1.$$

**Zagadnienie do rozwiązania:** Znaleźć funkcję  $u = (u_1, \dots, u_N)$  na  $\mathbb{R}^{n+1}$ , o wartościach w  $\mathbb{R}^N$  taką, że

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha u = b, \quad \text{gdzie } A_\alpha(x) \text{ są macierzami } N \times N,$$

i spełniającą warunki początkowe na powierzchni  $n$ -wymiarowej  $S$ . Oznacza to, że dane są wartości pochodnych normalnych  $u, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}$  do powierzchni  $S$ .

Jeżeli  $S = \varphi^{-1}(0)$  dla regularnej funkcji  $\varphi$ , to  $k$ -ta pochodna normalna dana jest wzorem

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = |\eta|^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \eta^\alpha D^\alpha u, \quad \text{gdzie } \eta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (10)$$

**Idea rozwiązania:**

- (1) pokazuje się, że mając dane początkowe można wyznaczyć na  $S$  wszystkie pochodne funkcji spełniającej równanie,
- (2) z pochodnych tworzymy formalny szereg Taylora dla funkcji  $u$ ,
- (3) dowodzimy zbieżności szeregu,
- (4) pokazujemy, że otrzymana funkcja jest rozwiązaniem.

**3.2. Rozwiązania formalne.** Pokażemy najpierw, że dla funkcji zerującej się na  $S$  wraz z pochodnymi rzędu  $< k$ , pochodna rzędu  $k$  jest wyznaczona przez  $\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}$ .

Niech zatem  $D^\alpha u = 0$  na  $S = \varphi^{-1}(0)$ , dla  $|\alpha| < k$ . Oznacza to, że  $u$  można zapisać w postaci  $u(x) = \varphi^k(x)\gamma(x)$ . Stąd, dla  $x \in S$  i  $|\alpha| = k$  mamy

$$D^\alpha u(x) = k! \eta^\alpha(x) \gamma(x) \quad (11)$$

i

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \eta^\alpha(x) D^\alpha u(x) &= \gamma(x) \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \eta^{2\alpha}(x) \\ &= (\eta_0^2(x) + \cdots + \eta_n^2(x))^k \gamma(x) \\ &= |\eta(x)|^{2k} \gamma(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Porównując to wyrażenie z wzorem (10) na pochodną normalną, dostajemy

$$|\eta(x)|^k \gamma(x) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}(x), \quad (13)$$

co, razem z (11), daje związek

$$D^\alpha u(x) = k! \eta^\alpha(x) \gamma(x) = \left( \frac{1}{|\eta|} \eta(x) \right)^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}(x), \quad (14)$$

na powierzchni  $S$ .

**WNIOSEK 1.** Dla gładkiej funkcji  $u$  wszystkie jej pochodne rzędu  $\leq k$  na  $S$  są wyznaczone jednoznacznie przez pochodne normalne rzędu  $\leq k$ .

**DOWÓD:** Dla  $s = 0$  jest to fakt oczywisty. Załóżmy, że jest to prawda dla  $k - 1$ . Jeżeli  $u_1, u_2$  mają te same pochodne normalne rzędu  $\leq k - 1$ , to mają, z założenia indukcyjnego, te same wszystkie pochodne rzędu  $\leq k - 1$ . Zatem  $D^\alpha(u_1 - u_2) = 0$  na  $S$  i dla  $|\alpha| < k$ . Zatem, z udowodnionego powyżej wzoru (14), mamy dla  $|\alpha| = k$

$$D^\alpha(u_1 - u_2) = \left( \frac{1}{|\eta|} \eta \right)^\alpha \frac{\partial^k}{\partial \nu^k}(u_1 - u_2) = 0. \quad \blacksquare$$

Mając więc dane początkowe (dane Cauchy'ego) na powierzchni  $S$  dostaniemy informację o pochodnych rzędu  $m$  na  $S$ , jeżeli z warunku  $L(u) = 0$  wyznaczmy pochodną normalną rzędu  $m$ .

**DEFINICJA 2.** Powierzchnię  $S$  nazywamy *swobodną* w  $x$ , jeżeli warunek  $Lu = 0$  wraz z danymi początkowymi wyznacza  $\frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}(x)$ . W przeciwnym razie powierzchnię nazywamy *charakterystyczną* w  $x$ . Powierzchnia jest *swobodna (charakterystyczna)*, jeżeli jest swobodna (charakterystyczna) w każdym punkcie.

Jak rozstrzygnąć, czy powierzchnia jest swobodna?

Wprowadźmy macierz  $N \times N$

$$\Lambda(x, \xi) = m! \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) \xi^\alpha$$

i jej wyznacznik

$$P(x, \xi) = \det \Lambda(x, \xi),$$

zwany *formą charakterystyczną* operatora  $L$ .

**STWIERDZENIE 5.** Powierzchnia  $S$  jest charakterystyczna w  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $P(x, \eta(x)) = 0$ .

**DOWÓD:** Jeżeli  $u$  i  $v$  mają te same dane początkowe i  $L(u) = L(v)$ , to  $u - v = \varphi^m \gamma$  i, na mocy (14),

$$L(u) - L(v) = m! \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) \eta^\alpha \gamma = \Lambda(x, \eta(x)) \gamma.$$

Jeżeli  $S$  jest swobodna w  $x$ , to  $L(u) - L(v) = 0$  implikuje

$$0 = \frac{\partial^k}{\partial \nu^k} u(x) - \frac{\partial^k}{\partial \nu^k} v(x) = m! |\eta|^m(x) \gamma(x),$$

czyli  $\gamma(x) = 0$ , co jest równoważne  $\det \Lambda(x, \eta(x)) = P(x, \eta(x)) \neq 0$ . ■

**Ważna uwaga:** Jeżeli  $u$  i  $v$  mają te same dane początkowe na  $S$ , to  $v = u + \varphi^m \gamma$  i

$$L(v) = L(u) + \Lambda(x, \eta)\gamma. \quad (15)$$

Jeżeli więc  $S$  jest swobodna, to dla każdego  $L(v)$  można dobrać odpowiednie  $\gamma$ . Dane początkowe i wartość  $L$  na  $S$  są niezależne. Jeżeli  $S$  jest charakterystyczna, to  $\Lambda(x, \eta)$  nie jest surjekcją, więc wartości  $L(u)$  i  $L(v)$  nie są niezależne na  $S$ .

Podsumowując: na powierzchni swobodnej mamy, z danych Cauchy'ego, informację o wszystkich pochodnych do rzędu  $m$  funkcji spełniającej równanie  $L(u) = b$ .

Zastąpmy teraz operator  $L$  operatorem  $D_k^i L$ . Forma charakterystyczna dla tego operatora jest równa

$$\det \xi_k^i \Lambda(x, \xi) = \xi_k^{iN} P(x, \xi).$$

Jeżeli zatem  $\eta_k(x) \neq 0$  i  $S$  jest swobodna dla  $L$  w punkcie  $x$ , to  $S$  jest też swobodna w  $x$  dla  $D_k^i L$ . Ale dane początkowe (Cauchy'ego) dla  $D_k^i L$  wynikają z danych początkowych dla  $D_k^{i-1} L$  i z  $D_k^i L(u) = 0$  itd., dane początkowe dla  $D_k L$  wynikają z danych początkowych dla  $L$  i z  $L(u) = 0$ . Zatem dane początkowe na  $S$  i  $L(u) = 0$  wyznaczają wszystkie pochodne wszystkich rzędów w punkcie, w którym  $S$  jest swobodna.

**Uwaga.** Powyższe rozważania były przeprowadzane przy założeniu, że  $L$  jest operatorem liniowym. Dla większości wniosków nie jest to konieczne. Wystarczy quasi-liniowość, to znaczy współczynniki przy pochodnych rzędu  $m$  zależą od pochodnych  $u$  rzędu mniejszego. Różnica polega na tym, że komplikuje się pojęcie powierzchni swobodnej. To, czy powierzchnia jest swobodna może zależeć od danych początkowych.

**3.3. Twierdzenie Cauchy-Kowalewskiej.** Ponieważ rozwiązanie formalne jest szeregiem, jego zbieżność daje funkcję analityczną. Trudno oczekiwać, by funkcja analityczna była rozwiązaniem zagadnienia z danymi (współczynniki  $L$ , dane początkowe), które nie są analityczne. Stąd w twierdzeniu, do którego zmierzamy, założenia analityczności.

Założmy więc, że współczynniki operatora  $L$  są analityczne, powierzchnia  $S$  jest dana równaniem  $S = \{x : x_0 = \psi(x_1, \dots, x_n)\}$ , gdzie  $\psi$  jest funkcją analityczną i że dane początkowe są funkcjami analitycznymi. Dokonując analitycznej zamiany zmiennych  $x'_0 = x_0 - \psi(x_1, \dots, x_n)$ , sprowadzamy zagadnienie do przypadku  $S = \{x : x_0 = 0\}$ . Traktując pochodne rzędu  $< m$  jako zmienne niezależne, sprowadzamy układ do formy standardowej

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \sum_{i=1}^n A_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + B(x, u). \quad (16)$$

Jeżeli powierzchnia  $S$  jest swobodna dla  $L$ , to jest też swobodna dla (16) i dane początkowe dla  $L$  wyznaczają dane początkowe dla (16). Dane początkowe można rozszerzyć do funkcji analitycznej  $f$ . Możemy teraz zastąpić równanie na  $u$  równaniem na  $u - f$  z zerowymi danymi początkowymi. Niech więc  $u(0, x_1 \dots) = 0$  dla równania (16) zapisanego we współrzędnych

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_0} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N a_{ijk}(x, u) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + b_j(x, u), \quad (17)$$

gdzie  $a_{ijk}$ ,  $b_j$  są funkcjami analitycznymi. Zerowe dane początkowe implikują, że na  $S$  ( $D$  jest różniczkowaniem po  $x$ ,  $\delta$  po  $u$ )

$$D^\alpha u_l = P_{\alpha, l}(D^\gamma \delta^\beta a_{ijk}, D^\gamma \delta^\beta b_j), \quad (18)$$

gdzie  $P_{\alpha, l}$  są wielomianami o dodatnich współczynnikach. Dla przykładu: na  $S$

$$D_0 u_l = b_l, \quad D_0^2 u_l = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N a_{ilk} D_i b_k + D_0 b_l + \sum_{k=1}^N \delta_k b_l b_k.$$



Mamy formalne rozwiązanie w punkcie  $x = 0$

$$u_j(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (D^{\alpha} u_j(0)) x^{\alpha}. \quad (19)$$

Pierwsze pytanie o zbieżność szeregu. By ją wykazać, potrzebne jest szacowanie wyrazów szeregu.

Podstawowa obserwacja: jeżeli w równaniu (17) współczynniki  $a_{ijk}$ ,  $b_j$  zastąpimy innymi, np.  $\bar{a}_{ijk}$ ,  $\bar{b}_j$  i takimi, że

$$|D^{\gamma} \delta^{\beta} a_{ijk}(0)| \leq D^{\gamma} \delta^{\beta} \bar{a}_{ijk}(0), \quad |D^{\gamma} \delta^{\beta} b_j| \leq D^{\gamma} \delta^{\beta} \bar{b}_j \quad (20)$$

to, ponieważ współczynniki wielomianów  $P_{\alpha,l}$  są dodatnie, dostajemy szacowanie

$$\begin{aligned} |D^{\alpha} u_l(0)| &= |P_{\alpha,l}(D^{\gamma} \delta^{\beta} a_{ijk}(0), D^{\gamma} \delta^{\beta} b_j(0))| \\ &\leq P_{\alpha,l}(D^{\gamma} \delta^{\beta} \bar{a}_{ijk}(0), D^{\gamma} \delta^{\beta} \bar{b}_j(0)) = D^{\alpha} \bar{u}_l(0) \end{aligned} \quad (21)$$

i ze zbieżności szeregu  $\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (D^{\alpha} \bar{u}_j(0)) x^{\alpha}$  wnioskujemy o zbieżności szeregu (19). Szukamy więc odpowiednich  $\bar{a}_{ijk}$ ,  $\bar{b}_j$ . Najpierw ogólna uwaga. Jeżeli mamy szereg zbieżny  $F(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$ , to z jednostajnej ograniczoności wyrazów szeregu w kuli  $|x| \leq r$  wynika szacowanie

$$|c_{\alpha}| \leq Mr^{-|\alpha|} \leq \frac{|\alpha!|}{\alpha!} Mr^{-|\alpha|} \quad (22)$$

Stąd

$$\begin{aligned} F \ll \sum_{\alpha} Mr^{-|\alpha|} x^{\alpha} &= \frac{Mr^{n+1}}{(r-x_0)(r-x_1)\cdots(r-x_n)} \\ &\ll \sum_{\alpha} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} Mr^{-|\alpha|} x^{\alpha} = \frac{Mr}{r-x_0-x_1-\cdots-x_n}, \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie relacja  $\sum c_{\alpha} x^{\alpha} \ll \sum \bar{c}_{\alpha} x^{\alpha}$  oznacza  $|c_{\alpha}| \leq \bar{c}_{\alpha}$  dla wszystkich  $\alpha$ .

Biorąc jako  $F$  szeregi funkcji  $a_{ijk}$  i  $b_j$  dostajemy, że dla pewnych  $M$  i  $r$  zachodzą w obszarze  $|x| \leq r$ ,  $|u| \leq r$  nierówności

$$\begin{aligned} a_{ijk}(x, u) &\ll \frac{Mr^2}{(r-x_0)(r-x_1-\cdots-x_n-u_1-\cdots-u_N)} \\ b_j(x, u) &\ll \frac{Mnr^2}{(r-x_0)(r-x_1-\cdots-x_n-u_1-\cdots-u_N)}, \end{aligned} \quad (24)$$

zatem zagadnienie początkowe dla równania (17) majoryzuje się przez zagadnienie

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_0} = \frac{Mr^2}{(r-x_0)(r-x_1-\cdots-x_n-v_1-\cdots-v_N)} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + n \right)$$

z warunkiem początkowym  $v_j(0, \dots) = 0$ . Ma ono rozwiązanie postaci

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_N = \frac{1}{N} (w(s, t) - s), \quad \text{gdzie } s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad t = x_0,$$

a funkcja  $w$  spełnia równanie

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{Mr^2 n N}{(r-w)(r-t)} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad w(s, 0) = s. \quad (25)$$

Równanie (25) rozwiązuje się explicite, np. metodą charakterystyk, i pokazuje się, że rozwiązanie jest funkcją analityczną. Pozostaje do sprawdzenia, że funkcja dana szeregiem (19) jest rozwiązaniem, co sprawdza się bezpośrednim, acz uciążliwym, rachunkiem.

#### 4. Twierdzenie o jednoznaczności Holmgrena.

Udowodnimy podstawowe twierdzenie o jednoznaczności. Oczywiście, z Twierdzenia Cauchy-Kowalewskiej wynika jednoznaczność analitycznego rozwiązania zagadnienie początkowego w otoczeniu powierzchni swobodnej. Tu pokażemy, że nie ma innych rozwiązań różniczkowalnych w przypadku równań liniowych.

**TWIERDZENIE 1 (HOLMGREN).** *Zagadnienie Cauchy'ego dla liniowego układu równań ze współczynnikami analitycznymi i gładkimi danymi początkowymi na swobodnej powierzchni analitycznej  $S$  ma nie więcej niż jedno rozwiązanie w otoczeniu  $S$ .*

**Przypomnienie z analizy funkcjonalnej.** Jeżeli mamy odwzorowanie liniowe, ciągłe  $F: X \rightarrow Y$ , to  $(\ker F)^\circ$  jest równe domknięciu obrazu odwzorowania sprzężonego  $F^*: Y^* \rightarrow X^*$ . Zatem, by stwierdzić trywialność jądra  $F$ , wystarczy pokazać, że dla gęstego podzbioru w  $X^*$  równanie  $F^*(x) = f$  ma rozwiązanie.

