1 Pochodne pierwszego rzędu

1.1 Podstawowe definicje

Def. Niech funkcja f będzie określona w pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt a. *Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie a dla przyrostu h* nazywamy funkcję

$$g_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Pochodną funkcji f w punkcie a (ozn. $f'(a)$) nazywamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

Inne oznaczenia pochodnej: Pochodną funkcji f w punkcie a oznacza się też:

$$\left.\frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x}\right|_{x=a}$$

bądź – jeśli nie trzeba podawać, w jakim punkcie jest liczona – jako $\frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x}$.

Oznaczenia $\frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x}$ pochodzą od Leibniza (XVII w.) – jednego z wynalazców (obok Newtona) rachunku różniczkowego. Pochodzenie tej symboliki jest następujące: Iloraz różnicowy (1) można zapisać jako:

$$\frac{\text{przyrost wartości funkcji } f}{\text{przyrost wartości argumentu } x} = \frac{\Delta f}{\Delta x};$$

pochodna jest granicą ilorazu różnicowego, i "w granicy" zastępuje się Δ przez d.

Uwaga. Symbol $\frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x}$ należy traktować jako *jedną całość*. O ile wielkości z licznika czy mianownika – tzn Δf czy Δx są dobrze określone, o tyle *oddzielnie* symbole $\mathsf{d}f$, $\mathsf{d}x$ – bez dodatkowych umów – nie mają sensu, lub są bezużyteczne. (gdyby np. rozpatrywać je w najbardziej narzucający się sposób, tzn. jako granice, gdy przyrost argumentu dąży do zera, to otrzymałoby się zero). Sensowna, bądź użyteczna, jest jedynie ich kombinacja $\frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}x}$.

Nie oznacza to, że *nie wolno* w ogóle posługiwać się symbolami w rodzaju $\mathsf{d}f$ czy $\mathsf{d}x$. Wolno, ale jedynie na etapie pośrednim jakiegoś rozumowania, którego finałem będzie jakiś w pełni legalny już symbol w rodzaju $\frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}x}$ czy $\int f(x)\mathsf{d}x$.

Przykł. $f(x) = x^2$, $f'(3) = 6$.

Pochodna funkcji w punkcie ma bardzo wyrazisty sens geometryczny. (RYS.) Rozpatrzmy wykres funkcji $y = f(x)$. Ustalmy dodatnie h i przeprowadźmy prrostą przez punkty: $(x, f(x))$ i $(x+h, f(x+h))$. Prostą taką nazywamy *sieczną* krzywej. Jak widać, iloraz różnicowy jest tangensem kąta α_h, który sieczna tworzy z osią OX. Gdy $h \to 0$, to sieczne dążą do prostej granicznej – *stycznej* do krzywej w punkcie x. Tak więc

$$f'(a) = \operatorname{tg}\alpha \tag{3}$$

Nie każda funkcja ciągła posiada pochodną (co w ilustracji geometrycznej znaczy, że nie każda krzywa posiada styczną, a jeśli nawet tak, to taka styczna nie jest jednoznacznie określona). I tak np. funkcja $f(x) = |x|$ nie posiada pochodnej w punkcie $x = 0$. Mamy bowiem:

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +1, \quad \text{oraz} \quad \lim_{h\to 0_-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$

W powyższym jednak przypadku możemy mówić o *pochodnych jednostronnych*, tzn. granicach ilorazów różnicowych: $\lim\limits_{h\to 0_+}$ (pochodna prawostronna) i $\lim\limits_{h\to 0_-}$ (pochodna lewostronna). Dokładniej, mamy:

Def. Pochodną *prawostronną* (*lewostronną*) funkcji f w punkcie a nazywamy granicę

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{4}$$

Są jednak też funkcje, które (w jakimś punkcie) w ogóle nie posiadają pochodnej – ani lewo-, ani prawostronnej. Np. funkcja:

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x \neq 0; \qquad f(0) = 0 \tag{5}$$

jest ciągła, lecz nie posiada pochodnej (ani lewo-, ani prawostronnej) w zerze. Nieistnienie tej pochodnej wynika np. z nieistnienia granicy $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. Bowiem granica ilorazu różnicowego:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$

nie istnieje, jak to widzieliśmy uprzednio (2 wykłady temu).

Istnieją także funkcje ciągłe, które nie posiadają pochodnej w *żadnym* punkcie.

