

Wstęp

Wstęp będzie przez ok. miesiąc. Jest to zasadniczo powtórka ze szk. średniej, być może z niektórymi rzeczami nowymi.

1 Logika, arytmetyka zbiorów

1.1 Logika

Uwaga: Często słowu "logika" nadaje się szersze znaczenie niż temu o czym będzie poniżej: np. mówi się "logiczne myślenie" w sensie wyciągania wniosków itp. Tu słowo: "logika" oznacza "formalne reguły dotyczące prawdziwości zdań".

Def. Zdaniem w sensie logiki (**zdaniem logicznym**) nazywamy wyrażenie, któremu możemy jednoznacznie przyporządkować jedną z dwóch wartości logicznych: **prawdę (1) lub fałsz (0)**.

Uwaga: W sensie logiki zdaniami *nie są* zdania pytające i rozkazujące.

Przykład: "*Warszawa jest stolicą Polski*" jest zdaniem (prawdziwym), "*Pcim jest stolicą Polski*" jest zdaniem (fałszywym), "*najładniejsze kwiaty to malwy*" nie jest zdaniem.

Zdania złożone. Z jednego (lub kilku) zdań możemy utworzyć nowe zdania – **zdania złożone** – przy pomocy *operatorów logicznych* (zw. czasem też *spójnikami zdaniowymi*, *funktorami zdaniotwórczymi*). Podstawowe operatory logiczne to:

1. **Zaprzeczenie (negacja)** zdania: " $\sim$ ". Dla zdania p czytamy: "nieprawda, że p ". Operacja jednoargumentowa:

p	$\sim p$
1	0
0	1

Przykł. Niech p będzie zdaniem: "Legia wygrała"; wtedy $\sim p$ to powiedzenie: "Nieprawda, że Legia wygrała", lub równoważnie (zakładając, że mecz się odbył!) "Legia przegrała lub zremisowała".

2. **Koniunkcja** zdań p, q : " $\wedge$ ". ("Mnożenie" logiczne). (W językach programowania koniunkcję często oznacza się AND). Operacja dwuargumentowa: czytamy " p i q ". Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba są prawdziwe, co ilustrujemy przy pomocy tabelki logicznej:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3. **Alternatywa** zdań p, q : " $\vee$ ". ("Dodawanie" logiczne). (W językach programowania alternatywę często oznacza się OR). Operacja dwuargumentowa: czytamy " p lub q ". Alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno z nich jest prawdziwe. Zapisujemy to przy użyciu tabelki:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4. **Implikacja** zdań p, q : " $\implies$ ". Operacja dwuargumentowa: czytamy "jeżeli p to q ".

p	q	$p \implies q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5. **Równoważność** zdań: p, q : " $\iff$ ". Operacja dwuargumentowa: czytamy " p wtedy i tylko wtedy gdy q ". Dwa zdania są równoważne, gdy są oba jednocześnie prawdziwe lub jednocześnie fałszywe:

p	q	$p \iff q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

6. **Alternatywa wykluczająca** zdań: p, q : " $\vee$ ". Operacja dwuargumentowa. Jest to operacja działająca odwrotnie niż równoważność: Wynik zadziałania alternatywy wykluczającej jest prawdziwy wtedy i tylko wtedy gdy jedno ze zdań jest fałszywe, a drugie prawdziwe:

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Def. Tautologia nazywamy zdanie złożone, które jest prawdziwe niezależnie od wartości logicznych zdań, z których jest złożone. (W języku potocznym "tautologią" nazywa się wyrażenie w stylu "masło maślane", czyli powtórzenie tego samego, może innymi nieco słowami; tu definicja jest nieco szersza, gdyż dotyczy zdań złożonych.)

Niektóre prawa rachunku zdań:

1. Prawo podwójnego przeczenia: $\sim(\sim p) \iff p$.
2. Prawo wyłączonego środka: Zdanie: $p \vee \sim p$ jest zawsze prawdziwe.

Przykł. Niech p będzie zdaniem: "Legia wygrała"; wtedy $p \vee \sim p$ to: "Legia wygrała, lub przegrała lub zremisowała".

3. Prawa de Morgana:

- (a) Prawo zaprzeczenia koniunkcji: $\sim(p \wedge q) \iff (\sim p) \vee (\sim q)$. (o tym można się przekonać bezpośrednim rachunkiem, wstawiając możliwe wartości logiczne zdań i patrząc czy po lewej i prawej stronie dostanie się to samo. Jest to uniwersalna metoda sprawdzania, czy dwa zdania złożone są równoważne.)