Zastosujemy ten mechanizm do dowodu jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego. Niech  $L = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha$ , gdzie  $A_\alpha$  są macierzami  $N \times N$  z analitycznymi, rzeczywistymi, elementami macierzowymi. Formalnie sprzężonym operatorem nazywamy operator

$$L^* = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha^T(x).$$

Niech teraz  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  będzie ograniczonym obszarem ze zwartym brzegiem  $\partial\Omega$ . Załóżmy, że  $\partial\Omega = S' \cup S''$ , gdzie  $S', S''$  są spójne i  $S' \cap S'' = \partial S' = \partial S''$ . Niech  $X$  będzie przestrzenią funkcji na  $\Omega$  z zerowymi danymi początkowymi na  $S'$ , a  $Y$  z zerowymi danymi początkowymi na  $S''$ . Całkując przez części, dostajemy dla  $u \in X$  i  $v \in Y$

$$\int_{\Omega} (v | Lu) = \int_{\Omega} (L^*v | u). \quad (26)$$

Jeżeli więc zbiór  $\{L^*v\}$  jest gęsty w  $L^2(\Omega)$ , to równość  $L(u) = 0$  implikuje

$$0 = \int_{\Omega} (v | L(u)) = \int_{\Omega} (L^*(v) | u) \quad \text{i stąd} \quad u = 0.$$

Sprowadziliśmy więc problem jednoznaczności zagadnienia początkowego w  $\Omega$  z danymi na  $S'$  do problemu istnienia w zagadnieniu początkowym dla  $L^*$  z zerowymi danymi na  $S''$  (problem sprzężony). Do dyspozycji mamy tylko twierdzenie Cauchy-Kowalewskiej, które ma charakter lokalny. Wynika z niego, że dla zwartej powierzchni swobodnej istnieje jej otoczenie, w którym istnieje rozwiązanie dla konkretnego (analitycznego) zagadnienia początkowego. Otoczenie to a priori zależy od powierzchni i od danych Cauchy'ego.

Z tym problemem radzimy sobie w sposób następujący:

Najpierw ogólna uwaga: wielomian charakterystyczny dla  $L$  jest równy wielomianowi charakterystycznemu dla  $L^*$ , więc powierzchnia swobodna dla  $L$  jest powierzchnią swobodną dla  $L^*$ . Załóżmy teraz, że powierzchnie  $S', S''$  są swobodne i że możemy w sposób analityczny zdeformować (zachowując brzeg) jedną w drugą. Oznacza to, że istnieje funkcja analityczna  $\varphi$  od argumentów  $x$  i  $\lambda \in [0, a]$  taka, że  $S_\lambda = \{x: \varphi(x, \lambda) = 0\}$  jest powierzchnią swobodną dla każdego  $\lambda$ ,  $S_0 = S'$  i  $S'' = S_a$ . Przypuśćmy, że udowodniliśmy następujący lemat:

**LEMAT 1.** *Istnieje  $\varepsilon > 0$  takie, że dla każdej pary  $\lambda, \mu$  spełniającej warunek  $0 \leq \lambda < \mu \leq a$ ,  $\mu - \lambda < \varepsilon$  zagadnienie  $L^*v = w$  w  $\Omega_{\lambda\mu}$  (obszar, którego brzegiem jest  $S_\lambda \cup S_\mu$ ) z zerowymi danymi Cauchy'ego na  $S_\mu$  i  $w$  ze zbioru gęstego w przestrzeni funkcji ciągłych na  $\Omega_{\lambda\mu}$ , ma rozwiązanie.*

Z lematu tego wynika, że jeżeli  $L(u) = 0$  w  $\Omega$ , to  $u = 0$  w obszarze  $\Omega_{0\lambda_1}$ , gdzie  $\lambda_1 < \varepsilon$ . Zatem  $u$  ma zerowe dane początkowe na  $S_{\lambda_1}$ . Powtarzając to rozumowanie dla  $\Omega_{\lambda_1, \lambda_2}$  dostajemy, że  $u = 0$  również w  $\Omega_{\lambda_1, \lambda_2}$ . Po skończonej liczbie kroków dostaniemy, że  $u = 0$  w całym  $\Omega$ . Wystarczy zatem udowodnić lemat.

**DOWÓD LEMATU:** Załóżmy, że mamy rodzinę funkcji  $\{w\}$ , rozpinającą zbiór gęsty i parametryzowaną zbiorem zwartym parametrów  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ ,  $|\xi| \leq 1$ . Równanie  $L^*v = w(\cdot, \xi)$  traktujemy jako równanie na funkcję od  $2n + 3$  zmiennych  $(x, \lambda, \xi)$ . Nie zawiera ono różniczkowań po  $\xi$  i  $\lambda$ , więc powierzchnia  $\varphi(x, \lambda) = 0$  jest swobodna, bo każda  $S_\lambda$  jest swobodna dla  $L^*$ . Zbiór  $\tilde{S} = \{x \in S_\lambda, 0 \leq \lambda \leq a, |\xi| \leq 1\}$  jest zwarty, więc z twierdzenia

Cauchy-Kowalewskiej istnieje rozwiązanie w otoczeniu  $\tilde{S}$ , czyli istnieje  $\delta > 0$  takie, że dla dowolnych  $0 \leq \lambda \leq a$  i  $|\xi| \leq 1$  mamy rozwiązanie  $v(x, \lambda, \xi)$  zagadnienia  $L^*v(x) = w(x, \xi)$  z jednorodnymi danymi początkowymi na  $S_\lambda$ , w  $\delta$ -otoczeniu  $S_\lambda$ . Stąd wynika istnienie  $\varepsilon$ . Pozostaje wskazać rodzinę  $\{w\}$ . Wiemy, że wielomiany tworzą zbiór gęsty w  $\Omega$ , więc wystarczy umieć przybliżać jednomiany kombinacją funkcji z rodziny  $\{w\}$ . Wybierzmy  $w(x, \xi) = e^{x\xi}$ . Iloczyn funkcji z tej rodziny, dla małych parametrów  $\xi$  też do niej należy, więc funkcja

$$\prod_{k=0}^n \left( \frac{e^{\xi_k x_k} - 1}{\xi_k} \right)^\alpha$$

należy do przestrzeni rozpiętej przez  $\{w\}$  dla małych  $\xi$ . Mamy granicę

$$x^\alpha = \lim_{\xi \rightarrow 0} \prod_{k=0}^n \left( \frac{e^{\xi_k x_k} - 1}{\xi_k} \right)^\alpha,$$

czyli jednomiany leżą w domknięciu podprzestrzeni rozpiętej przez  $\{w\}$ . To kończy dowód. ■

## 5. Rozchodzenie się nieciągłości.

Jak i w poprzedniej sekcji, zajmujemy się operatorem liniowym

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha$$

w obszarze  $\Omega$ . Niech  $S = \varphi^{-1}(0)$  będzie regularną powierzchnią, dzielącą obszar  $\Omega$  na dwie części  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ .

**5.1. Pomocnicze operacje.** Zdefiniujmy ciąg operatorów ( $\varphi$  traktujemy jak operator zerowego rzędu:  $u \mapsto \varphi u$ ):

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= L \\ L^{(1)} &= [L, \varphi] = L\varphi - \varphi L \\ L^{(k+1)} &= [L^{(k)}, \varphi] = L^{(k)}\varphi - \varphi L^{(k)} \end{aligned} \quad (27)$$

Jeżeli  $L$  jest operatorem rzędu  $m$ , to  $[L, \varphi]$  jest rzędu  $m - 1$ , więc  $L^{(m)}$  jest rzędu zerowego i  $L^{(m+1)} = 0$ . Łatwo sprawdzić (np indukcyjnie), że mamy równości:

$$\begin{aligned} L^{(k)} &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{k!}{r!(k-r)!} \varphi^r L \varphi^{k-r}, \\ L \varphi^k &= \sum_{r=0}^k \frac{k!}{r!(k-r)!} \varphi^{k-r} L^{(r)}, \\ (L_1 L_2)^{(k)} &= \sum_{r=0}^k \frac{k!}{r!(k-r)!} L_1^{(r)} L_2^{(k-r)}. \end{aligned} \quad (28)$$

W szczególności, jeżeli  $L_i$  jest rzędu  $m_i$ , to

$$(L_1 L_2)^{(m_1+m_2)} = \frac{(m_1+m_2)!}{m_1! m_2!} L_1^{(m_1)} L_2^{(m_2)} \quad (29)$$

i ogólnie,

$$(L_1 L_2 \dots L_k)^{(m_1+m_2+\dots+m_k)} = \frac{(m_1+m_2+\dots+m_k)!}{m_1! m_2! \dots m_k!} L_1^{(m_1)} L_2^{(m_2)} \dots L_k^{(m_k)}. \quad (30)$$

Jeeli zastosujemy ostatni wzór do operatora  $D^\alpha = D_0^{\alpha_0} \cdots D_n^{\alpha_n}$ , to dostaniemy

$$(D^\alpha)^{(|\alpha|)} = |\alpha|!(D_0^{(1)})^{\alpha_0} \cdots (D_n^{(1)})^{\alpha_n} = |\alpha|!\eta_0^{\alpha_0} \cdots \eta_n^{\alpha_n} = |\alpha|!\eta^\alpha,$$

gdzie  $\eta_i = D_i\varphi$ , i stąd

$$L^{(m)} = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha (D^\alpha)^{(m)} = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (D^\alpha)^{(m)} = m! \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha \eta^\alpha = \Lambda(x, \eta(x)). \quad (31)$$

**5.2. Nieciągłości.** Przypuśćmy, że mamy w  $\Omega$  dwie funkcje  $u_1, u_2$ , spełniające  $Lu_i = 0$ . Z tych funkcji budujemy trzecią funkcją  $u$ , kładąc  $u = u_i$  na  $\Omega_i$ . Pytamy się o możliwe nieciągłości tak zbudowanej funkcji. Dokładniej: zakładając będziemy, że  $u_1$  i  $u_2$  mają takie same dane Cauchy'ego na  $S$ , więc nieciągłość może się pojawić w pochodnych rzędu  $m$ . Gdyby  $S$  była powierzchnią swobodną, to dane Cauchy'ego wyznaczałyby wszystkie pochodne, więc nieciągłość jest możliwa tylko w przypadku powierzchni charakterystycznej.  $S$  jest charakterystyczna, jeżeli na  $S$  macierz charakterystyczne  $\Lambda(x, \eta(x))$  jest osobiwa (Stwierdzenie 5). Zakładając będziemy, że jej rząd jest, na całym  $S$ , równy  $N - 1$ .

Ponieważ  $u_1$  i  $u_2$  mają na  $S$  te same pochodne do rzędu  $m - 1$ , to  $u_1 - u_2 = \varphi^m \gamma$  ( $\gamma$  jest funkcją o wartościach w  $\mathbb{R}^N$ ) i na  $S$  mamy równość (dla  $|\alpha| = m$ )

$$D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2 = m! \eta^\alpha \gamma$$

i

$$0 = L(u_1) - L(u_2) = \Lambda(x, \eta(x)) \gamma(x).$$

Ponieważ  $\Lambda(x, \eta(x))$  ma rząd  $N - 1$ , jego jądro jest, w każdym punkcie  $S$ , wymiaru 1. Niech  $C(x)$  będzie wektorem bazowym jądra macierzy  $\Lambda(x, \eta(x))$ . Mamy zatem  $\gamma(x) = \lambda(x)C(x)$  na  $S$  i przedłużmy  $C, \lambda$  na otoczenie  $S$ . Równość  $\gamma - \lambda C = 0$  na  $S$  implikuje  $\gamma - \lambda C = \varphi E$ . Zatem

$$u_1 - u_2 = \varphi^m \lambda C + \varphi^{m+1} E \quad (32)$$

w otoczeniu  $S$ . Znajomość funkcji rzeczywistej  $\lambda$  na  $S$  oznacza znajomość skoku pochodnych rzędu  $m$  wzdłuż  $S$ . Szukamy zatem równania, jakie winna spełniać na  $S$  funkcja  $\lambda$ . Mamy z (32), dla każdego  $i$ ,

$$0 = D_i L(u_1) - D_i L(u_2) = D_i L(u_1 - u_2) = D_i L(\varphi^m \lambda C) + D_i L(\varphi^{m+1} E). \quad (33)$$

Korzystając z wzorów (28), dostajemy na  $S$

$$D_i L \varphi^m = (D_i L)^{(m)}, \quad D_i L \varphi^{m+1} = (D_i L)^{(m+1)}$$

i

$$\begin{aligned} 0 &= (D_i L)^{(m)}(\lambda C) + (D_i L)^{(m+1)}(E) \\ &= D_i L^{(m)}(\lambda C) + m D_i^{(1)} L^{(m-1)}(\lambda C) + (m+1) D_i^{(1)} L^{(m)}(E) \\ &= D_i L^{(m)}(\lambda C) + m \eta_i L^{(m-1)}(\lambda C) + (m+1) \eta_i L^{(m)}(E). \end{aligned} \quad (34)$$

Macierz  $\Lambda(x, \eta(x))$  ma rząd  $N - 1$ , więc jej transponowana też. Możemy wybrać funkcję  $\Gamma$  na  $S$  taką, że  $\Gamma(x)$  jest wektorem bazowym jądra macierzy  $(\Lambda(x, \eta(x)))^\top$ , czyli  $\Gamma^\top L^{(m)} = 0$ . Mamy stąd

$$0 = \sum_i \eta_i \Gamma^\top D_i L^{(m)}(\lambda C) + m \left( \sum_i \eta_i^2 \right) \Gamma^\top L^{(m-1)}(\lambda C). \quad (35)$$

jest to równanie liniowe pierwszego rzędu na  $\lambda$ , ale tylko na  $S$ . Wystarczy teraz sprawdzić, że zawiera tylko pochodne w kierunku stycznym do  $S$ , co możemy zrobić wykazując, że funkcja  $\varphi$  spełnia na  $S$  równanie (35). Istotnie,

$$\begin{aligned}
& \sum_i \eta_i \Gamma^\top D_i L^{(m)}(\varphi C) + m \left( \sum_i \eta_i^2 \right) \Gamma^\top L^{(m-1)}(\varphi C) \\
&= \sum_i \eta_i \Gamma^\top D_i (\varphi \Lambda(x, \eta(x))(C)) + m \left( \sum_i \eta_i^2 \right) \Gamma^\top \left( L^{(m)}(C) + \varphi L^{(m-1)}(\lambda C) \right) \\
&= \sum_i \eta_i^2 \Gamma^\top \Lambda(x, \eta(x))(C) + \sum_i \eta_i \varphi \Gamma^\top D_i (\Lambda(x, \eta(x))(C)) + m \left( \sum_i \eta_i^2 \right) \Gamma^\top (\varphi \Lambda(x, \eta(x))(C)) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{36}$$

## 6. Równanie falowe.

**6.1. Jednowymiarowe równanie falowe.** Dla jednowymiarowej przestrzeni operator falowy wygląda tak:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Stąd równość

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0$$

oznacza, że

$$u(x, t) = \alpha(x + ct) + \beta(x - ct), \tag{37}$$

gdzie  $\alpha, \beta$  są dowolnymi funkcjami, dwukrotnie różniczkowalnymi. Szukamy rozwiązania, spełniającego warunki początkowe

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

czyli

$$\alpha(x) + \beta(x) = f(x), \quad c\alpha'(x) - c\beta'(x) = g(x).$$

Stąd

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(x) dx, \quad \beta(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(x) dx$$

i

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x) dx. \tag{38}$$

Niech teraz punkty  $A, B, C, D$  będą wierzchołkami równoległoboku utworzonego przez charakterystyki równania, czyli

$$\begin{aligned}
x_A - ct_A &= x_D - ct_D & x_A + ct_A &= x_B + ct_B \\
x_B - ct_B &= x_C - ct_C & x_B + ct_B &= x_D + ct_D.
\end{aligned}$$

Jeżeli funkcja  $u$  jest postaci (37), to dostajemy tożsamość

$$u(A) + u(C) = u(B) = u(D). \tag{39}$$

I na odwrót, jeżeli  $u$  spełnia (39) dla każdego równoległoboku charakterystycznego i jest dwukrotnie różniczkowalna, to spełnia też równanie falowe. Zatem funkcję, która nie jest dwukrotnie różniczkowalna, ale spełnia (39) może być uważana za uogólnione (słabe) rozwiązanie równania falowego.