Rozważamy też pochodne *nieskończone* (ma to miejsce, gdy granica ilorazu różnicowego w jakimś punkcie dąży do nieskończoności). I tak np. dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ mamy

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

(bo $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$); bądź dla pochodnej dwustronnej: weźmy $f(x) = \sqrt[3]{x}$,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty$$

Def. Mówimy, że funkcja jest *różniczkowalna* w przedziale otwartym, jeśli posiada pochodną skończoną w każdym punkcie tego przedziału. Funkcja jest różniczkowalna w przedziale domkniętym $[a,b]$, jeśli posiada pochodną w każdym punkcie wewnętrznym przedziału, a pochodną jednostronną (prawą lub lewą) w lewym /prawym końcu przedziału.

Def. Mówimy, że pochodna $f'(x)$ funkcji $f(x)$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$, jeśli $f'(x)$ jest ciągła wewnątrz przedziału, pochodna prawostronna jest ciągła prawostronnie w punkcie a, zaś pochodna lewostronna – ciągła lewostronnie w punkcie b.

1.2 Pierwsze zastosowania geometryczne i fizyczne pochodnej

Def. Przez *normalną* do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $p = (x, f(x)$ rozumiemy prostą, prostopadłą do stycznej w p i przechodzącej przez p.

Tak więc:

- równanie prostej stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $p = (x_0, y_0)$, gdzie $y_0 = f(x_0)$ jest:

  $$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$

  lub – w postaci być może łatwiejszej do zapamiętania –

  $$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{6}$$

- Dla prostej normalnej mamy: Współczynni kierunkowy tej prostej to $-\frac{1}{f'(x_0)}$, co daje równanie prostej
$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}x + y_0 + \frac{x_0}{f'(x_0)}$$
lub w równoważnej postaci
$$f'(x_0)(y - y_0) = -(x - x_0). \tag{7}$$

W fizyce, znaczeniem pochodnej jest *prędkość* (zmiany jakiejś wielkości fizycznej w czasie). I tak, prototypem wszelkich takich wielkości jest *droga* (punktu materialnego jako funkcja czasu). Pochodna drogi po czasie – to właśnie prędkość. Analogicznie definiuje się inne rodzaje prędkości. Np. gdy mamy rozpad promieniotwórczy substancji radioaktywnej, to możemy mówić o szybkości rozpadu (prędkości ubytku masy substancji radioaktywnej).

1.3 Różniczkowanie funkcji elementarnych

Zauważmy najsampierw, że jest prawdziwe

Tw. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to jest w tym punkcie ciągła.

Dow. Skoro f jest różniczkowalna w punkcie x, to istnieje i jest skończona granica ilorazu różnicowego
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$
tak więc
$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot h = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h = 0,$$
co oznacza, że f jest ciągła w punkcie x.

CBDO

Tw. Pochodna funkcji stałej: $f(x) = c$ jest równa 0:
$$\frac{\mathsf{d}c}{\mathsf{d}x} = 0 \tag{8}$$
Dow. Bowiem: $f(x+h) = c$, $f(x) = c$, co daje
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

CBDO

Tw. Pochodna funkcji identycznościowej $f(x) = x$ jest równa 1:
$$\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}x} = 1. \tag{9}$$
Dow. Mamy:
$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1.$$

Tw. Mamy następujące wzory dotyczące różniczkowania sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych. Jeśli $f(x)$, $g(x)$ są różniczkowalne w punkcie x, to mamy
$$\frac{\mathsf{d}(f(x) \pm g(x))}{\mathsf{d}x} = \frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x} \pm \frac{\mathsf{d}g(x)}{\mathsf{d}x} \quad \text{lub krócej} \quad \boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}; \tag{10}$$

$$\frac{\mathsf{d}(f(x)\cdot g(x))}{\mathsf{d}x} = \frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x}\cdot g(x) + \frac{\mathsf{d}g(x)}{\mathsf{d}x}\cdot f(x) \text{ lub } \boxed{(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)} \tag{11}$$

$$\frac{\mathsf{d}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\mathsf{d}x} = \frac{\frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x}\cdot g(x) - \frac{\mathsf{d}g(x)}{\mathsf{d}x}\cdot f(x)}{g^2(x)} \text{ lub } \boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}} \tag{12}$$

Dow. (10) (dla sumy):

$$(f(x)+g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x);$$

dla różnicy dowód jest analogiczny.

Dow. (11)

$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x)) + (f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x).$$

Dow. (12). Pokażemy najsampierw:

$$\frac{\mathsf{d}\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{\mathsf{d}x} = -\frac{1}{f^2(x)}\frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x}. \tag{13}$$

Mamy bowiem:

$$\frac{\mathsf{d}\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{\mathsf{d}x} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{h} =$$

$$-\frac{1}{\lim_{h\to 0} g(x+h)}\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\frac{1}{g^2(x)}\cdot\frac{\mathsf{d}g(x)}{\mathsf{d}x}, \tag{14}$$

bo $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$; i ponadto, ponieważ $g(x) \neq 0$, to istnieje takie $\delta > 0$, że dla $|h| < \delta$ zachodzi $g(x+h) \neq 0$, tak więc wszystkie wyrażenia w (14) są dobrze określone.

