MATEMATYKA II – liczby zespolone
lista nr 1, 15.02.2012

1. Pokazać, że:

   (a) Zbiór liczb postaci: $a + b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, jest ciałem liczbowym. Oznaczamy je $Q(\sqrt{2})$; jest ono rozszerzeniem ciała liczb wymiernych.

   (b) Zbiór liczb postaci: $a + b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, *nie jest* ciałem liczbowym.

   (c) Natomiast zbiór liczb postaci: $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi, jest już ciałem liczbowym.

   (d) Zbiór liczb postaci: $(a + bi) + (c + di)\sqrt{5}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, jest ciałem liczbowym.

2. Przedstawić w postaci $a + bi$ podane liczby zespolone:
   a) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$; b) $(1 - i)^3$; c) $(1 + i)^5$; d) $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$; e) $(3 + i)^3 + (3 - i)^3$; f) i^{98}; g) i^{77}; h) i^{-57}; i) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; j) $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ k) $(1 + i)^{8n}$, $n \in \mathbb{Z}$; l) $(1 - i)^{4n}$, $n \in \mathbb{Z}$; ;

3. Rozwiązać równania:
   a) $z^2 = i$; b) $z^2 = 3 - 4i$; c) $z^2 = 5 - 12i$; d) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$; e) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$

4. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone sprzężone do swojego kwadratu (czyli spełniające równanie $\bar{z} = z^2$).
   Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone sprzężone do swojego sześcianu (czyli spełniające równanie $\bar{z} = z^3$).

5. Obliczyć moduły liczb:
   a) $\sqrt{3} - i$; b) $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}, \lambda \in \mathbb{R}$; c) $(1 + i)^{99}$; d) $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2012}$

6. Rozwiązać równania:
   a) $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$; b) $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$. ;

7. Rozwiązać równanie:

   (a) $z^6 = (\bar{z} + 1)^6$;

   (b) $\left(\dfrac{1 - \bar{z}}{1 + z}\right)^{2003} = 1$;

   (c) $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$

   (d) $z^3 + 4i|z| = 0$;

   (e) $z^2 - 12\bar{z} + 61 = 0$.

8. Opisać geometrycznie i narysować zbiór:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \,;|z| \leqslant 4\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{C} \ : |z-1+2i| \geqslant 9\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{C} \ : z = \dfrac{1+2i}{1+ti}, t \in \mathbb{R}\}$.

9. Rozwiązać układy równań:

$$a)\left\{\begin{array}{ccccc}(1+i)z_1 & + & (1-i)z_2 & = & 1+i\\ (1-i)z_1 & + & (1+i)z_2 & = & 1+3i\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc}2z_1 & - & (2+i)z_2 & = & -i\\ (4-2i)z_1 & - & 5z_2 & = & -1-2i\end{array}\right.$$

10. Udowodnić równość:
$\forall u,v \in \mathbb{C}: \quad |u+v|^2+|u-v|^2 = 2|u|^2+2|v^2|$
Jakie jest jej geometryczne znaczenie?

11. Wyrazić w postaci wielomianów od $\sin x$ i $\cos x$ funkcje:
a) $\sin 4x$; b) $\cos 4x$; c) $\sin 5x$; d) $\cos 5x$.

12. Wykazać równości:

(a) $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

(b) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\phi = \frac{\sin 2n\phi}{2\sin\phi}$, jeśli $\phi \neq 0$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2 k\phi = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\phi \sin n\phi}{2\sin\phi}$, jeśli $\phi \neq 0$;

(e) $\cos 8^\circ + \cos 16^\circ + \cos 24^\circ + \cdots + \cos 176^\circ = -\dfrac{1}{2}$;

(f) $\sin^2 4^\circ + \sin^2 8^\circ + \sin^2 12^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ = \dfrac{45}{4}$.

13. Podać wzory dla sum:

(a) $\cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$,

(b) $\sin x + 2\sin 2x + \cdots + n\sin nx$

Wskazówka. Udowodnić najsampierw (przez indukcję lub inaczej – metody zapożyczone z analizy są dozwolone) wzór:

$$z + 2z^2 + \cdots + nz^n = z\frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n > 1.$$

14. Dowieść, że:

(a) $x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{2n+1} + 1\right);$

(b) $x^{2n} - 1 = (x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{2n} + 1\right)$

Wyprowadzić analogiczne równości dla wielomianów $x^{2n+1}+1$ oraz $x^{2n}+1$ (tzn. przedstawić je jako iloczyny wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego).

15. Wypisać wszystkie pierwiastki: a) $\sqrt[3]{-8}$; b) $\sqrt[3]{-i}$; c) $\sqrt[6]{16}$. Zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej.

16. Pokazać, że dla $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1}$ (pierwiastków n-tego stopnia z 1) zachodzą następujące równości:

    (a) $\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-1} = 0;$ Zilustrować geometrycznie tę równość.

    (b) $\epsilon_0 \cdot \epsilon_1 \cdot \cdots \cdot \epsilon_{n-1} = 1.$

17. Pokazać, że

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x+\epsilon y+\epsilon^2 z)(x+\epsilon^2 y+\epsilon z)$$

gdzie $\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$