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

- (b) Prawo zaprzeczenia alternatywy: $\sim(p \vee q) \iff (\sim p) \wedge (\sim q)$.
4. Prawo zaprzeczenia implikacji: $\sim(p \implies q) \iff (p \wedge \sim q)$.
 5. Prawo transpozycji: $(p \implies q) \iff (\sim q \implies \sim p)$.
 6. Prawa łączności:

- (a) Łączność koniunkcji: $[(p \wedge q) \wedge r] \iff [p \wedge (q \wedge r)]$

- (b) Łączność alternatywy: $[(p \vee q) \vee r] \iff [p \vee (q \vee r)]$

7. Prawa rozdzielności:

- (a) koniunkcji względem alternatywy: $(p \wedge q) \vee r \iff (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
- (b) alternatywy względem koniunkcji: $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Kwantyfikatory. Dotyczą *form zdaniowych*

- Dla każdego x zachodzi $\phi(x) : \forall_x \phi(x)$
- Istnieje taki x , że zachodzi $\psi(x) : \exists_x \psi(x)$

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów:

- $\sim (\forall_{x \in X} \phi(x)) \iff \exists_{x \in X} (\sim \phi(x))$

Przykł. Powiedzieć, że "nieprawda, że wszystkie liczby naturalne są parzyste" jest tym samym, co powiedzieć, że "istnieje taka liczba naturalna, która jest nieparzysta".

- $\sim (\exists_x \psi(x)) \iff \forall_{x \in X} (\sim \psi(x))$

1.2 Zbiory

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, niedefiniowalnym. Aby jednak na tym nie poprzestać i powiedzieć o co tu chodzi, to taką pseudodefinicją mogłoby być: "coś, co zawiera elementy".

Def. Zbiorem pustym nazywamy zbiór, który nie zawiera żadnego elementu. Oznacza się go $\emptyset$.

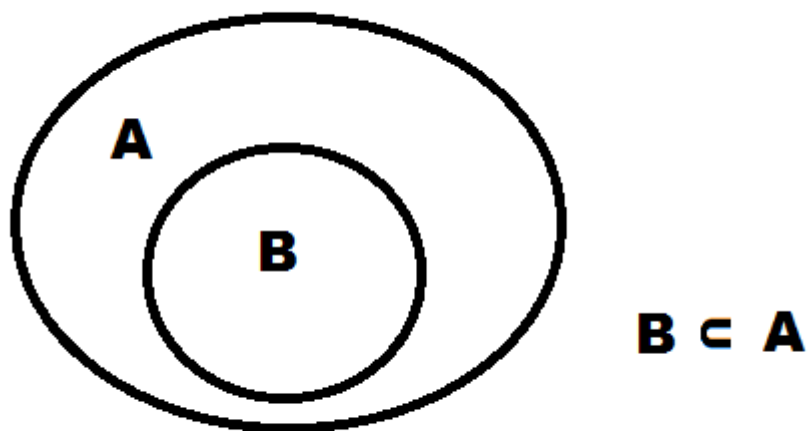
Def. Zbiorem skończonym nazywamy zbiór posiadający skończoną ilość elementów. Ilość elementów zbioru skończonego A oznaczamy jako $|A|$, czasem też $\#A$.

Def. Mówimy, że zbiory A i B są *równe* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A należy do zbioru B i każdy element zbioru B należy do zbioru A . Zapisujemy to tak:

$$A = B \iff \forall_x (x \in A \iff x \in B).$$

Def. Zbiór A *zawiera się* w zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest jednocześnie elementem zbioru B . Sytuację taką oznaczamy $A \subset B$, a o zbiorze A mówimy, że jest *podzbiorem* zbioru B . Zapisujemy to tak: $A \subset B \iff (a \in A \implies a \in B)$.

Przykład. Zbiór liczb parzystych jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Niektóre proste własności inkluzji (zawierania się) zbiorów:



Rysunek 1: Zbiór B zawiera się w zbiorze A .

- $\forall_A : \emptyset \subset A$ (zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru A)
- $\forall_A : A \subset A$ (każdy zbiór jest swoim podzbiorem).

Def. Jeśli $A \subset B$ i $A \neq B$, to mówimy, że A jest *podzbiorem właściwym* zbioru B .

Pytanie: Ile podzbiorów ma zbiór skończony zawierający n elementów?

Przykł. podzbiorów zbioru 2- i 3-elementowego. **Odp.** 2^n .