Teraz (12) wynika z (11) oraz (13):

$$\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{1}{g^2(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}. \tag{15}$$

Wniosek. Podstawiając we wzorach (10) oraz (11): $f(x) = c$, otrzymamy:

$$(f(x)+c)' = f'(x), \tag{16}$$

$$(c\cdot f(x))' = cf'(x). \tag{17}$$

Wzór (16) mówi, że przesunięcie wykresu funkcji $f(x)$ wzdłuż osi $0Y$ nie ma wpływu na wartość kąta, tworzonego przez styczną z osiami (RYS.). Wzór natomiast (17) mówi, że jeżeli przeskalujemy wykres funkcji $y = f(x)$ c razy, to tyle samo razy zwiększy się tangens kąta nachylenia stycznej.

Tw.

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Dow. Dowodzi się indukcyjnie. Dla $n = 0$ i $n = 1$ wzór ten jest prawdziwy – p. (8) i (9). Załóżmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla $n - 1$, i mamy dla n, z wykorzystaniem (11)

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = n \cdot x^{n-1}.$$

CBDO

Tw. $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

Dow. Weźmy teraz $n < 0$. Mamy, z (14) i (18)

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = -\frac{1}{x^{-2n}}(x^{-n})' = n \cdot x^{-n-1} \cdot \frac{1}{x^{-2n}} = n \cdot x^{n-1}.$$

CBDO

Uwaga. Wzór ten słuszny jest też dla dowolnych wykładników rzeczywistych, co udowodnimy nieco później.

Z pokazanych właśnie faktów wynika od razu

Tw. (wzór na pochodną wielomianu).

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)' = na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Tw. $(\sin\ x)' = \cos x$.

Dow.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{h} \cdot \sin(\frac{h}{2}) \cdot \cos(x + \frac{h}{2}) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0}\cos(x + \frac{h}{2}) = \cos x \tag{19}$$

Tw. $(\cos\ x)' = -\sin\ x$. **Dow.**

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2}{h} \cdot \sin(\frac{h}{2}) \cdot \sin(x + \frac{h}{2}) =$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0}\sin(x + \frac{h}{2}) = \sin x \tag{20}$$

Tw.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dow.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Tw. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ i ogólniej$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Dow.

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right].$$

Podstawmy teraz $y = \frac{h}{x}$. Ponieważ $\lim\limits_{h\to 0} y = 0$, to

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Mamy: $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. Pamiętając, że logarytm jest funkcją ciągłą wszędzie w dziedzinie, a w szczególności dla wartości argumentu równej e, mamy

$$\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}} = \ln\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \ln e = 1,$$

zatem

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Drugą część twierdzenia otrzymamy z własności logarytmu:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

1.4 Pochodna funkcji odwrotnej

Niech będzie dana w przedziale $[a, b]$ funkcja różniczkowalna i różnowartościowa $y = f(x)$. Wiadomo, że istnieje wówczas funkcja odwrotna f^{-1} (którą oznaczymy tu g: $x = g(y)$), ciągła w przedziale $[f(a), f(b)]$ (lub $[f(b), f(a)]$ – zależnie od tego, czy f jest rosnąca czy malejąca). Pokażemy, że w tym przedziale funkcja g też jest różniczkowalna, a przy okazji wyprowadzimy wzór na pochodną funkcji odwrotnej. Mianowicie mamy

Tw. Jeśli $f(x) = y$ tzn. $x = g(y)$, to

$$g'(y) \equiv \frac{\mathsf{d}g(y)}{\mathsf{d}y} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x}}. \tag{21}$$

przy założeniu że $f'(x) \neq 0$.

Dow. Przy zadanym x weźmy $k = f(x+h) - f(x)$. Mamy więc $f(x+h) = y + k$, tzn. $x + h = g(y+k)$, skąd $h = g(y+k) - g(y)$. Możemy więc traktować h jako funkcję k. Ze względu na ciągłość funkcji g, mamy $\lim\limits_{k\to 0} h(k) = 0$, a ponadto dla $k \neq 0$ mamy $h \neq 0$, ponieważ funkcja g jest różnowartościowa. Mamy więc:

$$g'(y) = \lim_{k\to 0}\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Przy drugiej równości powyżej korzystaliśmy z faktu, iż dla funkcji ciągłych $F(x)$, $G(y)$ mamy: Jeśli $y_0 = F(x_0)$, to $\lim\limits_{x\to x_0} G(F(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} G(y)$.

