Matematyka I, lista zadań nr 2

1. ■ Dla funkcji $f(x) = x^2$ narysować wykresy funkcji $f(x)+2$, $f(x+2)$, $f(x-2)$, $f(2x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $|f(x)-4|$.

2. Narysować wykres $y(x) := a\sin bx$, dla $x > 0$. Następnie narysować wykres $y(x) := \frac{a}{2}\sin\frac{bx}{2}$.

3. ■ Wykres funkcji $y(x) = \cos x$ przekształcono do wykresu funkcji $y(x) = 8 - 2\cos\frac{\pi x}{6}$. Podaj proste przekształcenia geometryczne (translacja, skalowanie itp.), którymi w tym celu można się posłużyć.

4. Wiedząc, że $\cos\theta = \frac{2}{5}$ oraz $\sin\theta < 0$, znaleźć wartości: $\sin\theta$,$\sin 2\theta$, $\operatorname{tg}\theta$ oraz $\operatorname{tg} 2\theta$.

5. ■ Dla $x \in [0, 4\pi]$ rozwiązać rówwnanie $\sin x \operatorname{tg} x = \sin x$.

6. ■ Rozwiązać równanie $\operatorname{tg}^2 2\theta = 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

7. ■ Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem: $f(x) = \sin x + 1$. Znaleźć $f([0, \frac{3}{2}\pi])$, $f(\{0, \pi\})$, $f(\{\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi\})$, $f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, 1])$, $f^{-1}(\{0\})$.

8. Stojące na stole akwarium o szerokości w, długości l i wysokości h napełniono wodą po czym przechylono wzdłuż boku l tak, że podstawa akwarium tworzy ze stołem kąt θ. Znaleźć wzór na ilość wylanej wody. *Wsk.*: nie zapomnieć, że otrzymamy dwa przypadki zależne od $\operatorname{tg}\theta <> \frac{h}{w}$.

9. ■ Napisać równanie okręgu i prostej w układzie biegunowym, narysować wykresy funkcji: $r(\theta) = \sin\theta$, $\theta \in [0, \pi[$, $r(\theta) = \sin 2\theta$, $\theta \in [0, \pi[$, $r(\theta) = \theta$, $\theta \in [0, 6\pi[$.

10. ■ Narysuj wykresy $f^{-1}(x)$ dla:
    a) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $\quad f(x) = \sin x$,
    b) $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\quad f(x) = \cos x$,
    c) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \operatorname{tg} x$,
    d) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \operatorname{ctg} x$.

11. ■ Oblicz:
    a) $\arcsin(1)$, $\operatorname{arctg}(1)$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$,
    b) $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)$, $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}\right)$, $\arccos\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$,
    Odp.: Otrzymujemy odpowiednio $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$ oraz $\frac{3\pi}{10}$,
    c) $\sin \operatorname{arctg} x$, $\quad \operatorname{tg} \arcsin x$,
    Odp.: Otrzymujemy odpowiednio $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, oraz $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. ■ Wykaż, że:
    a) $\operatorname{arctg}\frac{7}{9} + \operatorname{arcctg} 8 = \frac{\pi}{4}$, b) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$.
    (*Wsk.*: Metoda jest ta sama w przypadkach (a) i (b): Pokazujemy, że oba sumowane kąty należą do przedziału $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Następnie bierzemy tangens obu stron równania.)

13. ■ (Przypadki (b) i (c) tylko dla narzekających na nadmiar czasu)
    Rozwiąż równania:
    a) $\operatorname{tg}(3\arcsin x) = 1$, b) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$,
    c) $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\frac{1}{3}$.
    Odpowiedzi: (a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{2}}$, $\quad$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, (c) $\frac{2}{3}$.

14. Znaleźć wyrażenia na $\sin 3x$, $\cos 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x$ (bez wykorzystywania liczb zespolonych, z wykorzystaniem wyrażeń na $sin(x+y)$ i $\cos(x+y)$).

15. Znaleźć współczynnik stojacy przy a^5b^7 rozwinięcia $(a+b)^{12}$.

16. ■ Znaleźć wyrażenie nie zawierające x w rozwinięciu $\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^9$.