Uwaga. Przedstawiona argumentacja nie jest dowodem, a jedynie wprowadzeniem na właściwą odpowiedź. Dowód (nieskomplikowany, indukcyjny) pojawi się niedługo.

Def. Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do co najmniej jednego z tych zbiorów. Zapisujemy to jako:

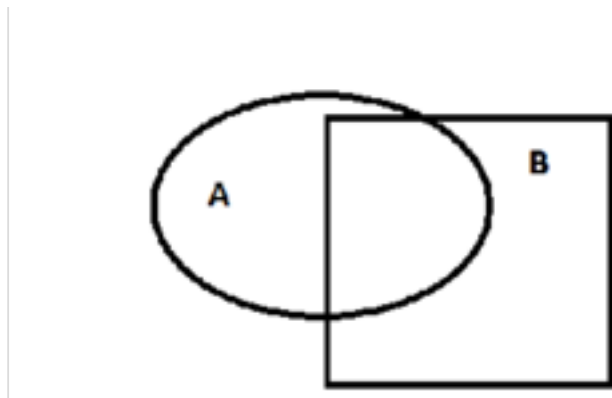
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Def. Przecięciem (iloczynem) zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do obu zbiorów. (Przecięcie nazywamy też *częścią wspólną*). Zapisujemy to jako:

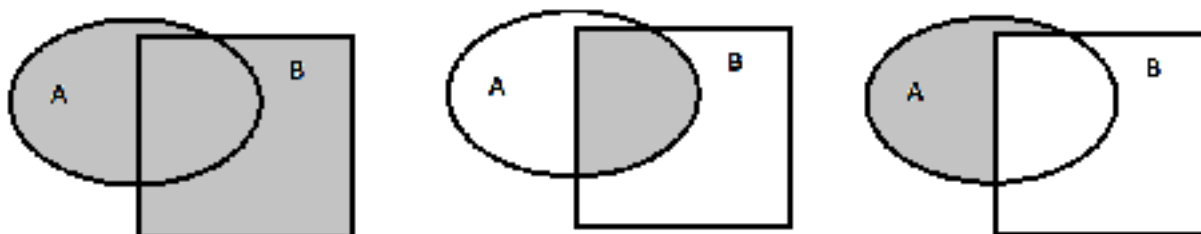
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Def. Różnicę zbiorów A i B zapiszemy już tylko wzorem i zilustrujemy:

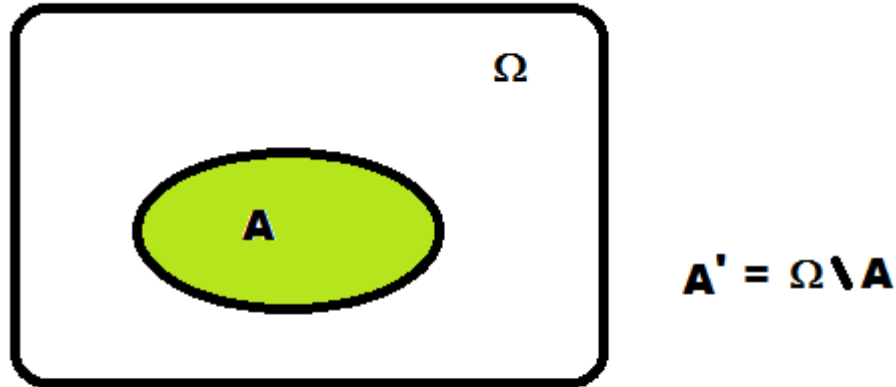
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



Rysunek 2: Zbiory A oraz B .



Rysunek 3: Zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $A \setminus B$ dla A, B z rys. 2.



Rysunek 4: Dopełnienie zbioru A względem zawierającego go nadzbioru Ω .

Def. Mówimy, że zbiory A i B są **rozłączne** wtedy i tylko wtedy, gdy nie mają wspólnych elementów, tzn. gdy $A \cap B = \emptyset$.

Dopełnienie zbioru: Każdy zbiór A możemy uważać za podzbiór jakiegoś większego zbioru Ω (wtedy Ω nazywamy **nadzbior**em zbioru A).

Def. Dopełnieniem zbioru A do zbioru Ω nazywamy zbiór $A' = \Omega \setminus A$. (Czasem dopełnienie A oznacza się też A^C od "complement").

Przy pomocy pojęcia dopełnienia można np. wyrazić różnicę mnogościową poprzez inne operacje: $A \setminus B = A \cap B'$.