CBDO

Uwaga. Twierdzenie powyższe ma ilustrację/interpretację geometryczną. Rozpatrzmy krzywą daną równaniem $y = f(x)$. Poprowadźmy w jakimś punkcie $(x_0, y_0$ (tu $y_0 = f(x_0)$) styczną do tej krzywej i znaczmy przez α kąt utworzony przez styczną z osią OX, a przez β – kąt utworzony przez styczną z osią OY. Oczywiście $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Wówczas $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$ czyli $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ – zgodnie z wzorem (21).

Za pomocą powyższego twierdzenia policzymy pochodne kolejnych funkcji elementarnych.

Tw. $(e^x)' = e^x$ i, ogólniej, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Dow. Weźmy $y = f(x) = e^x$; wtedy $x = f^{-1}(y) \equiv g(y) = \ln y$. Mamy: $g'(y) = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{f'(x)}$, a ostatnia równość to właśnie $f'(x) = (e^x)' = e^x$.

W ogólniejszym przypadku $(a^x)'$, bierzemy $y = f(x) = a^x$, a dla funkcji odwrotnej $x = g(y) = \log_a y$. Pamiętamy, że $g'(y) = \frac{1}{y \ln a} = \frac{1}{f'(x)} \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$.

CBDO

Tw. a) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, b)$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dow. a) Weźmy $y = f(x) = \arcsin x$ i wtedy $x = g(y) = \sin y$. Mamy: $g'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{f'(x)}$, (znak pierwiastka to plus, bo $x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$), a ostatnia równość to $f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Rozważania są analogiczne: $y = f(x) = \arccos x$, $x = g(y) = \cos y$; jedyna różnica jest w znaku, bo $g'(y) = -\sin y$ i dalej jak w a), z wynikiem końcowym $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

CBDO

Tw. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Dow. Dla $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$ jest $x = g(y) = \operatorname{tg} y$, $g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$; stąd $f'(x) = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

1.5 Ekstrema funkcji. Twierdzenie Rolle'a

Def. Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu a (tzn. w jakimś przedziale otwartym, zawierającym a). Jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że

$$\forall_{h:|h|<\delta} : f(a+h) \leqslant f(a), \tag{22}$$

to mówimy, że funkcja $f(x)$ ma *maksimum* w punkcie a.

Jeśli za ś przy analogicznych założeniach mamy nierówność:

$$f(a+h) \geqslant f(a), \tag{23}$$

to mówimy, że funkcja $f(x)$ ma *minimum* w punkcie a.

Innymi słowy, w punkcie a występuje maksimum (minimum), jeśli istnieje takie otoczenie $\mathcal{U}$ punktu a, że $f(a)$ jest największą (najmniejszą) liczbą w zbiorze wartości, jakie funkcja f przyjmuje na $\mathcal{U}$.

Jeśli we wzorach (22) i (23) zastąpić znaki $\geqslant$ ($\leqslant$) przez $>$ ($<$), to mamy do czynienia z maksimum (minimum) *właściwym*.

Def. Maksima i minima obejmujemy wspólną nazwą *ekstremów* funkcji f.

Przykł.

1. Funkcja x^2 posiada minimum w punkcie $x = 0$;

2. funkcja $\cos x$ posiada maksima w punktach $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oraz minima w punktach $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. funkcja $|x|$ posiada minimum w $x = 0$.

Z pojęciem ekstremum ściśle jest związane (ale różne) pojęcie *kresów wartości funkcji na zbiorze*. Ekstrema są pojęciami *lokalnymi*: Aby stwierdzić, czy funkcja posiada ekstremum w danym punkcie a, wystarczy znać wartości funkcji *w dowolnie małym otoczeniu* punktu a. Natomiast wyznaczenie kresów zbioru wartości funkcji na zbiorze X wymaga znajomości funkcji na *całym* X.

Z definicji maksimum wynika natychmiast

Tw. Jeśli funkcja f określona w przedziale $[a, b]$ osiąga kres górny w punkcie c należącym do wnętrza tego przedziału (tzn. $a < c < b$), to funkcja posiada maksimum w c. (analogicznie dla kresu dolnego i minimum).

CBDO

Jeśli okaże się, że kres górny funkcji jest osiągany w jednym z końców przedziału $[a, b]$ (np. w a), to *nie mówimy*, iż w tym punkcie funkcja posiada maksimum, ponieważ funkcja nie jest określona w otoczeniu a. Np. funkcja $y = x$ na zbiorze $X = [0, 1]$ posiada kres górny równy 1; nie nazywamy go jednak maksimum.