Tożsamość równoległoboku (39) pozwala łatwo rozwiązywać zagadnienie mieszane:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0 \quad \text{w obszarze } 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

z warunkami brzegowo-początkowymi

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq L, \quad u(0, t) = a(t), \quad u(L, 0) = b(t).$$

Założyć należy zgodność tych warunków, czyli

$$a(0) = f(0), \quad b(0) = f(L), \quad a'(0) = g(0), \quad b'(0) = g(L).$$

W obszarze I zdefiniowanym nierównościami  $0 \leq t \leq \frac{L}{2c}$ ,  $ct \leq L - ct$  stosujemy wzór (38). W obszarze II zdefiniowanym nierównościami  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ ,  $\frac{x}{c} \leq t \leq \frac{L-x}{c}$  stosujemy najpierw tożsamość równoległoboku  $A = (x, t)$ ,  $B = (\frac{x+ct}{2}, \frac{x+ct}{2c})$ ,  $C = (\frac{-x+ct}{2}, \frac{-x+ct}{2c})$ ,  $D = (0, \frac{ct-x}{c})$ :

$$u(x, t) = a\left(t - \frac{x}{c}\right) + u\left(\frac{x+ct}{2}, \frac{x+ct}{2c}\right) - u\left(\frac{ct-x}{c}, \frac{ct-x}{c}\right)$$

a następnie wzór (38)

$$\begin{aligned} u\left(\frac{x+ct}{2}, \frac{x+ct}{2c}\right) &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(0)) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(x) dx \\ u\left(\frac{-x+ct}{2}, \frac{-x+ct}{2c}\right) &= \frac{1}{2}(f(-x+ct) + f(0)) + \frac{1}{2c} \int_0^{-x+ct} g(x) dx \end{aligned}$$

a stąd

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) - f(-x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{-x+ct}^{x+ct} g(x) dx$$

i podobnie dla pozostałych obszarów ograniczonych przez charakterystyki.

**6.2. Metoda średnich sferycznych.** Dla funkcji  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiujemy nową funkcję  $M_h$  średnich sferycznych:

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x+r\xi) dS_\xi \quad (40)$$

Druga całka w (40) ma sens dla dowolnego, nie tylko dodatniego,  $r$ , więc zadaje funkcję na całym  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ . Funkcja ta jest parzysta od argumentu  $r$ :  $M_h(x, -r) = M_h(x, r)$ . Jeżeli  $h$  jest klasy  $C^k$ , to również  $M_h$  jest klasy  $C^k$  (twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki). Mamy (tw. Gaussa)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \sum_i h_{x_i}(x+r\xi) \xi_i dS_\xi \\ &= \frac{r}{\omega_n} \int_{|\xi| \leq 1} \Delta_x h(x+r\xi) d\xi \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \Delta_x \int_{|y-x| \leq r} h(y) dy \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \Delta_x \int_0^r d\rho \int_{|y-x|=\rho} h(y) dS_y \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \Delta_x \int_0^r \omega_n \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho \end{aligned} \quad (41)$$

i stąd

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) \right) = \Delta_x r^{n-1} M_h(x, r), \quad (42)$$

czyli średnie sferyczne dowolnej funkcji  $h$  spełniają równanie

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(x, r) = \Delta_x M_h(x, r), \quad (43)$$

z warunkami początkowymi  $M_h(x, 0) = h(x)$ ,  $\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, 0) = 0$  (funkcja  $M_h$  jest parzysta).

Niech  $h(x) = u(x, \cdot)$ , gdzie funkcja  $u: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia równanie falowe

$$\square u = u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

z danymi początkowymi  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ . Z równania (43) dostajemy

$$\Delta_x M_u(x, r, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t), \quad (44)$$

a z równania falowego

$$\begin{aligned} \Delta_x M_u(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \Delta_x u(x + r\xi, t) dS_\xi \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t), \end{aligned} \quad (45)$$

zatem  $M_u$  jest rozwiązaniem równania *Eulera-Poisson'a-Darboux*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u \quad (46)$$

z danymi początkowymi  $M_u(x, r, 0) = M_f(x, r)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} M_u(x, r, 0) = M_g(x, r)$ . Dla nieparzystych  $n$  równanie daje się sprowadzić do jednowymiarowego równania falowego. Dla  $n = 3$  jest to wyjątkowo proste: równanie (46) wymnamy stronami przez  $r$  i dostajemy

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (rM_u) = c^2 \left( r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rM_u),$$

czyli funkcja  $(r, t) \mapsto rM_u(x, r, t)$  spełnia jednowymiarowe równanie falowe z danymi początkowymi

$$rM_u(x, r, 0) = rM_f(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial t} (rM_u)(x, r, 0) = rM_g(x, r).$$

Wiemy z poprzedniej sekcji, że rozwiązanie dane jest wzorem

$$(rM_u)(x, r, t) = \frac{1}{2} [(r+ct)M_f(x, r+ct) + (r-ct)M_f(x, r-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} \rho M_g(x, \rho) d\rho \quad (47)$$

i stąd (średnia sferyczna jest funkcją parzystą  $r$ )

$$\begin{aligned} M_u(x, r, t) &= \frac{1}{2r} [(r+ct)M_f(x, r+ct) + (r-ct)M_f(x, r-ct)] + \frac{1}{2rc} \int_{r-ct}^{r+ct} \rho M_g(x, \rho) d\rho \\ &= \frac{1}{2r} [M_f(x, r+ct) + M_f(x, r-ct)] + \frac{ct}{2r} [M_f(x, r+ct) - M_f(x, r-ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2rc} \left[ \int_0^{ct+r} \rho M_g(x, \rho) d\rho - \int_0^{ct-r} \rho M_g(x, \rho) d\rho \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

Przechodząc do granicy  $r \rightarrow 0$  dostajemy wzór Kirchhoffa

$$\begin{aligned} u(x, t) &= tM_g(x, ct) + M_f(x, ct) + t\frac{\partial}{\partial t}M_f(x, ct) \\ &= tM_g(x, ct) + \frac{\partial}{\partial t}(tM_f(x, ct)) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Dla wyższych, nieparzystych wymiarów przestrzennych mamy podobny wynik: dla  $n = 2k + 1$  funkcja

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} M_u(x, r, t)) \quad (50)$$

spełnia jednowymiarowe równanie falowe i stąd uogólnienie wzoru Kirchhoffa

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right) + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{|y-x|=ct} g(y) dS_y \right) \right], \quad (51)$$

gdzie  $\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)$ .

**6.3. Własności rozwiązań.** Z formuły (51) wnioskujemy, że jeżeli  $f$  jest klasy  $C^{k+3}$  a  $g$  klasy  $C^{k+2}$ , to  $u$  jest klasy  $C^{k+2}$ . W odróżnieniu od przypadku jednowymiarowego, istotna jest pochodna  $f$ , czyli mała zmiana wartości  $f$  może powodować duże zmiany  $u$ . Żeby zobaczyć to bardziej bezpośrednio, przyjrzyjmy się rozwiązaniu sferycznie symetrycznemu, czyli postaci

$$u(x, t) = \frac{\alpha(|x| + ct) + \beta(|x| - ct)}{2|x|}, \quad (52)$$

gdzie  $\alpha, \beta$  są funkcjami klasy  $C^2$ . A priori, rozwiązanie może mieć osobliwość w zerze. Wybierając  $\alpha(r) = \beta(r) = r\varphi(r)$ , gdzie  $\varphi$  jest funkcją parzystą, (52) przyjmuje postać

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi(ct + |x|) + \varphi(ct - |x|)) + ct \frac{\varphi(|x| + ct) - \varphi(|x| - ct)}{2|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ \varphi(ct) + ct\varphi'(ct) & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad (53)$$

Dane początkowe:  $u(x, 0) = \varphi(|x|)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$  ( $\varphi'$  jest funkcją nieparzystą). Stąd widać, że małe zmiany wartości początkowych mogą powodować duże zmiany wartości rozwiązania w pewnym punkcie.

**6.4. Zasada Huygensa.** Innym wnioskiem z formuły (51) jest to, że rozwiązanie w punkcie  $(x, t)$  zależy tylko od danych początkowych w infinitezymalnym otoczeniu sfery  $|y - x| = ct$ . W drugą stronę: zaburzenie w  $x$  w chwili  $t = 0$  ma wpływ na rozwiązanie w chwili  $t$  tylko w infinitezymalnym otoczeniu sfery  $|y - x| = ct$ . Jest to *zasada Huygensa*, słuszna dla nieparzystych wymiarów przestrzennych, większych od 1. Zobaczymy, że w przypadkach parzystowymiarowych mamy sytuację dramatycznie odmienną.

Zasada Huygensa może być zaburzona obecnością przeszkody. Dla przykładu, jeżeli mamy przeszkodę w postaci sfery  $|x| = 1$ , to brak 'przepływu' przez nią oznacza, że pochodna normalna rozwiązania  $u$  znika na niej. Dla sferycznie symetrycznych rozwiązań (52) oznacza to, że

$$\alpha'(1 + ct) + \beta'(1 - ct) - \alpha(1 + ct) - \beta(1 - ct) = 0.$$

Wprowadzając nową zmienną  $s = 1 - ct$  i rozwiązując równanie na  $\beta$  dostajemy że,

$$\beta(s) = \alpha(2 - s) + 2 \int_{2-s}^1 e^{s-2+\tau} \alpha(\tau) d\tau \quad (54)$$



jest jego rozwiązaniem dla dowolnego  $\alpha$ . Jeżeli nośnik  $\alpha$  jest w przedziale  $[1, S]$ , to  $\beta(s) = 0$  dla  $s > 1$  i warunek początkowy  $u(x, 0) = \frac{1}{|x|}(\alpha(x) + \beta(x))$  jest zero dla  $|x| > S$ , podobnie  $u_t(x, 0)$ . Zasada Huygensa implikuje, że na  $|x| = 1$  rozwiązanie jest zerowe dla dostatecznie dużych  $t$ . Tymczasem z (52) i (54), dla  $|x| = 1$ ,

$$u(x, t) = 2\alpha(1 + ct) - 2e^{-1-ct} \int_1^{1+ct} e^\tau \alpha(\tau) d\tau.$$

**6.5. Równanie falowe w parzystych wymiarach przestrzennych.** W parzystych wymiarach nie da się przez proste podstawienie rozwiązać równania Eulera-Poisson'a-Darboux. Rozwiązanie równania falowego można dostać *metodą spadku* Hadamarda. Zilustruję ją na przykładzie  $n = 2$ . Rozwiązanie zagadnienia dwuwymiarowego traktuje się jak szczególne (niezależne od  $x_3$ ) rozwiązanie zagadnienia trójwymiarowego. Niech  $u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2)$ ,  $u_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$  będą danymi początkowymi. Rozszerzamy funkcje  $f, g$  na całe  $\mathbb{R}^3$  kładąc  $\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)$  i  $\tilde{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$ . Z wzorów Kirchhoffa widać, że rozwiązanie  $\tilde{u}$  trójwymiarowego równania falowego z danymi początkowymi  $\tilde{f}, \tilde{g}$  nie zależy od  $x_3$  (jest stałe na włóknach rzutowania  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ ), więc rzutuje się na rozwiązanie dwuwymiarowego równania falowego  $u$ . W szczególności, dla  $x = (x_1, x_2, 0)$  mamy

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} \tilde{g}(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} \tilde{f}(y) dS_y \right).$$

Parametryzując półsfery ich rzutami na dyski dwuwymiarowe

$$(y_1, y_2) \mapsto \left( y_1, y_2, \sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} \right)$$

dostajemy

$$dS_y = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y_3}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_3}{\partial y_2} \right)^2} dy_1 dy_2 = \frac{ct}{|y_3|} dy_1 dy_2$$

i

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy_1 dy_2 + \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{f(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy_1 dy_2 \quad (55)$$

Z tego wzoru widać, że zasada Huygensa nie jest spełniona: zaburzenie jest 'odczuwalne' przez dowolnie długi czas.

**6.6. Zagadnienie niejednorodne. Całka Duhamela.** Zajmijmy się zagadnieniem

$$\square u(x, t) = w(x, t), \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x). \quad (56)$$

Pierwszy krok polega na sprowadzenia zagadnienia do jednorodnego ze względu na dane początkowe. Niech  $v$  będzie funkcją taką, że  $v(x, 0) = f(x)$ ,  $v_t(x, 0) = g(x)$ , na przykład  $v(x, t) = f(x) + tg(x)$ . Połóżmy  $\tilde{u} = u - v$ . Dostajemy z (56)

$$\square \tilde{u}(x, t) = w(x, t) - \square v(x, t), \quad \tilde{u}(x, 0) = 0, \quad \tilde{u}_t(x, 0) = 0.$$

Przyjmijmy więc, że w (56)  $f = g = 0$ . Rozwiązanie znajdziemy metodą analogiczną do stosowanej dla równań liniowych zwyczajnych. Niech  $U(x, t, s)$  będzie rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\square U(x, t, s) = 0, \quad U(x, s, s) = 0, \quad U_t(x, s, s) = w(x, s).$$

Rozwiązanie zagadnienia (56) z jednorodnymi danymi początkowymi dostaniemy poprzez całkę *Duhamela*

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, s) ds. \quad (57)$$

Istotnie, mamy dla tak zdefiniowanego  $u$

$$u_t(x, t) = U(x, t, t) + \int_0^t U_t(x, t, s) ds = \int_0^t U_t(x, t, s) ds$$

i

$$u_{tt}(x, t) = U_t(x, t, t) + \int_0^t U_{tt}(x, t, s) ds = w(x, t) + \int_0^t U_{tt}(x, t, s) ds,$$

a stąd

$$\square u(x, t) = w(x, t) + \int_0^t \square U(x, t, s) ds = w(x, t), \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Aby skorzystać z wzoru Kirchoffa (49) (dla danych początkowych na powierzchni  $t = 0$ ) zauważmy, że funkcja  $(x, t) \mapsto V(x, t, s) := U(x, t + s, s)$  jest rozwiązaniem zagadnienia  $\square V = 0$ ,  $V(x, 0, s) = 0$ ,  $V_t(x, 0, s) = w(x, s)$ , więc z wzoru Kirchoffa

$$V(x, t, s) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} w(y, s) dS_y$$

i

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t V(x, t-s, s) ds \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \frac{1}{t-s} \left( \int_{|y-x|=c(t-s)} w(y, s) dS_y \right) ds \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{1}{|y-x|} w\left(y, t - \frac{|y-x|}{c}\right) dy \end{aligned} \quad (58)$$

**6.7. Zagadnienie początkowe na dowolnej powierzchni swobodnej.** Szukamy rozwiązania zagadnienia początkowego  $\square u(x, t) = w(x, t)$ ,  $u(x, \varphi(x)) = f(x)$ ,  $u_t(x, \varphi(x)) = g(x)$  w obszarze  $t \geq \varphi(x)$ . Taktyka w rozwiązywaniu tego zagadnienia jest następująca: niech  $S = \{t = \varphi(x)\}$  będzie powierzchnią danych początkowych. Dla prostoty przyjmijmy, że  $\varphi(x) > 0$ . Przedłużmy w sposób regularny funkcję  $w$  do funkcji  $\tilde{w}$  na obszarze  $\{t \leq \varphi(x)\}$  tak, by odpowiednie zagadnienie początkowe na  $\{t = 0\}$  z prawą stroną  $\tilde{w}$  odtwarzało na  $S$  wyjściowe dane początkowe. Najlepiej więc szukać przedłużenia wśród funkcji postaci  $\square v$ , gdzie  $v$  spełnia warunki początkowe na  $S$ . Z wzoru (58) wynika, że, aby mieć zagwarantowaną dwukrotną różniczkowalność rozwiązania, funkcja  $w$  winna być klasy  $C^2$ . Zatem przedłużona funkcja  $\tilde{w}$  ma być też klasy  $C^2$ , więc funkcja  $v$  ma spełniać następujące warunki na  $S$ :

$$v = f, \quad v_t = g, \quad \square v - w = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\square v - w) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\square v - w) = 0. \quad (59)$$

Funkcji  $v$  szukamy postaci

$$v(x, t) = \sum_{i=0}^4 a_i(x) (t - \varphi(x))^i,$$

gdzie  $a_i$  spełniają układ równań wynikający z (59):

$$\begin{aligned} a_0 &= f, \quad a_1 = g, \\ 2\psi(x)a_2(x) + c^2(\Delta(a_1(x)\varphi(x) - a_0(x)) - \varphi(x)\Delta a_1(x)) &= w(x, \varphi(x)), \\ 6\psi(x)a_3(x) + c^2(\Delta(2a_2(x)\varphi(x) - a_1(x)) - 2\varphi(x)\Delta a_2(x)) &= w_t(x, \varphi(x)), \\ 24\psi(x)a_4(x) + c^2(\Delta(6a_3(x)\varphi(x) - 2a_2(x)) - 6\varphi(x)\Delta a_3(x)) &= w_{tt}(x, \varphi(x)), \end{aligned}$$

gdzie  $\psi(x) = 1 - c^2 \sum \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2$ . Układ ma rozwiązanie, bo  $S$  jest powierzchnią swobodną, czyli  $\psi(x) \neq 0$ . Podsumowując, funkcja

$$\tilde{w}(x, t) = \begin{cases} w(x, t) & \text{dla } t \geq \varphi(x) \\ \square v(x, t) & \text{dla } t \leq \varphi(x) \end{cases}$$

jest klasy  $C^2$ , więc istnieje rozwiązanie  $\tilde{u}$  zagadnienia  $\square \tilde{u} = \tilde{w}$ ,  $u(x, 0) = v(x, 0)$ ,  $\tilde{u}_t(x, 0) = v_t(x, 0)$  i z jednoznaczności  $\tilde{u}(x, t) = v(x, t)$  w obszarze  $\{t \leq \varphi(x)\}$ . Zatem  $\tilde{u}(x, \varphi(x)) = f(x)$ ,  $\tilde{u}_t(x, \varphi(x)) = g(x)$  i funkcja  $\tilde{u}$ , obcięta do  $\{t \geq \varphi(x)\}$  jest rozwiązaniem wyjściowego zagadnienia.