Przykł: Udowodnijmy to:

A	B	$A \setminus B$	B'	$A \cap B'$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$

Def. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór par uporządkowanych (a, b) , gdzie $a \in A, b \in B$:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Przykł. Niech $x, y \in A = \mathbb{R}$. Wtedy (x, y) – parę liczb rzeczywistych można interpretować jako współrzędne punktu na płaszczyźnie. Tak więc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ to *płaszczyzna*.

Przykł. Niech A – zbiór dat, B – zbiór miejsc na Ziemi; wtedy $A \times B = \{(data, miejsce)\}$ – zbiór zdarzeń historycznych.

Gdy weźmiemy: A – zbiór punktów otaczającej nas przestrzeni; B – zbiór chwil czasu, to $A \times B$ nazywamy *czasoprzestrzenią*.

Def. Analogicznie definiujemy **iloczyn kartezjański** n zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ jako zbiór n -ek uporządkowanych:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

Przykł. Nasza przestrzeń, w której żyjemy, to R^3 .

1.3 Podstawowe zbiory liczbowe i ich oznaczenia

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – zbiór liczb *naturalnych*. ("natural")
2. $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – zbiór liczb *całkowitych*. ("Zahlen")
3. $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, p, q \text{ – wzajemnie pierwsze}\}$ – zbiór liczb *wymiernych*. ("quotient")
4. $\mathbb{R}$ – zbiór liczb *rzeczywistych* ("real").

1.4 Przedziały liczbowe i ich oznaczenia

1.4.1 Przedziały ograniczone

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$.

1. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (przedział obustronnie otwarty)
2. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (przedział obustronnie domknięty)

1.4.2 Przedziały nieograniczone

Niech $a \in \mathbb{R}$.

1. $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
2. $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
3. $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
4. $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

1.5 Garść przykładów

Przykł. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (1)$$

Rozw. Zastosujemy uniwersalny sposób dla dowolnej skończonej ilości zbiorów, a mianowicie rozpatrzmy wszystkie możliwe sytuacje należenia bądź nienależenia danego elementu x do poszczególnych zbiorów A, B, C a potem do lewej i prawej strony równości. Jeśli otrzymamy wszędzie to samo to znaczy, że równość jest prawdziwa.

A	B	C	$B \cap C$	L	$A \cup B$	$A \cup C$	P
∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈
∈	∈	∉	∉	∈	∈	∈	∈
∈	∉	∈	∉	∈	∈	∈	∈
∉	∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈
∈	∉	∉	∉	∈	∈	∈	∈
∉	∈	∉	∉	∉	∈	∉	∉
∉	∉	∈	∉	∉	∉	∈	∉
∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉

Widać, że metoda jest systematyczna i zawsze przy jej użyciu osiągniemy wynik. Ale nie można chyba powiedzieć, że nie jest nudna... Ale! Dla osób o zacięciu komputerowym, łatwo ją zaimplementować.

I w ten sposób udowodnić lub sfalsyfikować dowolne zdanie dotyczące $n \leq 15$ zbiorów.

Ale gdy mamy *dowolną* ilość zbiorów, to już trzeba kombinować...

Co zresztą warto robić zawsze, jak np. w następującym przykładzie.

Przykł. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi:

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B). \quad (2)$$

Rozw. 1. Tabelka:

A	B	$L = A \cap B$	$A \setminus B$	$P = A \setminus (A \setminus B)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Widać, że $L = P$ – czyli udowodniliśmy.

Rozw. 2. Skorzystajmy tu z pokazanej niedawno równości, zamieniającej różnicę na iloczyn:

$$A \setminus B = A \cap B'.$$

Wykorzystując ją, przepisujemy prawą stronę:

$$\begin{aligned}
 P &= A \setminus (A \setminus B) \\
 &= A \cap (A \cap B')' \\
 &= A \cap (A' \cup B'') \\
 &= A \cap (A' \cup B) \\
 &= (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B = L
 \end{aligned}$$

cbdo lub QED.

2 Funkcje

Def. *Funkcją* (stosuje się też nazwę *odwzorowanie*) określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. x nazywamy *argumentem*, zaś y – *wartością* funkcji. Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji. Zapisujemy: $y = f(x)$. Dla jednoczesnego podania funkcji (sposobu przyporządkowania) oraz zbiorów X i Y piszemy: $f : X \rightarrow Y$.

Jako że zmysłem człowieka, odbierającym zdecydowaną większość bodźców jest *wzrok*, nic dziwnego, że łatwiej dostrzeżemy różne aspekty funkcji patrząc na jej *wykres*.