Tw. . Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c i posiada w tym punkcie ekstremum, to $f'(c) = 0$.

Dow. Załóżmy, że f posiada w punkcie c maksimum (jeśli minimum, to rozumowanie jest analogiczne). Weźmy więc takie $\delta > 0$, aby dla dowolnego h takiego, że$|h| < \delta$, zachodziła nierówność $f(c+h) - f(c) \leqslant 0$. Dzieląc przez h, otrzymujemy

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad h > 0, \qquad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad h < 0.$$

Ponieważ z założenia istnieje pochodna $f'(c)$, to

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c).$$

Z poprzednich nierówności wynika jednak, że $f'_+(c) \leqslant 0 \leqslant f'_-(c)$. Musi więc być

$$f'_+(c) = 0 = f'_-(c), \ \text{ co znaczy, że } f'(c) = 0.$$

CBDO

Uwaga. Twierdzenie odwrotne *nie zachodzi*: Równość $f'(c) = 0$ może być spełniona, mimo iż funkcja f nie posiada ekstremum w c. Jest tak np. dla funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x = 0$.

Def. Jeśli funkcja jest różniczkowalna w $x = a$ i $f'(a) = 0$, to punkt $x = a$ nazywamy *punktem krytycznym* funkcji f.

Uwaga. Istnienie ekstremum funkcji różniczkowalnej w punkcie c oznacza, że styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(c, f(c)$ jest równoległa do osi OX (z możliwością, że się z tą osią pokrywa).

Tw. (Rolle'a). Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje takie c, że $a < c < b$ oraz $f'(c) = 0$.

Dow. Jeśli funkcja f jest stała, to $\forall_{x \in [a,b]} f'(x) = 0$. Można wtedy wziąć dowolny $x \in]a, b[$ i teza tw. Rolle'a będzie spełniona.

Załóżmy więc, że funkcja f nie jest stała; np. niech przyjmuje wartości większe od $f(a)$. Oznaczając przez M kres górny zbioru wartości funkcji na przedziale $[a, b]$, mamy: $M > f(a)$. Zatem, z tw. Weierstrassa, istnieje takie $c \in [a, b]$, że $f(c) = M$. Przy tym $a \neq c \neq b$, ponieważ z założenia $f(a) = f(b)$; zatem $a < c < b$. To znaczy, że funkcja f osiąga kres górny w punkcie c położonym wewnątrz przedziału $[a, b]$. Zgodnie z twierdzeniem niedawno udowodnionym funkcja f posiada w punkcie c *maksimum*, co z kolei implikuje (pamiętając o rózniczkowalności f wewnątrz przedziału), że $f'(c) = 0$.

CBDO

Rys. – ilustracja tw. Rolle'a.

Uwaga. Twierdzenie Rolle'a można tak sformułować: Jeśli $f(x) = f(x+h)$, to istnieje takie $\theta : 0 < \theta < 1$, że

$$f'(x + \theta h) = 0. \tag{24}$$

przy tych samych założeniach, tzn. funkcja f ma być różniczkowalna wewnątrz przedziału $[x, x+h]$ (lub $[x+h, x]$, jeśli $h < 0$; nie zakładamy tu, że $h > 0$ lecz jedynie że $h \neq 0$) i ciągła w x oraz $x + h$.

1.6 Twierdzenie Lagrange'a i Cauchy'ego

Tw. (Lagrange'a). Załóżmy (podobnie jak w tw. Rolle'a), że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Zachodzi wówczas wzór

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \theta h), \tag{25}$$

gdzie $h = b - a$ oraz $\theta \in]0, 1[$.

Uwaga. Wzór ten nazywany jest też wzorem Lagrange'a na wartość średnią, lub twierdzeniem o przyrostach skończonych.

Rys. – ilustracja tw. Lagrange'a.

Widać, że szczególnym przypadkiem (gdy $f(a) = f(b)$) jest tw. Rolle'a. Okazuje się, że dowód tw. Lagrange'a można sprowadzić do tw. Rolle'a.

Dow. Weźmy mianowicie funkcję

$$g(x) = f(a) - f(x) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{26}$$

i ponadto $g(x)$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w $]a, b[$; jej pochodna jest

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ponadto $g(b) = 0 = g(a)$, zatem $g(x)$ spełnia założenia tw. Rolle'a. Skoro tak, to pochodna $g'(x)$ znika w pewnym punkcie między a i b. Możemy to wypowiedzieć tak, że istnieje takie $\theta : 0 < \theta < 1$, że

$$g'(a + \theta h) = 0 \quad \text{tzn.} \quad 0 = -f'(a + \theta h) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

czyli zachodzi wzór z tezy tw. Lagrange'a.

