Matematyka II, lista zadań No. 2: Szeregi

21.02.2012

1. Pokazać, że:

   (a) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1;$

   (b) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha+1};$

   (c) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} = \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}.$

   (w b), c) zakładamy, że $\alpha \neq -1, -2, \ldots$).

2. Wykazać, że następujące szeregi są zbieżne oraz wyznaczyć ich sumy:

   (a) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)};$

   (c) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$

   (d) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n};$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$

   (f) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$

3. Posługując się warunkiem koniecznym zbieżności szeregu pokazać, że następujaće szeregi są rozbieżne:

   (a) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}};$

   (b) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n n};$

   (c) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sin\frac{1}{n}\right);$

   (d) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}).$

4. Stosując kryterium porównawcze, zbadać zbieżność następujących szeregów:

   (a) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log(1 + \frac{1}{n})$;

(c) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-1/n}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$;

(e) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin \frac{1}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(f) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg} \frac{\pi}{4^n}$;

(g) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{th}^2 \frac{1}{n}$;

(h) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log \frac{n^3+1}{n^3}}$;

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x^n}{n^2}$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right)$.

5. Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$;

(b) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

(d) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}$;

(e) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} (x \mathrm{arctg}(n^2+1))^n$, $x \in \mathbb{R}_+$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$;

(g) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^n (n+1)}$;

(h) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)$.

6. Stosując kryterium zagęszczeniowe zbadać zbieżność szeregów:

(a) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad x \in \mathbb{R};$

(b) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+s} n}$, $s \in \mathbb{R};$

(c) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^s}, s \in \mathbb{R};$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log^2(n+1))}.$

7. Zbadać zbieżność następujących szeregów naprzemiennych:

(a) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n};$

(c) ■ $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(\log n)};$

(d) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right);$

(e) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{100} n}{n} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2};$

(f) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100};$

(g) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos \pi n^2;$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}.}$

8. Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne czy rozbieżne. (*Wsk.* We wszystkich przykładach poniżej powinna wystarczyć jakaś wersja kryterium porównawczego, z uwzględnieniem kryteriów d'Alemberta lub Cauchy'ego):

(a) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \; x \in \mathbb{R};$

(c) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$;

(e) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

(f) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{x}{n}),\ x \in \mathbb{R}$;

(g) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{x}{n}),\ x \in \mathbb{R}$;

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n + \sin n}{\sqrt{n^3 + e^{-n} + 5}}$;

(i) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s},\ a, b > 0, s \in \mathbb{R}$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$;

(k) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$;

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n,\ x \in \mathbb{R}$;

(m) ■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s},\ x, s \in \mathbb{R}$;

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n,\ x \in \mathbb{R}$ (tu $\tau(n)$ jest liczbą dzielników liczby n).