**6.8. Równości i nierówności energetyczne.** Podstawowym narzędziem w rozwiązywaniu problemów istnienia rozwiązań dla bardziej skomplikowanych zagadnień są szacowania dla (potencjalnych) rozwiązań. Nie można, w ogólności, liczyć na istnienie jawnych formuł typu wzoru Kirchhoffa. Punktem wyjścia są tożsamości całkowe, wynikające z twierdzenia Stokesa. Dla operatora falowego ( $n=3$ ) wygląda to tak: mamy tożsamość

$$u_t \square u = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( c^2 \sum_i (u_{x_i})^2 + \sum_i (u_t)^2 \right) - c^2 \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (u_t u_{x_i}),$$

która oznacza, że forma  $u_t \square u dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  jest różniczką zewnętrzną 3-formy

$$\alpha = E dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + c^2 u_t u_{x_1} dt \wedge dx_2 \wedge dx_3 + c^2 u_t u_{x_2} dx_1 \wedge dt \wedge dx_3 + c^2 u_t u_{x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dt,$$

gdzie

$$E = \frac{1}{2} \left( c^2 \sum_i (u_{x_i})^2 + \sum_i (u_t)^2 \right).$$

Z twierdzenia Stokes'a, całkę z  $u_t \square u$  po obszarze  $\Omega = \{\varphi_1(x) \leq t \leq \varphi_2(x), x \in R \subset \mathbb{R}^3\}$  zamieniamy na całkę po brzegu

$$\partial \Omega = \{t = \varphi_1(x), x \in R\} \cup \{t = \varphi_2(x), x \in R\} \cup \{\varphi_1 \leq t \leq \varphi_2(x), x \in \partial R\}$$

z formy  $\alpha$ . Z otrzymanej tożsamości wyprowadza się szacowanie całki z  $\alpha$  po powierzchni  $\{t = \varphi_2(x), x \in R\}$  (zwanej *normą energetyczną*) przez wartości  $w = \square u$  i normę energetyczną na  $\{t = \varphi_1(x), x \in R\}$ .

Jak to funkcjonuje, zobaczmy na przykładzie  $\varphi_1(x) = 0$ ,  $\varphi_2(x) = T$ . Zaczyna się od wyeliminowania całki po  $\{\varphi_1 \leq t \leq \varphi_2(x), x \in \partial R\}$ . My po prostu przyjmujemy, że  $R = \mathbb{R}^3$  i że funkcje  $w, f, g$  mają zwarty nośnik. Ponadto, standardową metodą sprowadzamy zagadnienie do jednorodnego ze względu na dane początkowe ( $f = g = 0$  i stąd  $E(x, 0) = 0$ ) Równość  $\int_{\Omega} u_t \square u = \int_{\partial \Omega} \alpha$  oznacza w tym przypadku

$$\int_{0 \leq t \leq T} u_t \square u = \int E(x, T) dx. \quad (60)$$

Lewą stronę szacujemy korzystając z nierówności Schwarz'a

$$\left| \int_{0 \leq t \leq T} u_t w \right| \leq \left( \int_{0 \leq t \leq T} u_t^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{0 \leq t \leq T} w^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_{0 \leq t \leq T} 2E \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{0 \leq t \leq T} w^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (61)$$

a dla prawej mamy równość

$$\int E(x, T) dx = \frac{d}{dT} \left( \int_{0 \leq t \leq T} E(x, t) dx dt \right).$$

Funkcja  $E$  jest dodatnia, więc razem daje to nierówność

$$\frac{d}{dT} \left( \int_{0 \leq t \leq T} 2E(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_{0 \leq t \leq T} w^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (62)$$

i stąd

$$\left( \int_{0 \leq t \leq T} 2E(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^T \left( \int_{0 \leq t \leq s} w^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq \int_0^T \left( \int_{0 \leq t \leq T} w^2 \right)^{\frac{1}{2}} = T \left( \int_{0 \leq t \leq T} w^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (63)$$

Ostatecznie, z (60), (61) i (63)

$$\int E(x, T) dx \leq \left( \int_{0 \leq t \leq T} 2E \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{0 \leq t \leq T} w^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq T \left( \int_{0 \leq t \leq T} w^2 \right). \quad (64)$$

Mamy więc szacowanie pochodnych funkcji  $u$  przez wartości funkcji  $w$ . Szacowanie samych wartości funkcji przebiega tak: dla dowolnej funkcji  $h$  jednej zmiennej takiej, że  $h(0) = 0$  mamy

$$h^2(t) = \left( \int_0^t h_s(s) ds \right)^2 \leq \left( \left( \int_0^t 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t h_s^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = t \int_0^t h_s^2.$$

kładąc  $h(s) = u(x, s)$  dostajemy

$$\begin{aligned} \int u^2(x, T) dx &\leq \int \left( T \int_0^T u_t^2 dt \right) dx \leq 2T \int \left( \int_0^T E(x, t) dt \right) dx \\ &\leq 2T \int_0^T \left( t \int_{0 \leq s \leq t} w^2 \right) dt \leq 2T \int_0^T \left( t \int_{0 \leq s \leq T} w^2 \right) dt = T^3 \int_{0 \leq t \leq T} w^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Podobnie dostajemy szacowania dla wyższych pochodnych funkcji  $u$ . Powyższe oszacowania służą przy rozwiązywaniu bardziej złożonych zagadnień. Przykład w następnej sekcji.

**6.9. Przykład zastosowania.** Zajmijmy się zagadnieniem

$$\square u = N(u) + w, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (66)$$

gdzie

$$N(u) = \sum_i a_i u_{x_i} + a_0 u_t + au.$$

$a, a_i, a_0$  są funkcjami od  $x, t$ , dla uproszczenia o zwartym nośniku. Definiujemy ciąg kolejnych przybliżeń

$$\begin{aligned} u^0(x, t) &= f(x) + tg(x) \\ \square u^1(x, t) &= N(u^0) + w, \quad u^1(x, 0) = f(x), \quad u_t^1(x, 0) = g(x) \\ &\dots \\ \square u^{k+1}(x, t) &= N(u^k) + w, \quad u^{k+1}(x, 0) = f(x), \quad u_t^{k+1}(x, 0) = g(x) \\ &\dots \end{aligned} \quad (67)$$

Pokażemy, że ten ciąg jest zbieżny do rozwiązania. Najpierw pokażemy zbieżność w przestrzeniach Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem (wraz z pochodnymi).

Funkcja  $u^{k+1} - u^k$  jest rozwiązaniem równania

$$\square(u^{k+1} - u^k) = N(u^k - u^{k-1})$$

z zerowymi danymi początkowymi. Wprowadźmy oznaczenia dla dowolnej funkcji  $v$

$$\begin{aligned} H(v(\cdot, t)) &= \int v^2(x, t) dx \\ K(v(\cdot, t)) &= \max\{H(v(\cdot, t)), H(v_{x_i}(\cdot, t)), H(v_t(\cdot, t))\} \end{aligned} \quad (68)$$

Z poprzedniej sekcji mamy oszacowanie dla  $\square u = w$  z zerowymi danymi początkowymi,

$$K(u(\cdot, t)) \leq C(t) \int_0^t H(w(\cdot, s)) ds \quad \text{gdzie} \quad C(t) = \max(t^3, 2c^{-2}t, 2t).$$

W szczególności, dla pewnej (dodatniej) funkcji  $A(t)$  (zależnej od współczynników  $N$ )

$$\begin{aligned} K((u^{k+1} - u^k)(\cdot, T)) &\leq C(T) \int_0^T H(N(u^k - u^{k-1})(\cdot, t)) dt \\ &\leq C(T) \int_0^T A(t) K((u^k - u^{k-1})(\cdot, t)) dt \leq \max_{0 \leq t \leq T} (C(t)) \max_{0 \leq t \leq T} (A(t)) \int_0^T K((u^k - u^{k-1})(\cdot, t)) dt \\ &\leq \left( \max_{0 \leq t \leq T} (C(t)) \max_{0 \leq t \leq T} (A(t)) \right)^2 \int_0^T \int_0^{t_1} K((u^{k-1} - u^{k-2})(\cdot, t_2)) dt_2 dt_1 \\ &\leq \left( \max_{0 \leq t \leq T} (C(t)) \max_{0 \leq t \leq T} (A(t)) \right)^3 \int_0^T \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K((u^{k-2} - u^{k-3})(\cdot, t_3)) dt_3 dt_2 dt_1 \\ &\quad \dots \\ &\leq \left( \max_{0 \leq t \leq T} (C(t)) \max_{0 \leq t \leq T} (A(t)) \right)^k \int_0^T \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} K((u^1 - u^0)(\cdot, t_k)) dt_k \dots dt_2 dt_1 \\ &\leq \left( \max_{0 \leq t \leq T} (C(t)) \max_{0 \leq t \leq T} (A(t)) \right)^k \max_{0 \leq t \leq T} K((u_1 - u_0)(\cdot, t)) \int_0^T \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \dots dt_2 dt_1 \\ &= \left( \max_{0 \leq t \leq T} (C(t)) \max_{0 \leq t \leq T} (A(t)) \right)^k \max_{0 \leq t \leq T} K((u_1 - u_0)(\cdot, t)) \frac{T^k}{k!} \end{aligned} \quad (69)$$

Oznaczmy

$$\max_{0 \leq t \leq T} (C(t)) \max_{0 \leq t \leq T} (A(t)) = B(T), \quad \max_{0 \leq t \leq T} K((u_1 - u_0)(\cdot, t)) = D(T).$$

Zauważmy, że  $H(v_1 + v_2) \leq 2(H(v_1) + H(v_2))$ , co wynika z nierówności  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ . W konsekwencji,  $K(v_1 + v_2) \leq 2(K(v_1) + K(v_2))$ . Z oszacowania (69) dostajemy zatem

$$\begin{aligned} K(u^{k+j} - u^k) &= K((u^{k+j} - u^{k+1}) + (u^{k+1} - u^k)) \leq 2K(u^{k+j} - u^{k+1}) + 2K(u^{k+1} - u^k) \\ &\leq 2K(u^{k+j} - u^{k+1}) + 2 \frac{B^k T^k}{k!} D \leq 2 \frac{B^k T^k}{k!} D + 4K(u^{k+j} - u^{k+2}) + 4K(u^{k+2} - u^{k+1}) \\ &\leq 2 \frac{B^k T^k}{k!} D + 4 \frac{B^{k+1} T^{k+1}}{(k+1)!} D + 4K(u^{k+j} - u^{k+2}) \\ &\quad \dots \\ &\leq 2 \frac{B^k T^k}{k!} D + 4 \frac{B^{k+1} T^{k+1}}{(k+1)!} D + \dots + 2^{j-1} \frac{B^{k+j-1} T^{k+j-1}}{(k+j-1)!} D \leq 2 \frac{B^k T^k}{k!} D e^{2BT} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Podobnie wykazujemy zbieżność dla pochodnych  $u$  korzystając z przemienności  $\square D^\alpha u = D^\alpha \square u$ , a stąd wnioskuje się (na podstawie nierówności Sobolewa, o których nie było mowy) o zbieżności niemal jednostajnej, wraz z pochodnymi, ciągu  $(u^k)$ .

## 7. Równania hiperboliczne. Warunek Gårdinga.

Zajmiemy się jednym równaniem liniowym o stałych współczynnikach

$$P(D, \tau)u(x, t) = w(x, t), \quad \tau^k u(x, 0) = f_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (70)$$

gdzie  $P$  jest wielomianem  $n+1$  zmiennych, stopnia  $m$ ,  $D = (D_1, \dots, D_n)$ ,  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\tau = \frac{\partial}{\partial t}$ . Zakładamy, że powierzchnia  $\{t=0\}$  jest swobodną, czyli że  $P(0, 1) \neq 0$ . Przyjmijmy  $P(0, 1) = 1$ .

Pokażemy najpierw, że zagadnienie (70) z jednorodnymi danymi początkowymi można sprowadzić do zagadnienia standardowego

$$P(D, \tau)u(x, t) = 0, \quad \tau^k u(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-2, \quad \tau^{m-1}u(x, 0) = g(x). \quad (71)$$

Oznaczmy przez  $U(x, t, s)$  rozwiązanie zagadnienia

$$P(D, \tau)U(x, t, s) = 0, \quad \tau^k U(x, t, s) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-2, \quad \tau^{m-1}U(x, t, s) = w(x, t) \quad (72)$$

Rozwiązanie zagadnienia (70) z jednorodnymi danymi początkowymi dane jest całką Duhamela

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, s) ds.$$

Sprawdzamy:

$$\tau u(x, t) = \int_0^t \tau U(x, t, s) ds + U(x, t, t) = \int_0^t \tau U(x, t, s) ds$$

i stąd

$$\tau^k u(x, t) = \int_0^t \tau^k U(x, t, s) ds \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, m-1$$

oraz

$$\tau^m u(x, t) = \tau \int_0^t \tau^{m-1} U(x, t, s) ds = \int_0^t \tau^m U(x, t, s) ds + \tau^{m-1} U(x, t, t) = \int_0^t \tau^m U(x, t, s) ds + w(x, t).$$

Zatem

$$P(D, \tau)u(x, t) = \int_0^t P(D, \tau)U(x, t, s) ds + w(x, t) = w(x, t).$$

Z kolei, rozwiązanie zagadnienia (70) z  $w=0$  dane jest przez

$$u = U_{m-1} + (\tau + P_1(D))U_{m-2} + (\tau^2 + \tau P_1(D) + P_2(D))U_{m-3} \\ + \dots + (\tau^{m-1} + P_1(D)\tau^{m-2} + \dots + P_{m-1}(D))U_0$$

gdzie  $U_i$  jest rozwiązaniem zadania standardowego (71) z  $g = f_i$  a wielomiany  $P_i$  pochodzą z rozkładu

$$P(D, \tau) = \tau^m + P_1(D)\tau^{m-1} + \dots + P_{m-1}(D)\tau + P_m(D). \quad (73)$$

Sprawdzamy:

$$u(x, 0) = \tau^{m-1}U_0(x, 0) = f_0(x) \\ \tau u(x, 0) = \tau^{m-1}U_1(x, 0) + \tau(\tau^{m-1} + P_1(D)\tau^{m-2} + \dots + P_{m-1}(D))U_0(x, 0) \\ = f_1 + P(D, \tau)U(x, 0) - P_m(D)U_0(x, 0) = f_1 \quad (74)$$

itd.

**7.1. Zagadnienie standardowe. Warunek Gårdinga.** Zadanie standardowe rozwiążemy metodą transformat Fouriera w zmiennych przestrzennych. Przyjmujemy konwencję  $\hat{h}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} h(x) dx$ . Załóżmy, że wszystkie operacje poniżej są wykonalne (lub traktujemy je formalnie).