CBDO

Uwaga. W sposób podobny, jak wzór (24) przy tw. Rolle'a, można tezę tw. Lagrange'a sformułować jako:

Dla funkcji f różniczkowalnej wewnątrz przedziału $[x, x+h]$ i ciągłej na $[x, x+h]$ (to dla $h > 0$; dla $h < 0$ jest to przedział $[x+h, x]$) istnieje takie $\theta : 0 < \theta < 1$, że

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h) \cdot h. \tag{27}$$

Z tw. Lagrange'a wypływają dwa wnioski, bardzo ważne dla rachunku całkowego:

Tw. Jeśli $\forall_{x\in]a,b[}$ zachodzi $f'(x) = 0$, to funkcja w tym przedziale jest stała.

Dow. Na mocy udowodnionego dopiero co wzoru (27), mamy bowiem dla każdego x i h: $f(x) = f(x+h)$, co oznacza, że $f(x)$ =const.

CBDO

Tw. Jeśli $\forall_{x\in]a,b[}$ zachodzi $f'(x) = g'(x)$, to $f(x) = g(x)$+const.

Dow. Mamy: $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x) = 0$, czyli funkcja $f(x)-g(x)$ ma pochodną równą zeru. Na mocy dopiero co udowodnionego twierdzenia znaczy to, że $f(x) - g(x)$ jest stała, tzn. $f(x) = g(x)$+const.

CBDO

Tw. (Cauchy'ego; czasem z przydomkiem: O wartości średniej). Jeśli funkcje f i g są ciągłe na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalne wewnątrz oraz jeśli $\forall_{x\in]a,b[}$ jest $g'(x) \neq 0$, to istnieje takie $\theta \in]0, 1[$, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}, \tag{28}$$

gdzie $h = b - a$.

Przed dowodem

Uwaga. Twierdzenie Lagrange'a otrzymuje się z tw. Cauchy'ego, jeśli podstawić $g(x) = x$. Okazuje się, że także tw. Cauchy'ego wynika z tw. Lagrange'a, ale tu trzeba zaargumentować następująco:

Dow. Weźmy funkcję

$$G(x) = f(a) - f(x) + (g(x) - g(a))\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(mianownik $g(b)-g(a)$ jest różny od zera ze względu na założenie, że wszędzie w przedziale $]a, b[$ mamy $g'(x) \neq 0$ i tw. Rolle'a).

Funkcja $G(x)$ spełnia założenia tw. Rolle'a: Jest różniczkowalna i ciągła jak trzeba, oraz $G(a) = 0 = G(b)$. Pochodna funkcji $G(x)$ jest

$$G'(x) = -f'(x) + g'(x)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}; \tag{29}$$

zatem (z tw. Rolle'a) istnieje takie $\theta \in]a, b[$, że $G'(a + \theta h) = 0$. Podstawiając $x = a + \theta h$ we wzorze (29), otrzymujemy (28).

Analogicznie do sposobu, w jaki tw. Rolle'a i Lagrange'a były wyrażane wzorami (24) i (27), można tw. Cauchy'ego sformułować tak: Istnieje $\theta \in]0, 1[$ takie, że

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)}. \tag{30}$$

Uwaga: W powyższym wzorze θ jest TO SAMO w liczniku i mianowniku.

1.7 Różniczkowanie funkcji złożonych

Niech $y = f(x)$, $z = g(y)$, przy tym funkcja g jest określona na zbiorze wartości funkcji f; ponadto niech f i g będą różniczkowalne, a pochodna g' niech będzie ciągła. Następujący wzór wyraża pochodną funkcji złożonej $g(f(x))$ przez pochodne f' i g'.

Tw.

$$(g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(f(x)), \quad \text{tzn.} \frac{\mathsf{d}(g(f(x))}{\mathsf{d}x} = \frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x} \cdot \left[\frac{\mathsf{d}g(y)}{\mathsf{d}y}\right]_{y=f(x)}. \tag{31}$$

Dow. Przy danych x i $h \neq 0$ weźmy $k = f(x+h) - f(x)$, tzn. $f(x+h) = y + k$.