Def. *Wykresem funkcji* $f : X \rightarrow Y$ nazywamy następujący podzbiór G iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$: $G = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$.

W sytuacjach, z którymi najczęściej będziemy mieć do czynienia (tzn. wykresami funkcji rzeczywistych o argumentach rzeczywistych), wykres jest podzbiorem płaszczyzny, tzn. zbiorem par (x, y) . Na osi poziomej zaznaczamy argumenty x , a na osi pionowej wartości funkcji $y = f(x)$.

Uwaga. Do definicji funkcji trzeba podać trzy rzeczy: f , X , Y . Dwie funkcje: $f : X_1 \rightarrow Y_1$ oraz $f : X_2 \rightarrow Y_2$, dla których sposób przyporządkowania f jest taka sama, ale $X_1 \neq X_2$ lub $Y_1 \neq Y_2$, uważamy za *różne*! Np. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x + 1$ oraz $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f(x) = x + 1$, uważamy za *różne*, mimo iż recepta przyporządkowania jest ta sama!

Def. *Iniekcją* nazywamy odwzorowanie o własności: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. (innymi słowy, jest to odwzorowanie *różnowartościowe*)

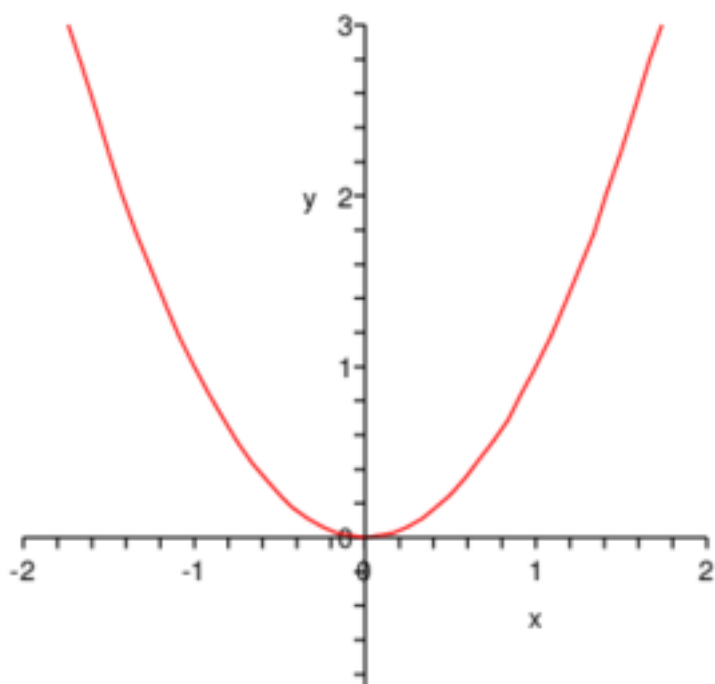
Przykł. Przykł.

Def. *Surjekcją* nazywamy takie odwzorowanie, że każdy $y \in Y$ jest obrazem pewnego $x \in X$. Zapiszmy to używając kwantyfikatorów: $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} : y = f(x)$. W tym przypadku mówimy też, że f jest odwzorowaniem "na".