Jeżeli  $u(x, t) = \int e^{2\pi i x \xi} \hat{u}(\xi, t) d\xi$  jest rozwiązaniem zadania standardowego, to

$$0 = P(D, \tau)u(x, t) = \int e^{2\pi i x \xi} P(2\pi i \xi, \tau) \hat{u}(\xi, t) d\xi$$

i

$$\tau^k u(x, 0) = \begin{cases} \int e^{2\pi i x \xi} \tau^k \hat{u}(\xi, 0) d\xi = 0 & \text{dla } k = 0, \dots, m-2 \\ \int e^{2\pi i x \xi} \tau^{m-1} \hat{u}(\xi, 0) d\xi = \int e^{2\pi i x \xi} \tau^k \hat{g}(\xi) d\xi & \text{dla } k = m-1 \end{cases}$$

i stąd  $\hat{u}$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego

$$P(2\pi i \xi, \tau) \hat{u}(\xi, t) = 0, \quad \tau^k \hat{u}(\xi, 0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 0, \dots, m-2 \\ \hat{g}(\xi) & \text{dla } k = m-1. \end{cases} \quad (75)$$

Rozwiązanie to można zapisać w postaci  $\hat{u}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) Z(\xi, t)$ , gdzie

$$Z(\xi, t) = \int_{\Gamma} \frac{e^{2\pi i \lambda t}}{P(2\pi i \xi, 2\pi i \lambda)} d\lambda$$

i kontur  $\Gamma$  obejmuje wszystkie pierwiastki wielomianu  $P(2\pi i \xi, 2\pi i \lambda)$  ( $\xi$  jest tutaj ustalonym parametrem).

Sprawdzamy:

$$P(2\pi i \xi, \tau) \hat{u}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) \int_{\Gamma} \frac{e^{2\pi i \lambda t} P(2\pi i \xi, 2\pi i \lambda)}{P(2\pi i \xi, 2\pi i \lambda)} d\lambda = \hat{g}(\xi) \int_{\Gamma} e^{2\pi i \lambda t} d\lambda = 0$$

(całka po konturze zamkniętym z funkcji całkowitej).

$$\tau^k Z(\xi, 0) = \int_{\Gamma} \frac{(2\pi i \lambda)^k}{P(2\pi i \xi, 2\pi i \lambda)} d\lambda = \int_{\Gamma} \frac{(2\pi i \lambda)^k}{(2\pi i \lambda)^m + P_1(2\pi i \xi)(2\pi i \lambda)^{m-1} + \dots} d\lambda$$

i biorąc jako kontur okrąg  $|\lambda| = R$  dostajemy, przechodząc do granicy  $R \rightarrow \infty$ ,

$$\tau^k Z(\xi, 0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k < m-1 \\ 1 & \text{dla } k = m-1 \end{cases}$$

i stąd

$$\tau^k \hat{u}(\xi, 0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k < m-1 \\ \hat{g}(\xi) & \text{dla } k = m-1 \end{cases}.$$

Możemy teraz wypisać formalny wzór na rozwiązanie

$$u(x, t) = \int e^{2\pi i \xi x} \hat{g}(\xi) Z(\xi, t) d\xi. \quad (76)$$

Pytanie: kiedy ten wzór określa funkcję klasy  $C^m$ ? Z własności transformaty Fouriera wiemy, że jest tak, jeżeli funkcję  $\xi^\alpha \hat{g}(\xi) \tau^k Z(\xi, t)$  są całkowalne w sposób ciągły względem  $t$  dla  $|\alpha| + k \leq m$ . Dla tego wystarcza ograniczoność funkcji

$$(1 + |\xi|)^{n+1} |\xi^\alpha \hat{g}(\xi) \tau^k Z(\xi, t)| \quad \text{dla } \xi \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T.$$

Pokażemy że funkcje te są ograniczone, jeżeli spełniony jest *warunek Gårdinga*:  
*istnieje*  $c \in \mathbb{R}$  *takie, że*  $P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda) \neq 0$  *dla*  $\xi \in \mathbb{R}^n$  *i*  $\lambda \in \mathbb{C}$  *takich, że*  $\text{Im } \lambda \leq -c$ .

Warunek ten oznacza, że wszystkie pierwiastki wielomianów  $P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda)$  leżą w półpłaszczyźnie  $\text{Im } \lambda > -c$ . Zaczynamy od oszacowanie z góry pierwiastków wielomianu  $P$ . Mamy

$$P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda) = (2\pi i\lambda)^m + P_1(2\pi i\xi)(2\pi i\lambda)^{m-1} + P_2(2\pi i\xi)(2\pi i\lambda)^{m-2} + \dots + P_m(2\pi i\xi)$$

i wielomiany  $P_k$  mają szacowanie  $|P_k(2\pi i\xi)| \leq M(1 + |\xi|)^k$  dla  $\xi \in \mathbb{R}^n$  i dla pewnego  $M$ . Jeżeli więc  $P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda) = 0$ , to

$$|\lambda|^m \leq M \sum_{k=0}^{m-1} (1 + |\xi|)^{m-k} |\lambda|^k$$

i stąd

$$\left( \frac{|\lambda|}{1 + |\xi|} \right)^m \leq M \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{|\lambda|}{1 + |\xi|} \right)^k.$$

Jeżeli  $\theta := \frac{|\lambda|}{1 + |\xi|} \geq 1$ , to  $\theta^m \leq Mm\theta^{m-1}$  i stąd  $\theta \leq Mm$ . Ogólnie zatem mamy nierówność  $\theta \leq 1 + Mm$ , czyli szacowanie dla pierwiastków wielomianu  $P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda)$ :

$$|\lambda| \leq (1 + Mm)(1 + |\xi|). \quad (77)$$

Niech  $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)$  będą pierwiastkami, więc  $P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda) = (2\pi i)^m \prod (\lambda - \lambda(\xi))$ .

Wybermy teraz, przy ustalonym  $\xi$ , jako kontur  $\Gamma$  brzeg obszaru  $\bigcup_i K(\lambda_i, 1)$ . Mamy oczywiste szacowanie długości konturu  $|\Gamma| \leq 2\pi m$ . Dla  $\lambda \in \Gamma$  mamy  $|\lambda - \lambda_k| \geq 1$  i stąd

$$|P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda)| = (2\pi)^m \prod |(\lambda - \lambda(\xi))| \geq (2\pi)^m.$$

Ponieważ każdy punkt  $\lambda \in \Gamma$  jest w odległości 1 od pewnego pierwiastka, to z warunku Gårdinga  $\text{Im } \lambda \geq -c - 1$ , a z nierówności (77)

$$|\lambda| \leq 1 + (1 + Mm)(1 + |\xi|) \leq (2 + Mm)(1 + |\xi|).$$

Stąd

$$|e^{2\pi i\lambda t}| \leq e^{2\pi(1+c)t} \quad \text{dla } t \geq 0$$

i

$$|\tau^k Z(\xi, t)| = \left| \int_{\Gamma} \frac{e^{2\pi i\lambda t} (2\pi i\lambda)^k}{P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda)} d\lambda \right| \leq 2\pi m (2\pi)^{k-m} (2 + Mm)^k (1 + |\xi|)^k e^{2\pi(1+c)t}.$$

Widzimy stąd, że

$$(1 + |\xi|)^{n+1} |\xi^\alpha \hat{g}(\xi) \tau^k Z(\xi, t)|$$

jest na pewno ograniczone, jeżeli  $(1 + |\xi|)^{n+1+|\alpha|+k} |\hat{g}(\xi)|$  jest ograniczone, czyli jeżeli  $g$  jest klasy  $C^{n+m+1}$ .

Podsumowując: jeżeli spełniony jest warunek Gårdinga, to zagadnienie standardowe ma rozwiązanie klasy  $C^m$  jeżeli dane początkowe są klasy  $C^{n+m+1}$

## 7.2. Hiperboliczność.

DEFINICJA 3. Wielomian  $P(D, \tau)$  nazywamy *hiperbolicznym*, jeżeli spełnia warunek Gårdinga. Mówimy też, że odpowiednie równanie jest *hiperboliczne*.



W przypadku, gdy wielomian  $P$  jest jednorodny, warunek Gårdinga oznacza, że pierwiastki są rzeczywiste. Jeżeli bowiem  $\lambda$  jest pierwiastkiem dla  $\xi$  i  $a \in \mathbb{R}$ , to  $a\lambda$  jest pierwiastkiem dla  $a\xi$ . Pierwiastki układają się więc w linie proste na płaszczyźnie zespolonej. Niech

$$P(D, \tau) = p_m(D, \tau) + p_{m-1}(D, \tau) + \cdots + p_0(\Delta, \tau)$$

będzie rozkładem na wielomiany jednorodne, gdzie  $p_k$  jest wielomianem stopnie  $k$ .

**STWIERDZENIE 6.** *Jeżeli  $P$  spełnia warunek Gårdinga, to spełnia go również  $p_m$ . Jeżeli  $p_m$  spełnia warunek Gårdinga (tj. pierwiastki są rzeczywiste) i pierwiastki są jednokrotne dla  $\xi \neq 0$ , to  $P$  też go spełnia,*

**DOWÓD:** Niech  $\rho = |\xi|$ , czyli  $\xi = \rho\eta$ , gdzie  $|\eta| = 1$ . Niech  $\lambda = \rho\mu$  dla  $\rho \neq 0$ . Równanie  $P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda) = 0$  traktujemy jak równanie na  $|\mu|$ , parametryzowane przez  $\rho$  i  $\eta$ . Zapiszmy je w postaci

$$p_m(\eta, \mu) + \frac{1}{2\pi i\rho} p_{m-1}(\eta, \mu) + \cdots + \frac{1}{(2\pi i\rho)^m} p_0(\eta, \mu) = 0. \quad (78)$$

Ponieważ pierwiastki wielomianu zależą w sposób ciągły od współczynników (przyjmujemy bez dowodu), to pierwiastki równania (78) dążą, przy  $\rho \rightarrow \infty$  do pierwiastków równania  $p_m(\eta, \mu) = 0$ . Gdyby istniał pierwiastek  $\mu_0$ , dla pewnego  $\eta_0$ , z niezerową częścią urojoną (można przyjąć, że ujemną, bo  $-\mu_0$  byłoby pierwiastkiem dla  $-\eta_0$ ), to dla każdego, dostatecznie dużego  $\rho$  istniałby pierwiastek  $\mu$ , dla którego  $\text{Im } \mu < \frac{1}{2} \text{Im } \mu_0$ . Stąd  $\text{Im } \lambda < \frac{1}{2} \rho \text{Im } \mu_0$ , czyli część urojona pierwiastków  $P$  nie jest ograniczona od dołu. Sprzeczność.

W drugą stronę. Korzystamy z faktu, że pierwiastki zależą różniczkowalnie (a nawet analitycznie) od współczynników w obszarach, w których pierwiastki są jednokrotne. Oznacza to, że pierwiastek, jako funkcja parametru równania, jest lipschitzowska w każdym zwartym obszarze. Oznacza to, że różnica między pierwiastkiem równania (78) a równania  $p_m(\eta, \mu) = 0$  jest rzędu  $\frac{1}{\rho}$ , jednostajnie ze względu na  $\eta$ . Stąd, dla dużych  $\rho$ , pierwiastki równania (78) mają część urojoną rzędu  $\frac{1}{\rho}$ . Stąd ograniczoność części urojonej dla wszystkich  $\rho$ . ■

Jeżeli  $p_m$  spełnia warunek Gårdinga i pierwiastki są jednokrotne, to mówimy, że  $p_m$  jest *silnie hiperboliczny*. Zatem silna hiperboliczność części głównej wielomianu implikuje jego hiperboliczność.

**7.3. Hiperboliczność a zagadnienie Cauchy'ego.** Zagadnienie: znaleźć 'rozwiązanie'  $u$  spełniające 'dane'  $g$  nazywamy *dobrze postawionym*, jeżeli:

- (1)  $u$  istnieje dla 'każdego'  $g$ ,
- (2)  $u$  jest określone jednoznacznie przez  $g$ ,
- (3)  $u$  zależy od  $g$  w 'sposób ciągły'.

Wyniki poprzednich sekcji pokazują, że dla równania o stałych współczynnikach, spełniającego warunek Gårdinga, zagadnienie Cauchy'ego na  $S = \{t = 0\}$  jest dobrze postawione. Poniższy przykład pokaże, że jeżeli warunek Gårdinga nie jest spełniony, to zagadnienie Cauchy'ego jest źle postawione. Można więc powiedzieć

hiperboliczność  $\equiv$  zagadnienie Cauchy'ego jest dobrze postawione.

**PRZYKŁAD 2.** Załóżmy, że istnieją  $\eta_0$  i  $\mu_0$  takie, że  $p_m(\eta_0, \mu_0) = 0$ ,  $|\eta_0| = 1$  i  $\text{Im } \mu_0 = -\gamma < 0$ . Dla każdego  $\xi = \rho\eta_0$  weźmy

$$u(x, t) = (1 + |\xi|)^{-s-m} e^{2\pi i(x\xi + t\lambda)}, \quad \text{gdzie } P(2\pi i\xi, 2\pi i\lambda) = 0.$$

Jak poprzednio, niech  $\lambda = \rho\mu$ . Dla dostatecznie dużych  $\rho$  znajdujemy  $\lambda$ , dla którego  $|\mu - \mu_0| < \frac{1}{2}\gamma$  (patrz dowód Stwierdzenia 6), czyli

$$|\lambda| < (|\mu_0| + \frac{1}{2}\gamma)\rho, \quad \text{Im } \lambda < -\frac{1}{2}\gamma\rho.$$

Mamy więc dla  $t = 0$ ,  $|\alpha| \leq s$ ,  $0 \leq k \leq m$

$$|D^\alpha \tau^k u| = (1 + \rho)^{-s-m} |2\pi\lambda|^k (2\pi)^{|\alpha|} |\xi^\alpha| \leq (1 + \rho)^{-s-m} (2\pi)^{|\alpha|+k} (|\mu| + \frac{1}{2}\gamma)^k \rho^{|\alpha|+k},$$

podczas, gdy

$$|u(x, t)| = (1 + \rho)^{-s-m} |e^{2\pi i \lambda t}| \geq (1 + \rho)^{-s-m} e^{\pi \gamma \rho t}.$$

Dane początkowe i ich pochodne do rzędu  $s$  są jednostajnie ograniczone na  $\mathbb{R}^n$ , podczas gdy

$$u(0, t) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \infty \text{ dla każdego } t > 0.$$

$u$  nie zależy 'w sposób ciągły' od danych początkowych. Zagadnienie Cauchy'ego nie jest dobrze postawione.

## 8. Równanie przewodnictwa cieplnego.

Zajmiemy się zagadnieniem

$$u_t = \Delta u, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \text{gdzie } u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (79)$$

Zauważmy, że powierzchnia  $\{t = 0\}$  jest charakterystyczna, więc nie mają zastosowania klasyczne, znane z poprzednich rozdziałów twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności. Formalnych rozwiązań szukać będziemy metodą transformaty Fouriera względem zmiennej  $x$ .

**8.1. Metoda transformacji Fouriera.** Zakładając, że wszystkie, występujące poniżej całki mają sens, mamy

$$f(x) = \int e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad u(x, t) = \int e^{2\pi i x \xi} \hat{u}(\xi, t) d\xi.$$

Równość  $u_t = \Delta u$  implikuje równość transformat

$$\hat{u}_t(\xi, t) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t), \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

Jest to zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego zwyczajnego z rozwiązaniem

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \hat{f}(\xi).$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int e^{2\pi i x \xi} \hat{u}(\xi, t) d\xi = \int e^{2\pi i x \xi} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int e^{2\pi i x \xi} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \left( \int e^{-2\pi i y \xi} f(y) dy \right) d\xi \\ &= \int K(x, y, t) f(y) dy, \end{aligned} \quad (80)$$

gdzie

$$K(x, y, t) = \int e^{2\pi i x \xi} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} e^{-2\pi i y \xi} d\xi = \int e^{2\pi i (x-y)\xi - 4\pi^2 |\xi|^2 t} d\xi.$$

Liczymy:

$$\begin{aligned} -4\pi^2 |\xi|^2 t + 2\pi i (x-y)\xi &= (2\pi i \xi \sqrt{t})^2 + 2\pi i \xi (x-y) + \frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{(x-y)^2}{4t} \\ &= (2\pi i \xi \sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}(x-y))^2 - \frac{(x-y)^2}{4t} \end{aligned}$$

i stąd

$$\begin{aligned} K(x, y, t) &= \int e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t + 2\pi i (x-y)\xi} d\xi = e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \int e^{(2\pi i \xi \sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}(x-y))^2} d\xi \\ &= e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \int e^{(2\pi i \xi \sqrt{t})^2} d\xi \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}. \end{aligned} \quad (81)$$

Bezpośrednio z konstrukcji wynikają następujące własności  $K$ :

- (a)  $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  ( $t > 0$ ),
- (b)  $K(x, y, t) = K(y, x, t)$ ,
- (c)  $\frac{\partial}{\partial t} K - \Delta K = 0$  dla  $t > 0$ ,
- (d)  $\int K(x, y, t) dy = 1$ .