Zastosujmy teraz wzór Lagrange'a na wartość średnią w wersji (27) do funkcji g; otrzymamy

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(y+k) - g(y)}{h} = g'(y+\theta k) \cdot \frac{k}{h} = g'(y+\theta k) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

dla pewnego $\theta \in]0,1[$ (pamiętajmy, że θ jest pewną funkcją h). Co stanie się z powyższym wyrażeniem, gdy weźmiemy jego granicę przy $h \to 0$? Otóż ze względu na ciągłość funkcji g, mamy $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$, a ponieważ $0 < \theta < 1$, to również $\lim\limits_{h\to 0} \theta k = 0$. Skoro tak, to $\lim\limits_{h\to 0}(y + \theta k) = y$, co – w połączeniu z ciągłością funkcji g' – daje

$$\lim_{h\to 0} g'(y+\theta k) = g'(y) = g'(f(x)).$$

Mamy więc:

$$\frac{\mathsf{d}g(f(x))}{\mathsf{d}x} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0} g'(y+\theta k) \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Przykł. $(\sin^2 x)'$ na dwa sposoby

Przykł.$(e^{\sin x})' = ...$

Przykł. Udowodnimy teraz anonsowany wcześniej wzór

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Dow. Napiszmy x^a w postaci: $x^a = e^{a \ln x}$ i ze wzoru na pochodną funkcji złożonej

$$(x^a)' = (e^{a\ln x})' = \frac{\mathsf{d}e^{a\ln x}}{\mathsf{d}x} = \frac{\mathsf{d}a\ln x}{\mathsf{d}x} \cdot \left.\frac{\mathsf{d}e^y}{\mathsf{d}y}\right|_{y=a\ln x} = a\frac{1}{x}e^y|_{y=a\ln x} = ax^{-1}x^a = ax^{a-1}$$

CBDO

Niejednokrotnie trzeba kilkakrotnie zastosować twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej. Mamy np. pochodną funkcji trzykrotnie złożonej:

$$h(g(f(x)))' = f'(x) \cdot g'(f(x)) \cdot h'(g(f(x))$$

Sztuczka mnemotechniczna: Wzór powyższy można zapamiętać np. w następujący sposób: Oznaczmy: $y = f(x)$, $z = g(y)$, $w = h(z)$, oraz $W(x) = h(g(f(x)))$. Można wtedy napisać

$$\frac{\mathsf{d}W}{\mathsf{d}x} = \frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}z} \cdot \frac{\mathsf{d}z}{\mathsf{d}y} \cdot \frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x},$$

pamiętając, w jakich punktach są liczone wszystkie pochodne.

W powyższym wzorze pochodne zachowują się jak *ułamki*. Ale UWAGA! Jest to zbieżność przypadkowa; inne pochodne (zwł. cząstkowe) już się tak nie zachowują!

Uwaga – wzór na pochodną funkcji odwrotnej z wzoru na pochodną funkcji złożonej

1.8 Związek między znakiem pochodnej a monotonicznością funkcji

Z tw. Lagrange'a wynika następujący związek pomiędzy znakiem pochodnej a tym, czy funkcja rośnie, czy maleje.

Tw. * Jeśli $\forall_{x\in[a,b]}$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$, to funkcja f jest w tym przedziale ściśle rosnąca. Jeśli mamy $f'(x) < 0$, to funkcja f jest ściśle malejąca.

Dow. Z wzoru (27) mamy, dla $h > 0$: $f(x+h) > f(x)$ jeśli w przedziale $[x, x+h]$ pochodna jest stale dodatnia, bądź $f(x+h) < f(x)$, jeśli pochodna jest stale ujemna. Czyli funkcja jest ściśle rosnąca w pierwszym przypadku, a ściśle malejąca w drugim.

CBDO

Uwaga. Jeśli założyć, że zachodzi nierówność nieostra $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$), to w tezie mamy, że funkcja jest rosnąca (malejąca).

Zachodzi również twierdzenie odwrotne do powyższego:

Tw. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c i rośnie (maleje) w jakimś przedziale $]a, b[$ zawierającym ten punkt, to $f'(c) \geqslant 0$ (odpowiednio $f'(c) \leqslant 0$).

Dow. Jeśli f rośnie, to dla $h > 0$ mamy

$$f(c+h) - f(c) \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

i przechodząc do granicy $\lim\limits_{h\to 0}$ otrzymujemy $f'(c) \geqslant 0$.

Jeśli funkcja f maleje, to rozumowanie jest analogiczne.

CBDO

Z tw. * wynika

Tw. Jeśli $f'(c) > 0$ i pochodna $f'(x)$ jest ciągła w punkcie c, to funkcja f jest ściśle rosnąca w pewnym otoczeniu punktu c.

Analogicznie: Jeśli $f'(c) < 0$ i pochodna $f'(x)$ jest ciągła w punkcie c, to funkcja f jest ściśle malejąca w pewnym otoczeniu punktu c.