17. Znaleźć współczynnik stojący przy $\frac{1}{x}$ oraz $\frac{1}{x^2}$ rozwinięcia $\left(x + \frac{1}{x}\right)^9$.

18. ■ Znaleźć $n \in \mathbb{N}$ takie, że współczynniki stojące przy wyrażeniu x^2 w rozwinięciu $(1+x)^{2n}$ oraz $(1+15x^2)^n$ są sobie równe.

19. ■ Wykazać, że $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

20. Obliczyć ilorazy i reszty z dzieleń wielomianów P przez wielomiany Q jeżeli: a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x$, $Q(x) = x^2 - 1$, b) $P(x) = x^{15} - 1$, $Q(x) = x^5 + 1$.

21. Wiedząc, że $p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$, znaleźć $p(1)$, rozłożyć $p(x)$ na wielomiany proste. Uprościć wyrażenie: $\frac{8x^2-7x+14}{p(x)}$

22. ■ Sprawdzić, czy $p = 2$ jest pierwiastkiem trójmianu $p^3 + p^2 - 5p - 2 = 0$ i znaleźć dwa pozostałe pierwiastki.

23. Gdy wielomian $6x^4 + 11x^3 - 22x^2 + ax + 6$ podzielimy przez $(x+1)$ otrzymamy resztę wynoszącą -20. Znaleźć wartość a.

24. Znaleźć najmniejszą wartość dla funkcji $f(x) = x^2 - 3x - 3$, znaleźć punkty, dla których $x^2 - 3x - 3 = 5$.

25. ■ Niech a i b będą pierwiastkami równania $x^2 - 5x - 3 = 0$. Podać wartości ab i $a+b$, znaleźć równanie kwadratowe o pierwiastkach $\frac{1}{ab}$, $\frac{1}{a+b}$.

26. ■ Równanie kwadratowe $4x^2 + 4kx + 9 = 0, k > 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla x. Znajdź wartość k.

27. Znaleźć wszystkie możliwe wartości k, jeżeli $x = k$ jest rozwiazaniem równania $x^3 + kx^2 - x - k = 0$.

28. Dla funkcji $f(x) = x^2 + (2-k)x + k^2$ znaleźć przedział wartości k, dla którego $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$.

29. Dla funkcji $Q(x) = kx^2 - (k-3)x + (k-8)$, $k \in \mathbb{R}$ podać wartości k, dla których równanie $Q(x) = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

30. ■ Rozwiązać nierówność: $\frac{1}{x-\sqrt{x}} \geq \frac{4}{15}$.

31. ■ Czy istnieją takie A i B, by zachodziła równość $\frac{1}{3x^2-5x-2} \equiv \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{x-2}$?

32. Rozłożyć $\frac{1}{x^2-x-6}$ na sumę odwrotności dwóch wielomianów stopnia pierwszego.

FUNKCJA WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA

33. ■ W pewnym laboratorium zaobserwowano, że ilość bakterii rozwija się zgodnie ze wzorem: $N(t) = 150 \times 2^t$, gdzie $N(t)$ opisuje ilość bakterii a t jest liczbą godzin mierzoną od początku eksperymentu. Znaleźć: ilość bakterii na początku eksperymentu, ilość bakterii po trzech godzinach, czas, po ktorym ilość bakterii przekroczy 19200.

34. ■ Niech $f(x) := 3^{\cos(x)} + \frac{1}{6}$, $x \in \mathbb{R}$. Zbadać czy funkcja f jest surjekcją lub injekcją.

35. Niech $f(x) = 2^{\sin x} - 1$. Znaleźć dziedzinę i zbiór wartości $f(x)$. Zbadać injektywność i surjektywność $f(x)$, znaleźć maksymalny przedział, dla którego $f(x)$ jest injekcją, znaleźć $f^{-1}(x)$ i podać jej dziedzinę.

36. ■ Wiedząc, że $\log_5 x = y$, wyrazić przez y wyrażenia: $\log_5 x^2$, $\log_5 \left(\frac{1}{x}\right)$, $\log_{25} x$.