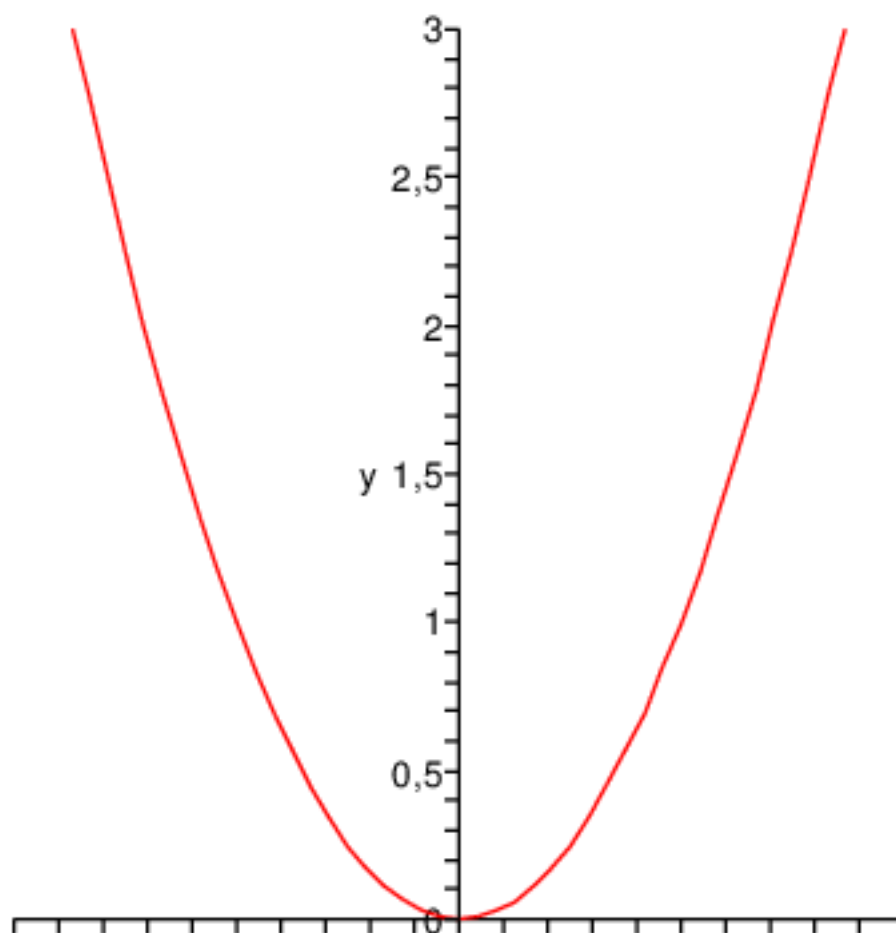
Przykł. Def. *Bijekcją* nazywamy odwzorowanie, które jest jednocześnie iniekcją i surjekcją.

Przykł. Rozważmy trzy funkcje f_1, f_2, f_3 : $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) := x^2$; $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, f_2(x) := x^2$; $f_3 : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, f_3(x) := x^2$. f_1 nie jest iniekcją ani surjekcją; f_2 nie jest iniekcją, ale jest surjekcją; wreszcie f_3 jest zarówno iniekcją jak i surjekcją. Przykład ten pokazuje, w jak dużym (decydującym!) stopniu własności funkcji (iniektywność, surjektywność itp.) zależą od zbioru, na którym są określone.

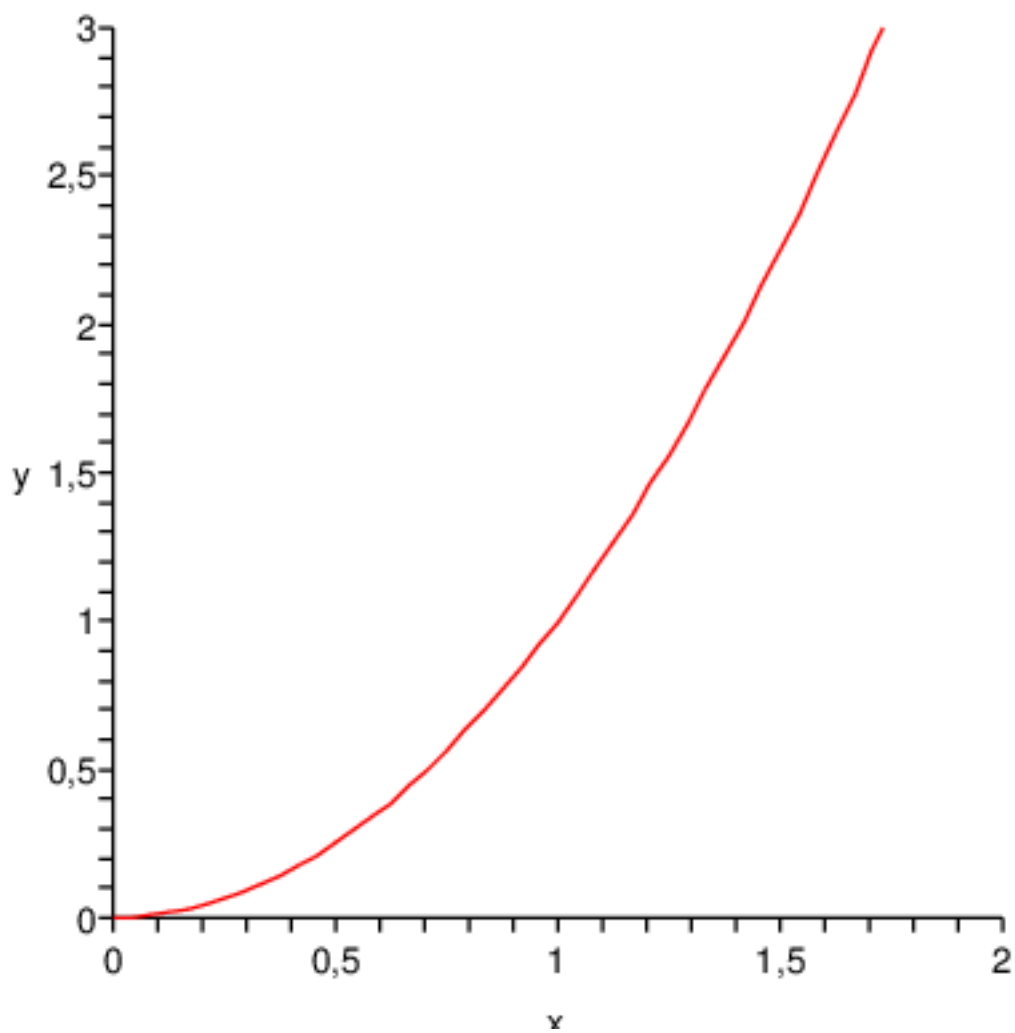
Bijekcje są ważną klasą odwzorowań, gdyż można dla nich określić *odwzorowanie odwrotne*.