Dow. Ponieważ funkcja $f'(x)$ jest ciągła w c, to nierówność $f'(c) > 0$ mówi, że w pewnym otoczeniu punktu c funkcja $f'(x)$ jest dodatnia: $\exists_{\delta>0} : \forall_{h<\delta} : f'(c+h) > 0$. Znaczy to, że pochodna f' jest dodatnia $\forall_x : c - h < x < c + h$. Na mocy Tw. *, funkcja f jest rosnąca w tym przedziale.

CBDO

Uwaga. Powyższe twierdzenie można przeformułować w następujący sposób:

i) Jeśli $f'(c) \neq 0$, to (przy założeniu ciągłości pochodnej) funkcja f jest różnowartościowa w pewnym otoczeniu punktu c, tzn. dla $]c-\delta, c+\delta[$ ($\delta > 0$). Skoro tak, to funkcja f posiada w tym przedziale funkcję odwrotną $x = g(y)$, czyli równanie: $y = f(x)$ posiada w tym przedziale dokładnie jedno rozwiązanie..

ii) Jak wiemy, pochodna tejże funkcji odwrotnej $g'(y)$ jest odwrotnością pochodnej funkcji $f'(x)$.

iii) Powyższe fakty: Przy założeniu $f'(c) \neq 0$ istnieje w otoczeniu punktu $f(c)$ funkcja odwrotna, lub że równanie: $y = f(x)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie o otoczeniu punktu c – przenoszą się na wyższe wymiary, tzn. zachodzą dla odwzorowań $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Oczywiście konieczne jest stosowne uogólnienie pojęć. Będzie o tym mowa w semestrze II.

1.9 Wyrażenia nieoznaczone i reguła de l'Hospitala

Często zdarza się konieczność obliczania granic postaci następującej:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{gdzie} \quad f(a)=0=g(a). \tag{32}$$

Wyrażenia tego rodzaju noszą nazwę *wyrażeń nieoznaczonych typu* $\frac{0}{0}$.

Tw. Jeśli funkcje f i g są ciągłe w przedziale domkniętym $[a,b]$ i są różniczkowalne wewnątrz tego przedziału i jeśli $f(a)=0=g(a)$, to

$$\lim_{x\to a_+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a_+}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{33}$$

przy założeniu, że ta ostatnia granica istnieje.

Dow. Kluczem do dowodu jest twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej (2 strony wcześniej).

Oznaczmy: $x=a+h$. Należy dowieść, że

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{f(x+h)}{g(x+h)}=\lim_{h\to 0_+}\frac{f'(x+h)}{g'(x+h)}. \tag{34}$$

Ale: Równości: $f(a)=0=g(a)$ i wzór Cauchy'ego (28) dają:

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

dla pewnego $\theta\in]0,1[$.

Oznaczmy $F(x)=\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Z założenia $\lim\limits_{h\to 0_+}F(a+h)$ istnieje. Ponieważ zaś $\lim\limits_{h\to 0_+}=0$, to też $\lim\limits_{\theta h\to 0_+}=0$ i, co za tym idzie, $\lim\limits_{h\to 0_+}F(a+\theta h)$ też istnieje i jest równe $\lim\limits_{h\to 0_+}F(a+h)$; mamy więc

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)}=\lim_{h\to 0_+}\frac{f'(x+h)}{g'(x+h)}$$

skąd otrzymujemy wzór (33).

CBDO

Analogiczne twierdzenie mamy w przypadku granicy lewostronnej.

W przypadku, gdy pochodne f' i g' są ciągłe w punkcie a, a ponadto $g'(a)\neq 0$, ze wzoru (33) (plus jego odpowiednika dla granicy lewostronnej) natychmiast wynika *wzór de l'Hospitala*:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{35}$$

Uwaga: Po prawej stronie powyższego wzoru nie ma granicy!

Analogiczne wzory mamy w przypadku granic jednostronnych i pochodnych jednostronnych.

Przykł.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

Uwaga. Jeśli zdarzy się, że po prawej stronie wyrażenia (35) mamy $f'(a)=g'(a)=0$, to tegoż wzoru *nie daje* się stosować. Ale można postępować rekurencyjnie! tzn. badać wyższe pochodne.

Uwaga. Powyższe twierdzenia dotyczyły wyrażeń typu $\frac{0}{0}$. Przez sztuczki z zamianą zmiennych i inne, można też liczyć inne wyrażenia nieoznaczone: $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; 1^{∞}; 0^0; ∞^0.

NA ĆWICZENIA: Powyższe typy granic z wyprowadzeniami i przykładami; oraz asymptoty funkcji.