Zapiszmy funkcję  $K$  w postaci

$$K(x, y, t) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n g\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right), \quad \text{gdzie} \quad g(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \quad \text{i} \quad \varepsilon = 2\sqrt{t}.$$

Zatem  $K(x, \cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \delta_x$  w sensie dystrybucji i stąd  $u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x)$  przy założeniu ciągłości  $f$ . Rozwiązanie zadane wzorem (80) jest, w obszarze  $t > 0$ , funkcją gładką (twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki), niezależnie od gładkości  $f$ . Wystarczy, by  $f$  była funkcją mierzalną, o temperowanym wzroście, tzn. dla pewnego  $a$  i pewnego  $M$  mamy nierówność  $|f(x)| \leq M e^{ax^2}$  zachodzącą prawie wszędzie. Ponadto, mamy oszacowania wynikające z dodatniości funkcji  $K$

$$u(x, t) = \int K(x, y, t) f(y) dy \leq \sup_z f(z) \int K(x, y, t) dy = \sup_z f(z),$$

i podobnie  $u(x, t) \geq \inf_z f(z)$ . Mamy zatem

$$\inf_z f(z) \leq u(x, t) \leq \sup_z f(z) \quad (82)$$

i jeżeli dla pewnego  $(x, t)$  jedna z nierówności jest równością i  $f$  jest funkcją ciągłą, to  $f$  jest funkcją stałą. Istotnie,  $\inf_z f(z) = u(x, t) = \int K(x, y, t) f(y) dy$  implikuje  $\int K(x, y, t) (f(y) - \inf_z f(z)) dy = 0$ . Z dodatniości  $K$  i ciągłości  $f$  wynika  $f(y) - \inf_z f(z) = 0$ .

**8.2. Inne rozwiązania.** Ponieważ  $S = \{t = 0\}$  jest powierzchnią charakterystyczną, nie można oczekiwać jednoznaczności rozwiązań. Poniżej mamy przykład niezerowego rozwiązania z zerowymi danymi początkowymi.

Niech  $n = 1$  i niech  $g$  będzie funkcją klasy  $C^\infty(\mathbb{R})$  taką, że  $g(t) = 0$  dla  $t < 0$  i  $g(t) > 0$  dla  $t > 0$ . Szukamy rozwiązania równania

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0 \quad \text{postaci} \quad u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) x^j.$$

Z równania wynika wzór rekurencyjny

$$g'_j = (j+2)(j+1)g_{j+2}.$$

Kładąc  $g_0 = g$ ,  $g_1 = 0$  dostajemy

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}. \quad (83)$$

Udowodnimy zbieżność tego szeregu dla funkcji

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}, \quad \alpha > 1.$$

Dla  $t > 0$  funkcja jest analityczna, więc  $g^{(k)}$  można przedstawić całką

$$g^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\exp(-z^{-\alpha})}{(z-t)^{k+1}}, \quad (84)$$

gdzie kontur  $\Gamma$  jest okręgiem o środku w  $t$  i promieniu  $\theta t$ ,  $0 < \theta < 1$ , a  $z^{-\alpha}$  jest na gałęzi odpowiadającej wartości głównej logarytmu.

Dla  $z \in \Gamma$  mamy  $z = t(1 + \theta e^{i\psi})$  i stąd

$$\operatorname{Re}(-z^{-\alpha}) = -t^{-\alpha} \operatorname{Re}(1 + \theta e^{i\psi})^{-\alpha}.$$

Możemy wybrać  $\theta$  tak, by

$$\operatorname{Re}(1 + \theta e^{i\psi})^{-\alpha} \geq (1 + \theta)^{-\alpha} > \frac{1}{2}, \quad \psi \in \mathbb{R}.$$

Dla takiego  $\theta$  mamy  $\operatorname{Re}(-z^{-\alpha}) < -\frac{1}{2}t^{-\alpha}$ , zatem z (84)

$$\left| g^{(k)}(t) \right| < \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right)$$

i dostajemy szacowanie szeregu (83)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(k!)^2} \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(\theta t)^k} \frac{1}{k!} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) = \exp\left(\frac{1}{t} \left( \frac{x^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha} \right)\right). \end{aligned}$$

Dla każdego  $x$  funkcja po prawej stronie dąży do zera przy  $t \rightarrow 0$ , zatem szereg (83) jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego z zerowymi danymi początkowymi.

**8.3. Zasada maximum.** Niech  $D$  będzie ograniczonym obszarem w  $\mathbb{R}^n$  z brzegiem  $\partial D$ . Ustalmy  $T > 0$  i niech  $\Omega = \{(x, t): x \in \overset{\circ}{D}, 0 < t < T\}$ . Brzeg  $\partial\Omega$  rozkładamy na sumę  $\partial\Omega = \partial'\Omega \cup \partial''\Omega$ , gdzie

$$\begin{aligned} \partial'\Omega &= \{(x, t): t = 0 \text{ i } x \in D \text{ lub } 0 < t < T \text{ i } x \in \partial D\}, \\ \partial''\Omega &= \{(x, t): t = T \text{ i } x \in D\}. \end{aligned}$$

**TWIERDZENIE 2 (ZASADA MAXIMUM).** Niech  $u$  będzie funkcją ciągłą w  $\bar{\Omega}$  i różniczkowalną w  $\Omega$  (odpowiednią ilość razy) i niech  $u_t - \Delta u \leq 0$  w  $\Omega$ . Wówczas

$$\max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \partial'\Omega} u(x, t). \quad (85)$$

**DOWÓD:** Wykażemy najpierw prawdziwość twierdzenia gdy  $u_t - \Delta u < 0$  i dla obszaru  $\Omega_\varepsilon = \{(x, t) \in \Omega: 0 < t < T - \varepsilon\}$ , tzn udowodnimy równość

$$\max_{(x,t) \in \bar{\Omega}_\varepsilon} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \partial'\Omega_\varepsilon} u(x, t). \quad (86)$$

Jeżeli  $(x, t) \in \Omega_\varepsilon$ , to warunek konieczny lokalnego maximum,  $u_t(x, t) = 0$ ,  $\Delta u(x, t) \leq 0$  jest sprzeczny z  $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) < 0$ . Jeżeli  $(x, t) \in \partial''\Omega_\varepsilon$ , to warunek konieczny lokalnego maximum,  $u_t(x, t) \geq 0$ ,  $\Delta u(x, t) \leq 0$  też jest sprzeczny z  $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) < 0$  (wykorzystujemy różniczkowalność w  $\Omega$ ). Z ciągłości  $u$  na  $\bar{\Omega}$  dostajemy twierdzenie dla  $\Omega$  w przypadku ostrej nierówności  $u_t - \Delta u < 0$ .

Niech teraz  $u_t - \Delta u \leq 0$ . Kładąc  $v(x, t) = u(x, t) - kt$ ,  $k > 0$  dostajemy  $v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - k < 0$ , więc mamy

$$\max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} v(x, t) = \max_{(x,t) \in \partial'\Omega} v(x, t)$$

i stąd

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} u(x,t) &= \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} (v(x,t) + kt) \leq \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} v(x,t) + kT \\ &= \max_{(x,t) \in \partial' \Omega} v(x,t) + kT \leq \max_{(x,t) \in \partial' \Omega} u(x,t) + kT. \end{aligned}$$

W granicy  $k \rightarrow 0$  dostajemy

$$\max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} u(x,t) \leq \max_{(x,t) \in \partial' \Omega} u(x,t).$$

■

Z twierdzenia tego wynika jednoznaczność rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego, tzn. z zadaną wartością na  $\partial' \Omega$ . Pozostaje pytanie o istnienie rozwiązań.

**8.4. Jednoznaczność rozwiązania.** Metoda, jakiej użyliśmy rozwiązując równanie poprzez transformatę Fouriera, stwarzała pozory jednoznaczności. Podaliśmy też przykład niezerowego rozwiązania dla zerowych danych początkowych. Sprawę lepiej wyjaśnia poniższe twierdzenie.

**TWIERDZENIE 3.** Niech  $u$  będzie funkcją ciągłą dla  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq t \leq T$  i różniczkowalną w sposób ciągły odpowiednią ilość razy dla  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < t < T$ . Niech  $u_t - \Delta u \leq 0$  dla  $0 < t < T$ ,  $u(x,t) \leq Me^{a|x|^2}$  dla pewnych stałych  $a, M$  i  $0 < t < T$ . Ponadto, niech  $u(x,0) = f(x)$ . Wówczas

$$u(x,t) \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} f(z), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (87)$$

**DOWÓD:** Wystarczy rozpatrzyć przypadek ograniczonej funkcji  $f$  i wystarczy wykazać nierówność (87) dla dowolnie małego  $T$ . Można bowiem, korzystając z niezmienniczości operatora  $\partial_t - \Delta$  względem przesunięć w czasie, otrzymać, poprzez iterowanie, tęzę dla całego przedziału  $[0, T]$ . Niech więc  $8aT < 1$  i niech  $\varepsilon > 0$  będzie takie, że  $8a(T + \varepsilon) < 1$ . Dla  $\mu > 0$  zdefiniujmy funkcję  $v_\mu$  wzorem

$$\begin{aligned} v_\mu(x,t) &= u(x,t) - \mu K(ix, iy, T + \varepsilon - t) \\ &= u(x,t) - \mu(4\pi(T + \varepsilon - t))^{-\frac{n}{2}} \exp((x-y)^2/4(T + \varepsilon - t)). \end{aligned}$$

Mamy  $\partial_t v_\mu - \Delta v_\mu = u_t - \Delta u \leq 0$ , więc na mocy Twierdzenia 2, dla

$$\Omega = \{(x,t) : |x-y| < \rho, 0 < t < T\} \quad (y \text{ jest ustalone}),$$

$$v_\mu(y,t) \leq \max_{\partial' \Omega} v_\mu. \quad (88)$$

Szacujemy  $v_\mu$  na  $\partial' \Omega$ :  $v_\mu(x,0) \leq u(x,0) \leq \sup_z f(z)$  i dla  $|x-y| = \rho$

$$\begin{aligned} v_\mu(x,t) &\leq Me^{a|x|^2} - \mu(4\pi(T + \varepsilon - t))^{-\frac{n}{2}} \exp((x-y)^2/4(T + \varepsilon - t)) \\ &\leq Me^{a(|y|+\rho)^2} - \mu(4\pi(T + \varepsilon))^{-\frac{n}{2}} \exp(\rho^2/4(T + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Ponieważ  $8a(T + \varepsilon) < 1$ , to  $\rho^2/4a(T + \varepsilon) > 2\rho^2$  i dla  $\rho > R = \frac{|y|}{\sqrt{2}-1}$  mamy  $a(|y| + \rho)^2 < \frac{\rho^2}{4(T + \varepsilon)}$ . Stąd prawa strona dąży do  $-\infty$  przy  $\rho \rightarrow \infty$ . Mamy więc z (88)

$$v_\mu(x,t) = u(x,t) - \mu(4\pi(T + \varepsilon - t))^{-\frac{n}{2}} \exp((x-y)^2/4(T + \varepsilon - t)) < \sup_{z \in \mathbb{R}^n} f(z)$$

dla każdego  $\mu$ . Przechodząc do granicy  $\mu \rightarrow 0$  dostajemy tezę twierdzenia. ■

Z twierdzenia tego wynika, że jedynym rozwiązaniem równania przewodnictwa cieplnego, spełniającym nierówność  $|u(x, t)| \leq M e^{a|x|^2}$ , przy ograniczonych danych początkowych, jest rozwiązanie zadane formułą całkową

$$u(x, t) = \int K(x, y, t) f(y) dy, \quad t > 0. \quad (89)$$

Wystarczy zauważyć, że jeżeli dwie funkcje  $u, \tilde{u}$  spełniają równanie z tymi samymi danymi początkowymi i mające powyższe oszacowanie, to różnice  $u - \tilde{u}$ ,  $\tilde{u} - u$  te spełniają równanie, ale z zerowymi danymi początkowymi i też są podobnie szacowane.

Z jednoznaczności rozwiązania dostajemy, że

$$u(x, t+s) = \int K(x, y, t) u(x, s) dy \text{ i stąd } K(x, y, t+s) = \int K(x, z, t) K(z, y, s) dz, \quad t, s > 0.$$

Jest to własność półgrupowa jądra  $K$ . Można ją też sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Wzór całkowy (89) daje nam funkcję  $u$  w obszarze  $t > 0$ . Pokazywaliśmy, że dla funkcji ciągłej  $f$  mamy zbieżność  $u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x)$ . Powstaje pytanie o własności funkcji  $u$  rozszerzonej do  $t \geq 0$

$$u(x, t) = \begin{cases} \int K(x, y, t) f(y) dy, & \text{dla } t > 0 \\ f(x) & \text{dla } t = 0. \end{cases}$$

Proste szacowanie pokazuje, że  $u$  jest ciągła w  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u(y, 0)| &= |u(x, t) - f(y)| \leq \int K(x, z, t) |f(x) - f(y)| dz \\ &= \int_{|x-z| < \delta} K(x, z, t) |f(x) - f(y)| dz + \int_{|x-z| \geq \delta} K(x, z, t) |f(x) - f(y)| dz \\ &\leq 2 \sup_z |f(z)| \int_{|x-z| > \delta} K(x, z, t) dz + \sup_{|x-z| < \delta} |f(z) - f(y)| \int K(x, z, t) dz \\ &= 2 \sup_z |f(z)| \int_{|x-z| > \delta} K(x, z, t) dz + \sup_{|x-z| < \delta} |f(z) - f(y)| \end{aligned}$$

Z ciągłości  $f$  wynika, że dla  $\varepsilon > 0$  mogą znaleźć takie  $\delta$ , że  $\sup_{|x-z| < \delta} |f(z) - f(y)| < \varepsilon$  dla  $|x - y| < \delta$ . Z własności jądra  $K$  wiemy, że dla dostatecznie małych  $t$  całka w pierwszym składniku jest dowolnie mała, więc pierwszy składnik, dla dostatecznie małych  $t$ , jest mniejszy od  $\varepsilon$ .

## 9. Równania Laplace'a i Poissona klasycznie.

Z kursu analizy znane są tożsamości Greena dla obszaru  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  z dostatecznie regularnym brzegiem i dla funkcji  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_i^n u_{x_i} v_{x_i} &= - \int_{\Omega} v \Delta u + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n}, \\ \int_{\Omega} v \Delta u &= \int_{\Omega} u \Delta v + \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right), \end{aligned} \quad (90)$$

gdzie  $\frac{\partial}{\partial n}$  oznacza pochodną w kierunku normalnym zewnętrznym na  $\partial\Omega$ . W szczególności, kładąc  $v = u$ , dostajemy

$$\int_{\Omega} \sum_i^n (u_{x_i})^2 = - \int_{\Omega} u \Delta u + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Wynika stąd, że rozwiązanie zagadnienia Dirichleta:

*znaleźć  $u$  w  $\Omega$  o zadanych wartościach  $\Delta u$  w  $\Omega$  i  $u$  na brzegu  $\partial\Omega$*

jest określone jednoznacznie. Podobnie, rozwiązanie zagadnienia Neumanna:

*znaleźć  $u$  w  $\Omega$  o zadanych wartościach  $\Delta u$  w  $\Omega$  i pochodnej normalnej  $u$  na brzegu  $\partial\Omega$*

jest określone z dokładnością do stałej. Zakładamy tu spójność  $\Omega$ .