37. ■ Niech $a = \log x, \quad b = \log y, \quad c = \log z$ Wyrazić $\log\left(\frac{x^2\sqrt{y}}{z^3}\right)$ poprzez a, b i c.

38. ■ Udowodnić, ze dla dowolnej liczby $N > 0$ i $N \neq 1$, $\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \cdots + \frac{1}{\log_{10} N} = \frac{1}{\log_{10!} N}$.

39. ■ Narysować zbiór punktów płaszczyzny, (x, y), dla których $\log_y(\log_x y) \leq 0$.

40. ■ Dla jakich $x, m \in \mathbb{R}$ równanie $\frac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2$, ma rozwiązanie?

41. ■ Potęgowanie, logarytm (podstawowe własności) $a^x a^y = a^{x+y}$, $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$, $(a^x)^y = a^{xy} \neq a^{x^y}$, $\log_a b = \log_a c \log_c b$, $\log_a b^x = x \log_a b$ i konsekwencje $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

42. ■ Funkcja wykładnicza, logarytmiczna (dziedzina, wykresy, monotoniczność) Podaj dziedzinę naturalną funkcji $y = 2\log x$, $y = \log x^2$

43. ■ Udowodnij, że:
a) $\log_3 2 \log_4 3 \log_5 4 ... \log_{16} 15 = \frac{1}{4}$; b) $25^{1-\log_5 3} + 2 \cdot 7^{-\log_7 9} = 3$,

44. ■ Rozwiąż: a) $2^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{x+1}}$, b) $3^x + 3^{x+2} = 7$, c) $9 - 3^{x+2} - 3^{2x} + 3^{3x} = 0$, d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1024$, e) $2^{3x+5} - 4^{x-1} > 0$, f) $\frac{1}{2^x+2} < \frac{2^x}{2^x-1}$, g) $\log_{x+2}(x - \sqrt{x+2}) = \frac{1}{2}$, h) $2\log_2 x = \log_2(x+\frac{3}{2})+1$, i) $x^{\log_2 x} - 4x = 0$, j) $\log_4(\log_{\frac{1}{2}} x) > 1$.

45. ■ Przy jakich wartościach parametru a równanie

$$0,5^{x^2-ax+0,5a-1,5} = \left(\sqrt{8}\right)^{a-1}$$

ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

46. Udowodnić indukcyjnie, że: $(1)(1!) + (2)(2!) + (3)(3!) + \cdots + (n)(n!) = (n+1)! - 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

47. (Było na wykładzie, ale może przyda się powtórka) Indukcyjnie nierówność Bernoulliego czyli $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$.

48. Udowodnić indukcyjnie, że: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

49. ■ Udowodnić indukcyjnie, że: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

50. Udowodnić indukcyjnie, że: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

51. ■ Indukcyjnie $q^0 + q^1 + \cdots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q}$.

52. Przykład K. Napiórkowskiego przypominający o tym, że bez sprawdzenia warunku dla $T(1)$, można "udowodnić" rzeczy nieprawdziwe (`www.fuw.edu.pl/~ajduk/FUW/matnkf/matematyka01_nkf.pdf`, str 17): Ciąg (a_n) spełnia warunki: $a_1 = 4, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Pokazać, że jest rosnący. Skoro $a_{k-1} < a_k$, to $a_k = \sqrt{2+a_{k-1}}$, $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k}$, więc $a_k < a_{k+1}$, co kończy dowód. Zauważmy jednak, że $a_2 \approx 2.45$, $a_3 \approx 2.11$ itd. czyli ciąg jest malejący. Nie jest zatem spełniony warunek dla $T(1)$, czego wcześniej nie sprawdziliśmy.

53. ■ Udowodnić indukcyjnie, że liczba postaci $n^3 - n$, $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 6.

54. ■ Udowodnić indukcyjnie, że jeżeli $a, b \geq 0$, to $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$.

55. Udowodnić indukcyjnie, że wielomian $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ jest podzielny przez trójmian $x^2 - 2x + 1$.

56. Na ile *maksymalnie* części dzieli płaszczyznę n prostych?

57. Na ile *maksymalnie* części dzieli sferę n okręgów?