Rysunek 5: $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) := x^2$; f_1 nie jest injekcją ani surjekcją.



Rysunek 6: $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $f_2(x) := x^2$. f_2 jest surjekcją ale nie injekcją



Rysunek 7: $f_3 : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $f_3(x) := x^2$. f_3 – bijekcja

Def. Jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest bijekcją, to *odwzorowaniem odwrotnym* do f (oznaczanym jako f^{-1}) jest odwzorowanie $f^{-1} : Y \rightarrow X$, definiowane tak: Jeśli $y = f(x)$, to $f^{-1}(y) = x$.

Przykł. Weźmy f_3 z powyższego przykładu. Mamy tu $y = f_3(x) = x^2$, więc $x = +\sqrt{y} = f_3^{-1}(y)$, lub – zamieniając nazwy argumentów: $f_3^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Odwzorowanie odwrotne ma ważną własność, którą – zanim wypowiemy – wprowadzimy pojęcie *złożenia* odwzorowań.

Mianowicie: Jeśli $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, to *złożeniem* (*superpozycją*) odwzorowań $g \circ f$ nazywamy odwzorowanie $h : X \rightarrow Z$ określone jako: $h(x) = g(f(x))$.

Przykł. Niech $X, Y, Z = \mathbb{R}$ i weźmy funkcje f oraz g : $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^3$. Wtedy: $(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = 2x^3 - 1$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

Teraz rzeczona własność odwzorowania odwrotnego:

Stw. Złożenie odwzorowania i odwzorowania odwrotnego jest odwzorowaniem identycznościowym:

$$\forall_{x \in Y} : f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in X} : f^{-1}(f(x)) = x$$

co możemy też zapisać:

$$f \circ f^{-1} = \text{Id na zbiorze } Y, \quad f^{-1} \circ f = \text{Id na zbiorze } X.$$

gdzie Id – odwzorowanie identycznościowe:

$$\text{Id}(x) = x.$$

Def. *Obrazem* zbioru $A \subset X$ przy odwzorowaniu f nazywamy zbiór $B \subset Y$ oznaczany jako $B = f(A)$ i określony jako

$$B := \cup_{x \in A} f(x)$$

Def. *Przeciwbrazem* zbioru $C \subset Y$ przy odwzorowaniu f nazywamy zbiór $E \subset X$, oznaczany jako $E = f^{-1}(C)$ i określony jako

$$E = \{x \in X : f(x) \in C\}$$

Przykł. Rozważmy funkcję f_1 z powyższego przykładu: $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) := x^2$. Mamy: $f_1([1, 2]) = [1, 4]$, zaś $f_1^{-1}([1, 4]) = [1, 2] \cup [-2, -1]$.

Def. *Poziomicą* punktu $c \in Y$ nazywamy przeciwbraz punktu $c \in Y$.

Przykł. Rozważmy funkcję $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, określoną jako: $g(x, y) = x^2 + y^2$. Wtedy, dla $c > 0$, poziomicą to zbiór punktów płaszczyzny spełniających

równanie: $x^2 + y^2 = c$, w czym rozpoznajemy równanie *okręgu* o promieniu $\sqrt{c}$. Dla $c = 0$ poziomica jest punkt $(0, 0)$, a dla $c < 0$ – zbiór pusty.