**9.1. Rozwiązanie podstawowe.** Z kursu analizy wiemy, że funkcja  $\psi$  na  $\mathbb{R}^n$ , zdefiniowana wzorem

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{dla } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x|^{2-n} & \text{dla } n > 2 \end{cases}$$

( $\omega_n = 2 \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$  jest objętością sfery jednostkowej w  $\mathbb{R}^n$ ) ma własność  $\Delta\psi = \delta_0$ , gdzie różniczkowanie jest w sensie dystrybucji. Zatem  $\Delta_y \psi(x-y) = \delta_x$  i stąd, dla funkcji próbnej  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  i  $x \in \Omega$ , mamy  $\varphi(x) = \int \psi(x-y) \Delta\varphi(y) dy$ . Jeżeli zamiast funkcji próbnej weźmiemy dowolną funkcję  $u$  klasy  $C^2(\bar{\Omega})$ , to odpowiedni wzór wygląda tak:

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x,y) \Delta u dy + \int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial K(x,y)}{\partial n_y} - K(x,y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right). \quad (91)$$

gdzie przyjęliśmy wygodne oznaczenie  $K(x,y) = \psi(x-y)$ . Jeżeli  $\Delta u = 0$ , czyli funkcja  $u$  jest *harmoniczna*, to

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial K(x,y)}{\partial n_y} - K(x,y) \frac{\partial u}{\partial n} \right).$$

Ze wzoru tego wynika, że funkcja  $u$  jest gładka (całka z parametrem), a nawet analityczna w  $\Omega$ .

Dla laplasjanu każda powierzchnia jest swobodna (np. brzeg obszaru), więc ma zastosowanie twierdzenie Cauchy-Kowalewskiej dla analitycznych danych. Z drugiej strony, jednoznaczność rozwiązania mamy zadając wartość  $u$  na  $\partial\Omega$ . Poniższe rozumowanie pokazuje, dlaczego zagadnienie Cauchy'ego dla laplasjanu nie ma, w ogólności, rozwiązania, nawet lokalnego. Zadajmy na powierzchni  $S = \{x_n = 0\}$  dane początkowe  $u = 0$ ,  $u_{x_n} = g$ . Niech  $x \in S$  i niech  $B^+(x,r)$  będzie półkulą o środku w  $x$ , leżącą w półprzestrzeni  $\{x_n > 0\}$ . Wiemy, że funkcja harmoniczna w  $B^+(x,r)$  jest tam analityczna. Przedłużmy teraz  $u$ , spełniającą dane początkowe, do całej kuli  $B(x,r)$  kładąc

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = -u(x_1, x_2, \dots, -x_n) \quad \text{dla } x_n < 0.$$

Tak otrzymana funkcja jest klasy  $C^2$  w  $B(x,r)$  i tam harmoniczna. Zatem  $g$  też jest funkcją analityczną. Zagadnienie początkowe ma rozwiązanie tylko dla danych analitycznych.



Dystrybucję  $T$  o własności  $\Delta T = \delta_0$  nazywamy *rozwiązaniem podstawowym (fundamentalnym)* operatora Laplace'a. Łatwo widać, że do  $T$  można dodać dowolną funkcję harmoniczną. We wzorze (91) jądro  $K(x, y)$  możemy zastąpić przez  $G(x, y) = K(x, y) + w(y)$ , gdzie  $w$  jest funkcją harmoniczną w otoczeniu  $\bar{\Omega}$ . Biorąc  $\Omega = B(x, \rho)$  i  $w(y) = -\psi(y_0)$ ,  $|y_0| = \rho$  (funkcja stała, więc harmoniczna) mamy dla  $y \in \partial\Omega$

$$G(x, y) = K(x, y) - \psi(\rho) = \psi(x - y) - \psi(y_0) = 0, \quad \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} = \psi'(y - x) = \frac{1}{\omega_n} \rho^{1-n}$$

i formuła (91) przyjmuje postać

$$u(x) = \int_{|x-y| \leq \rho} (\psi(y-x) - \psi(y_0)) \Delta u dy + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho} u. \quad (92)$$

Dla funkcji harmonicznego  $\Delta u = 0$  dostajemy twierdzenie Gaussa o średnich:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho} u. \quad (93)$$

Słowami: dla funkcji  $u$ , harmonicznego w  $\Omega$ , wartość w punkcie  $x \in \Omega$  jest równa średniej wartości  $u$  na sferze domkniętej kuli o środku w  $x$ , zawierającej się w  $\Omega$ .

I na odwrót,

**STWIERDZENIE 7.** Jeżeli równość (93) zachodzi dla każdej kuli zawartej w  $\Omega$  i funkcja  $u$  jest klasy  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ , to  $u$  jest funkcją harmoniczną w  $\Omega$ .

**DOWÓD:** Jeżeli  $\Delta u(x) \neq 0$  dla pewnego  $x \in \Omega$ , dla ustalenia uwagi niech  $\Delta u(x) > 0$ , to również w otoczeniu  $x$  zachodzi ta nierówność. Mamy zatem, dla dostatecznie małego  $\rho$ ,

$$u(x) = \int_{|x-y| \leq \rho} (\psi(y-x) - \psi(y_0)) \Delta u dy + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho} u < \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho} u.$$

Ostatnia nierówność wynika z monotoniczności funkcji  $\psi$ :  $\psi(y-x) - \psi(y_0) < 0$  w wyrażeniu podcałkowym w pierwszej całce. ■

Jeżeli  $\Delta u \geq 0$ , to z monotoniczności  $\psi$  (jest malejąca) dostajemy

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho} u. \quad (94)$$

Funkcję ciągłą o tej własności nazywamy *subharmoniczną*. Dokładniej: funkcja ciągła  $u$  jest subharmoniczną w  $\Omega$  jeżeli dla każdego  $x \in \Omega$  istnieje  $r > 0$  takie, że dla każdego  $0 < \rho \leq r$  mamy nierówność (94). Funkcja  $u$  klasy  $\mathcal{C}^2$  jest subharmoniczną, jeżeli  $\Delta u \geq 0$ .

Pozostaje jeszcze do wykazania, że funkcja zadana wzorem  $u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y)$  jest, przy odpowiednich założeniach dotyczących funkcji  $f$ , rozwiązaniem równania Poissona  $\Delta u = f$ .

Założmy, że  $f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ . Dla ustalonego  $x \in \Omega$ , niech  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  będzie funkcją równą jeden w otoczeniu  $x$ . Mamy  $f = \varphi f + (1 - \varphi)f$ , więc

$$\Delta u(x) = \Delta \int_{\Omega} G(x, y) f(y) \varphi(y) dy + \Delta \int_{\Omega} G(x, y) f(y) (1 - \varphi(y)) dy.$$

W pierwszej całce funkcję  $f\varphi$  możemy przedłużyć zerem do  $\mathbb{R}^n$  i korzystając ze znanych wzorów dla spłotu

$$\begin{aligned} \Delta \int_{\Omega} G(x, y) f(y) \varphi(y) dy &= \Delta \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y) f(y) \varphi(y) dy \\ &= \Delta(\psi * (f\varphi)) = (\Delta\psi) * (f\varphi) = \delta_0 * (f\varphi) = f\varphi \end{aligned}$$

W drugiej całce możemy przejść z różniczkowaniem pod znak całki, a ponieważ poza  $x = y$  funkcja  $G$  jest harmoniczna, druga całka jest równa zero. Mamy więc

$$\Delta u(x) = f(x)\varphi(x) = f(x).$$

**9.2. Zasada maximum.** Podobnie jak dla równania przewodnictwa cieplnego, dla równania Laplace'a mamy zasadę maximum. Przypomnijmy, że istotna była nierówność  $u_t - \Delta u \leq 0$ . Podobnie mamy tutaj: wystarczy subharmoniczność funkcji. Dowód zasady maximum przeprowadzę w dwóch wersjach: dla funkcji różniczkowalnych, a następnie dla ciągłych funkcji subharmonicznych.

**TWIERDZENIE 4 (ZASADA MAXIMUM).** Niech  $u \in C^2(\Omega)$  i  $u \in C(\bar{\Omega})$  oraz niech  $\Delta u \geq 0$ . Wówczas

$$\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u. \quad (95)$$

**DOWÓD:** Przyjmijmy najpierw silniejsze założenie  $\Delta u > 0$  na  $\Omega$ . Warunek ten jest sprzeczny z warunkiem koniecznym maximum lokalnego. Jeżeli teraz  $\Delta u \geq 0$ , to dla funkcji  $v(x) = u + \varepsilon|x|^2$  mamy  $\Delta v > 0$ , zatem

$$\max_{\Omega} v = \max_{\partial\Omega} v$$

i stąd

$$\max_{\Omega} u + \varepsilon \min_{\Omega} v \leq \max_{\Omega} v = \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\Omega} u + \varepsilon \max_{\Omega} v.$$

W granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostajemy (95). ■

**TWIERDZENIE 5 (ZASADA MAXIMUM).** Niech  $u \in C(\bar{\Omega})$  będzie funkcją podharmoniczną, wówczas

$$\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u. \quad (96)$$

**DOWÓD:** Załóżmy najpierw, że nierówność (94) jest ostra. Jest to sprzeczne z warunkiem koniecznym lokalnego maximum:  $u(x) \geq \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho} u$ . Jeżeli teraz nierówność nie jest ostra dla  $u$ , to staje się ostra dla  $v(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$ . Dalej jak w poprzednim twierdzeniu. ■

Zasada maximum ma też swoją silniejszą wersję

**TWIERDZENIE 6 (ZASADA MAXIMUM).** Niech  $u \in C(\Omega)$  będzie funkcją podharmoniczną na spójnym obszarze  $\Omega$ , wówczas albo  $u$  jest stała albo

$$u(x) < \sup_{\Omega} u. \quad (97)$$

**DOWÓD:** Niech  $M = \sup_{\Omega} u$ . Zdefiniujmy zbiory  $\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$  i  $\Omega_2 = \{x \in \Omega : u(x) < M\}$ . Oczywiście  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  i zbiór  $\Omega_2$  jest otwarty bo  $u$  jest ciągła. Pokażemy, że również  $\Omega_1$  jest zbiorem otwartym. Niech bowiem  $x \in \Omega$ , więc subharmoniczność  $u$  daje, dla wszystkich dostatecznie małych  $\rho$ , nierówność

$$0 \leq \int_{|x-y|=\rho} u - \omega_n \rho^{n-1} u(x) = \int_{|x-y|=\rho} (u - u(x)) = \int_{|x-y|=\rho} (u - M).$$

Funkcja  $x \mapsto u(x) - M$  jest ciągła i niedodatnia, więc równa zero na każdej, dostatecznie małej, sferze o środku w  $x$ . Zatem  $u(y) = M$  w otoczeniu  $x$ . Zbiór  $\Omega_1$  jest otwarty,  $\Omega$  jest spójny, więc  $\Omega_1 = \Omega$  lub  $\Omega_1 = \emptyset$ . ■

**9.3. Zagadnienie Dirichleta. Funkcje Greena.** Jeżeli w formule

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u dy + \int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} - G(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right).$$

funkcja  $G$  jest tak dobrana, że  $G(x, y) = 0$  dla  $y \in \partial\Omega$ , to dostajemy reprezentację  $u$  poprzez wartość laplasjanu  $\Delta u$  i wartość brzegową  $u$ . Jeżeli więc funkcja  $u$  jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta

$$\Delta u = f \text{ na } \Omega, \quad u = g \text{ na } \partial\Omega,$$

to ma ona reprezentację

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}. \quad (98)$$

Rozwiązywanie zagadnienia Dirichleta sprowadza się do znalezienia jądra  $G$  nazywanego *funkcją Greena* zagadnienia Dirichleta.. Pamiętając, że  $G(x, y) = K(x, y) + w_x(y)$ , gdzie  $w_x$  jest funkcją harmoniczną, szukanie  $G$  sprowadza się do rozwiązania zagadnienia Dirichleta

$$\Delta w_x = 0 \text{ na } \Omega, \quad w_x(y) = -K(x, y) = -\psi(x - y) \text{ na } \partial\Omega.$$

Podobnie, dla zagadnienia Neumanna szukamy  $G$  spełniającego odpowiednie warunki brzegowe Neumanna. W szczególnych przypadkach daje się znaleźć funkcję Greena poprzez analizę geometrii zbioru  $\Omega$ , bez potrzeby rozwiązywania równania Laplace'a. Zilustrujemy to dwoma przykładami: półprzestrzeni i kuli.

**Półprzestrzeń**  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$ .

Dla punktu  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$  niech  $x^* = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$  będzie jego *punktem sprzężonym*. Zauważmy, że dla  $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$  mamy  $K(x, y) = K(x^*, y)$ , możemy więc położyć  $G(x, y) = K(x, y) - K(x^*, y)$ . Ponieważ  $x^* \notin \mathbb{R}_+^n$ , drugi składnik w tej sumie jest, dla każdego  $x$ , funkcją harmoniczną ze względu na  $y$ . Mamy więc reprezentację (zakładamy istnienie całek)

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}_+^N} G(x, y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\mathbb{R}_+^N} u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}.$$

Obliczmy  $\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}$ :

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} = -\frac{\partial\psi(y-x)}{\partial y_n} + \frac{\partial\psi(y-x^*)}{\partial y_n} = -\frac{1}{\omega_n} \left( \frac{y_n - x_n}{|x-y|^n} - \frac{y_n + x_n}{|x^* - y|^n} \right),$$

co dla  $y \in \partial\mathbb{R}_+^N$  daje

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} = \frac{1}{\omega_n} \frac{2x_n}{|x-y|^n}. \quad (99)$$

Funkcja ta nazywana jest *jądrem Poissona* dla  $\mathbb{R}_+^N$ , a wzór

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^N} \frac{1}{\omega_n} \frac{2x_n}{|x-y|^n} g(y) \quad (100)$$

dla rozwiązania zagadnienia Dirichleta

$$\Delta u = 0 \text{ na } \mathbb{R}_+^n, \quad u = g \text{ na } \partial\mathbb{R}_+^n,$$

wzorem Poissona. Pozostaje do pokazania, że funkcja zdefiniowana wzorem

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}_+^N} G(x, y) \Delta f(y) dy + \int_{\partial\mathbb{R}_+^N} g(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}.$$

jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta (przy odpowiednich założeniach dotyczących funkcji  $f, g$ )

$$\Delta u = f \text{ na } \Omega, \quad u = g \text{ na } \partial\Omega.$$

Zadanie to zostawiam czytelnikowi.

**Kula**  $B(0, a)$ .

Niech  $x \in B(0, a)$  i  $x^* = \frac{a^2}{|x|^2}x$ . Korzystamy z faktu, że sfera  $\partial B(0, a)$  jest miejscem geometrycznym punktów dla których iloraz odległości od  $x^*$  i od  $x$  jest stały i wynosi  $\frac{a}{|x|}$ . Mamy dla  $n > 2$

$$K(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x-y|^{2-n}, \quad K(x^*, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x^*-y|^{2-n},$$

a stąd, dla  $y \in \partial B(0, a)$ ,

$$K(x^*, y) = \left(\frac{a}{|x|}\right)^{2-n} K(x, y).$$

Ponieważ  $x^*$  leży poza kulą  $B(0, a)$ , funkcja  $(x, y) \mapsto K(x^*, y)$  jest harmoniczna (wewnątrz kuli), ze względu na  $y$  dla każdego  $x$ . Zatem funkcja

$$G(x, y) = K(x, y) - \left(\frac{|x|}{a}\right)^{2-n} K(x^*, y) \quad (101)$$

jest funkcją Greena zagadnienia Dirichleta dla kuli  $B(0, a)$ . Bezpośrednim rachunkiem dostajemy, że jądro Poissona  $H(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}$  dane jest wzorem

$$H(x, y) = \frac{1}{a\omega_n} \frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^n}. \quad (102)$$

Taki sam wynik dostajemy również dla  $n = 2$ . Zatem dla funkcji harmonicznej  $u$  mamy reprezentację

$$u(x) = \int_{\partial B(0, a)} H(x, y) u(y) \quad (103)$$

Niech  $g \in C(\partial B(0, a))$ . Pokażemy teraz, że funkcja dana całką Poissona

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial B(0, a)} H(x, y) g(y) & \text{dla } x \in B(0, a) \\ g(x) & \text{dla } x \in \partial B(0, a) \end{cases} \quad (104)$$

jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta

$$\Delta u = 0 \text{ na } B(0, a), \quad u = g \text{ na } \partial B(0, a).$$

Wynika to z następujących własności jądra Poissona (traktujemy je jako funkcję określoną na całym  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y)$ ,  $x \neq y$ ).

- (a)  $H$  jest klasy  $C^\infty$  dla  $x \neq y$ ,
- (b)  $\Delta_x H(x, y) = 0$  dla  $y = a$ ,
- (c)  $\int_{|y|=a} H = 1$ , dla  $|x| < a$ ,
- (d)  $H(x, y) > 0$  dla  $|x| < a$ ,
- (e) dla  $|z| = |y| = a$ ,  $y \neq z$  mamy zbieżność  $H(x, y) \rightarrow 0$  przy  $x \rightarrow z$ ,  $|x| < a$ , jednostajną na każdym zbiorze  $|y - z| > \delta > 0$ .

DOWÓD: Punkty (a), (d) są oczywiste, (b) dostajemy z bezpośredniego rachunku, a (c) wstawiając do (103)  $u \equiv 1$ . Pozostaje do wykazania (e), ale dla  $|y - z| > \delta > 0$

$$0 < H(x, y) < \frac{1}{a\omega_n \delta} (a^2 - |x|^2) \rightarrow 0.$$

■

Przechodząc w całce (104) z różniczkowaniem pod znak całki dostajemy z (b), że  $u$  jest harmoniczną wewnątrz kuli. Pozostaje do pokazania, że  $u$  jest ciągła w punktach brzegu. Niech więc  $|z| = a$  i  $|x| < a$ . Z (c) dostajemy

$$\begin{aligned} u(x) - g(z) &= \int_{|y|=a} H(x, y)(g(y) - g(z)) \\ &= \int_{|y|=a, |y-z| < \delta} H(x, y)(g(y) - g(z)) + \int_{|y|=a, |y-z| > \delta} H(x, y)(g(y) - g(z)). \end{aligned}$$

Z dodatniości  $H$ , ciągłości  $g$  i z (c) pierwsza całka  $< \varepsilon$  dla dostatecznie małego  $\delta$ . Z punktu (e) druga całka ma szacowanie

$$\left| \int_{|y|=a, |y-z| > \delta} H(x, y)(g(y) - g(z)) \right| \leq 2M \int_{|y|=a, |y-z| > \delta} H(x, y) < \varepsilon, \quad M = \max g,$$

dla  $x$  dostatecznie bliskiego  $z$ .

Pokazaliśmy więc, że funkcja określona wzorem (104) jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla kuli o środku w zerze. Biorąc pod uwagę niezmienniczość operatora Laplace'a względem przesunięć, dostajemy rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla dowolnej kuli w  $\mathbb{R}^n$ . Z wzoru Poissona dostajemy też oszacowanie pochodnych funkcji harmoniczej:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(0) = \int_{|y|=a} \frac{\partial H}{\partial x_i}(0, y)u(y) = \frac{n}{a\omega_n} \int_{|y|=a} y_i u(y) \quad (105)$$

i stąd

$$|u_{x_i}(0)| \leq \frac{n}{a} \max_{|y|=a} |u(y)|. \quad (106)$$

Analogiczną nierówność mamy dla dowolnej kuli.

Niech  $\Delta u = 0$  w obszarze ograniczonym  $\Omega$ . Oznaczmy przez  $d(x)$  odległość  $x$  od brzegu  $\partial\Omega$ . Stosując (106) do kul o środku w  $x$ , zawierających się w  $\Omega$  i przechodząc do granicy  $a \rightarrow d(x)$ , dostajemy nierówność

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{n}{d(x)} \max_{y \in \Omega} |u(y)|. \quad (107)$$

Podobne szacowania dostajemy dla wyższych pochodnych, zatem zbieżność niemal jednostajna funkcji harmoniczych w  $\Omega$  jest równoważna zbieżności niemal jednostajnej ze wszystkimi pochodnymi. Stąd granica niemal jednostajna funkcji harmoniczych jest też funkcją harmoniczną.

Niech teraz  $(u_k)$  będzie ciągiem funkcji harmoniczych w  $\Omega$ , ciągłych na  $\bar{\Omega}$ . Z zasady maximum, jeżeli ciąg ten jest zbieżny jednostajnie na brzegu, to jest zbieżny jednostajnie w  $\bar{\Omega}$ , więc zbieżny do funkcji harmoniczej w  $\Omega$ . Jeżeli z kolei ciąg  $(u_k)$  jest tylko wspólnie ograniczony na brzegu, to z oszacowania pochodnej wynika, że na każdym zwartym podzbiórze  $A \subset \Omega$  ciąg ma wspólnie ograniczoną pochodną, więc funkcje z ciągu są jednako ciągłe. Z twierdzenia Ascoli-Arzelii istnieje podciąg  $(u_{i_k})$  zbieżny jednostajnie na  $A$ . atwo stąd wywieść, że z ograniczonego ciągu funkcji harmoniczych można wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie do funkcji harmoniczej (tzn. podciąg, o którym była mowa powyżej, można wybrać wspólny dla wszystkich podzbiorów zwartych  $A$ ). Przestrzeń funkcji harmoniczych jest zupełna w normie jednostajnej, a w topologii niemal jednostajnej ma własność znaną dla skończone-wymiarowych przestrzeni unormowanych: zbiór ograniczony i domknięty jest zwarty!

**9.4. Metoda Perrona.** Znaczenie praktyczne metody Perrona jest ograniczone, ale warto się z nią zapoznać ze względu na jej elegancję, prostotę i matematyczne piękno. Opiera się ona na ciągu prostych obserwacji.

**O1** Niech  $w \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  będzie funkcją harmoniczną w  $\Omega$  i niech  $u$  będzie funkcją subharmoniczną i taką, że  $u \leq w$  na brzegu  $\partial\Omega$ . Wówczas  $u \leq w$  na całym  $\Omega$ . Istotnie, funkcja  $u - w$  jest subharmoniczna w  $\Omega$  i na brzegu jest mniejsza od zera. Z zasady maximum jest mniejsza od zera wszędzie (tzn. na całym  $\Omega$ ).

Przypomnijmy, że średnią sferyczną funkcji  $h$  jest  $M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y$ . Dla funkcji subharmonicznej mamy  $u(x) \leq M_u(x, r)$  dla dostatecznie małych  $r$ . Oznaczmy  $\Sigma(\Omega)$  zbiór funkcji subharmonicznych w  $\Omega$ .

**O2** Dla funkcji ciągłej  $u$ ,  $z \in \Omega$  i  $\rho$  takiego, że  $\bar{B}(z, \rho) \subset \Omega$  definiujemy funkcję  $u_{z, \rho}$  zastępując  $u$  w kole  $B(z, \rho)$  funkcją harmoniczną z warunkami  $g(y) = u(y)$  na sferze  $S(z, \rho)$ . Funkcja taka dana jest całką Poissona (104). *Zauważamy, że*

$$u(x) \leq u_{z, \rho}(x) \quad \text{dla wszystkich } x \text{ i } u_{z, \rho} \in \Sigma(\Omega). \quad (108)$$

Istotnie, z **O1** mamy nierówność w  $B(z, \rho)$ , a poza kołem nawet równość. Aby pokazać, że  $u_{z, \rho}$  jest podharmoniczna wystarczy zauważyć, że dla  $x \in S(z, \rho)$  i dostatecznie małego  $\tau$

$$u_{z, \rho}(x) = u(x) \leq M_u(x, \tau) \leq M_{u_{z, \rho}}(x, \tau).$$

Ostatnia nierówność wynika z (108).

**O3** Dla  $u \in \Sigma(\Omega)$  nierówność  $u(x) \leq M_u(x, r)$  zachodzi dla wszystkich  $r$  takich, że  $\bar{B}(x, r) \subset \Omega$ . Istotnie, dla takiego  $r$  mamy z (108)

$$u(x) \leq u_{x, r}(x) = M_{u_{x, r}}(x, r) = M_u(x, r).$$

**O4** Funkcja  $u$  jest harmoniczną w  $\Omega$  wtedy i tylko wtedy,  $u$  oraz  $-u$  należą do  $\Sigma(\Omega)$ . Konieczność wynika z twierdzenia Gaussa o średnich (93). Z drugiej strony, jeżeli  $u, -u \in \Sigma(\Omega)$ , to dla  $\bar{B}(z, r) \subset \Omega$  mamy z **O2**

$$u(x) \leq u_{z, r}(x), \quad -u(x) \leq (-u)_{z, r}(x) = -u_{z, r}(x) \quad \text{dla } x \in \Omega.$$

Stąd  $u = u_{z, r}$ , czyli  $u$  jest harmoniczną w  $B(z, r)$ .

Bezpośrednim wnioskiem jest

**O5** Jeżeli dla funkcji ciągłej  $u$  mamy równość  $u(x) = M_u(x, \rho)$  dla każdego  $x \in \Omega$  i dla wszystkich dostatecznie małych  $\rho$ , to  $u$  jest harmoniczną w  $\Omega$ .

Zdefiniujemy teraz kandydata na rozwiązanie problemu Dirichleta. Dla  $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$  definiujemy rodzinę funkcji

$$\Sigma_f(\bar{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \Sigma(\Omega) : u \leq f \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Rodzina ta nie jest pusta, bo należy do niej funkcja stała, równa  $\min f$ . Z zasady maximum mamy ponadto, że  $u(x) \leq \max f$  dla  $u \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$ . Zatem możemy zdefiniować funkcję  $w_f$  na  $\Omega$  wzorem

$$w_f(x) = \sup_{u \in \Sigma_f(\bar{\Omega})} u(x).$$

Zanim przejdziemy do dowodu, że  $w_f$  jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta, jeszcze jedna obserwacja.

**O5** Jeżeli  $u_i \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$ ,  $i = 1, \dots, k$ , to funkcja  $v = \max(u_1, \dots, u_k)$  należy do  $\Sigma_f(\bar{\Omega})$ .

Istotnie,  $v$  jest funkcją ciągłą i mamy

$$v(x) = \max(u_1(x), \dots, u_k(x)) \leq \max(M_{u_1}(x, \rho), \dots, M_{u_k}(x, \rho)) \leq M_v(x, \rho)$$

dla dostatecznie małych  $\rho$ .

STWIERDZENIE 8. Funkcja  $w_f$  jest harmoniczna w  $\Omega$ .

DOWÓD: Niech  $\bar{B}(z, \rho) \subset \Omega$  i niech  $\rho' < \rho$ . Wybieramy ciąg  $(x^i)$  punktów z  $B(z, \rho')$ . Dla każdego punktu  $x^i$  mamy ciąg  $u_i^j \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$  taki, że

$$w_f(x^i) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_i^j(x^i). \quad (109)$$

Relacja (109) zachowuje się, jeżeli  $u_i^j$  zastąpimy funkcją  $u \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$ , większą od  $u_i^j$ :  $u_i^j \leq u$ . Zbudujmy teraz nowy ciąg funkcji

$$u^j(x) = \max(u_i^j(x), \dots, u_j^j(x)).$$

Na mocy **O5**,  $u^j \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$  i  $u^j(x) \geq u_i^j(x)$  dla  $x \in \Omega$ ,  $j \geq i$ , więc  $\lim_{j \rightarrow \infty} u^j(x^k) = w_f(x^k)$ . Zastępujemy teraz  $u^j$  przez  $u_{z, \rho}^j$  i dostajemy ciąg funkcji zbieżnych do  $w_f$  w punktach ciągu  $(x^i)$ , które na  $B(z, \rho)$  są harmoniczne. Ciąg  $(u^j)$  jest ograniczony, więc można z niego wybrać podciąg zbieżny na  $B(z, \rho')$  do funkcji harmonicznej  $w$ . Oczywiście  $w(x^i) = w_f(x^i)$ .

Jeżeli  $x^i \rightarrow x \in B(z, \rho')$ , to dostajemy zbieżność ciągu  $w_f(x^i)$  i stąd wynika ciągłość  $w_f$ . Istotnie, niech  $w_f(x) = \lim w_f(x^i) + a$ . Gdyby  $a > 0$ , to istniałaby funkcja  $u \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$  taka, że  $w_f(x) > u(x) > w_f(x) - \frac{a}{2}$ . Z ciągłości  $u$  dostajemy, że dla dużych  $i$  mamy  $u(x_i) > w_f(x_i)$ . Sprzeczność. Podobnie, jeżeli  $a < 0$ , to dla każdego  $x_i$  istnieje  $u_i \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$  taka, że  $u_i(x_i) > w_f(x_i) + \frac{a}{2}$ . Z ciągłości  $u_i$  mamy, że  $u_i(x) > w_f(x)$  dla dostatecznie dużego  $i$ . Znowu sprzeczność, więc  $a = 0$ .

Jeżeli ciąg  $x^i$  tworzy zbiór gęsty w  $B(z, \rho')$ , to dostajemy równość  $w$  i  $w_f$  na zbiorze gęstym. Z ciągłości  $w_f$  wynika równość na całym  $B(z, \rho')$ .  $w_f$  jest harmoniczna w otoczeniu  $z$ , więc też na całym  $\Omega$ . ■

Pozostaje do wykazania, że  $w_f$  może być, w sposób ciągły, przedłużona do funkcji  $f$  na  $\partial\Omega$ . Tutaj sprawa jest subtelniejsza i wymaga pewnych założeń dotyczących brzegu  $\partial\Omega$ . Najpierw definicja: *barierę w punkcie  $z \in \partial\Omega$  nazywamy funkcję  $v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \Sigma(\Omega)$  taką, że  $v(z) = 0$  i  $v(x) < 0$  dla  $z \neq x \in \partial\Omega$ . O brzegu zakładamy będziemy, że każdy jego punkt ma barierę.*

STWIERDZENIE 9. Niech każdy punkt  $\partial\Omega$  ma barierę. Wówczas funkcja na  $\bar{\Omega}$

$$x \mapsto \begin{cases} w_f(x) & \text{dla } x \in \Omega \\ f(x) & \text{dla } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

jest ciągła.

DOWÓD: Wystarczy pokazać że jeżeli  $\Omega \ni x_n \rightarrow y \in \partial\Omega$ , to  $w_f(x_n) \rightarrow f(y)$ . Pokażmy najpierw, że  $\liminf w_f(x_n) \geq f(y)$ . Niech  $\varepsilon$  i  $K$  będą dodatnimi liczbami i niech  $v_z$  będzie barierą w  $z$ . definiujemy funkcję  $u$  wzorem

$$u(x) = f(y) - \varepsilon + K v_y(x).$$

Funkcja ta należy do  $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \Sigma(\Omega)$  i  $u(x) \leq f(y) - \varepsilon$  dla  $x \in \text{partial}\Omega$ . Z ciągłości  $f$  istnieje  $\delta > 0$ , że  $f(x) > f(y) - \varepsilon$  dla  $|x - y| < \delta$ ,  $x \in \partial\Omega$ . Zatem  $u(x) \leq f(x)$  dla takich  $x$ . Ponieważ  $v_y$  jest ujemna poza  $y$ , dla dostatecznie dużego  $K$  mamy również  $u(x) \leq f(x)$  dla  $|x - y| > \delta$ ,  $x \in \partial\Omega$ . Zatem dla takich  $K$  nierówność  $u(x) \leq f(x)$  mamy na całym brzegu i stąd  $u \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$ . Zatem  $u(x) \leq w_f(x)$  dla  $x \in \Omega$  i stąd

$$f(y) - \varepsilon = \lim u(x_n) \leq \liminf w_f(x_n).$$

W granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostajemy  $\liminf w_f(x_n) \geq f(y)$ .

Pokażemy teraz, że  $\limsup w_f(x_n) \leq f(y)$  Suma funkcji podharmonicznych jest funkcją podharmoniczną, więc jeżeli  $u, v \in \Sigma(\Omega)$  oraz,  $u \leq f$  i  $v \leq -f$  na brzegu, to  $u + v \leq 0$  na  $\Omega$ . Z zasady maximum,  $u(x) + v(x) \leq 0$  w  $\Omega$ . Stąd  $w_f \leq -w_{-f}$ , ale mamy z poprzedniego  $\liminf w_{-f}(x_n) \geq -f(y)$ , więc

$$\begin{aligned} \limsup w_f(x_n) &\leq \limsup(-w_{-f}(x_n)) \\ &= -\liminf w_{-f} \leq f(y). \end{aligned}$$

■





## **11. Zagadnienia eliptyczne metodą bezpośrednią.**

Słabe rozwiązania.

### **11.1. Funkcjonał działania (energii) i jego różniczka.**

### **11.2. Naturalne zagadnienie brzegowe.**

### **11.3. Zagadnienie Dirichleta.**

### **11.4. Regularność. Uwagi końcowe.**