Def. *Miejszem zerowym* x_0 funkcji f nazywamy argument taki, że $f(x_0) = 0$.

Uwaga. Używając dopiero co wprowadzonej terminologii mówimy, że zbiorem miejsc zerowych funkcji f jest *poziomica* $f^{-1}(0)$.

Następujące właściwości funkcji rzeczywistych (tzn. $f : X \rightarrow Y$, gdzie X, Y są podzbiorami $\mathbb{R}$) są często ważne w zastosowaniach.

Def. *Monotoniczność* funkcji:

- Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy *rosnącą* na zbiorze $A \subset X \iff \forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy *malejącą* na zbiorze $A \subset X \iff \forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy *stałą* na zbiorze $A \subset X \iff \forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2)$

Def. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy *parzystą* $\iff \forall x \in D : f(x) = f(-x)$.

Uwaga. Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY .

Przykł. Funkcja $\cos(x)$ jest parzysta na $\mathbb{R}$.

Def. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy *nieparzystą* $\iff \forall x \in D : f(x) = -f(-x)$.

Uwaga. Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi y .

Przykł. Funkcja $\sin(x)$ jest nieparzysta na $\mathbb{R}$.

Def. Funkcję f nazywamy *ograniczoną z dołu*

$$\iff \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in D : f(x) \geq m$$

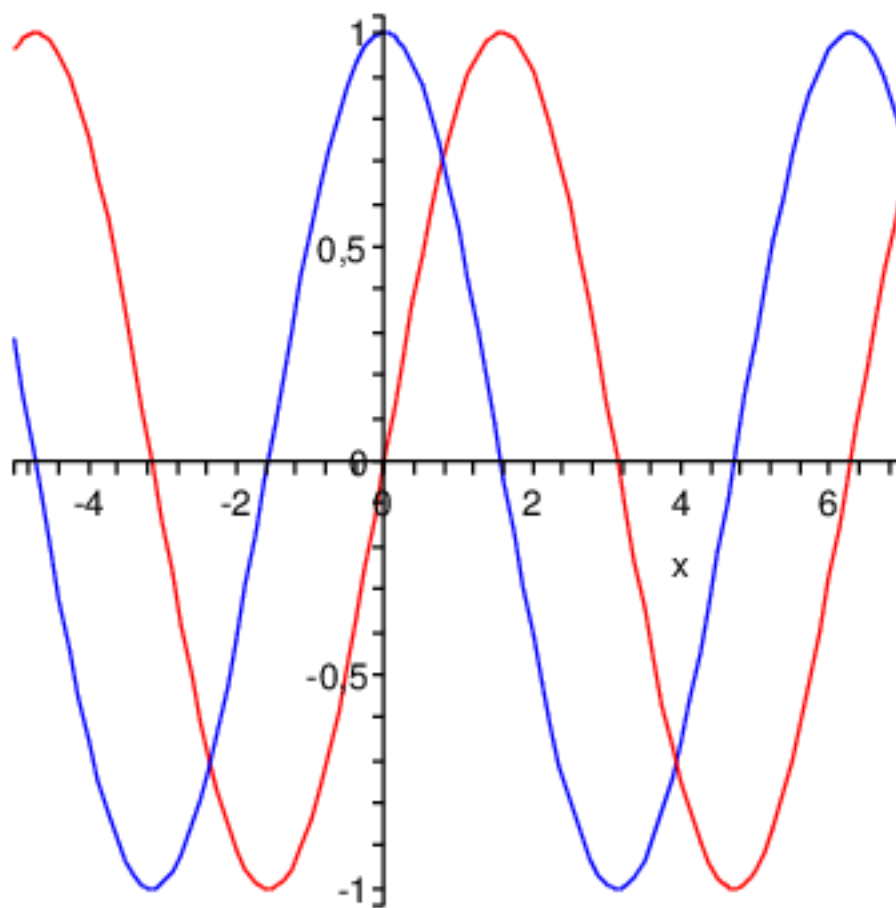
Def. Funkcję f nazywamy *ograniczoną z góry*

$$\iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in D : f(x) \leq M$$

Def. Funkcję f nazywamy *ograniczoną* jeśli jest jednocześnie ograniczona z góry i z dołu.

Przykł. Funkcja $F_1 : \mathbb{R}_+ \ni x \rightarrow F_1(x) := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ jest ograniczona z dołu; $F_2 : \mathbb{R}_- \ni x \rightarrow F_2(x) := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ jest ograniczona z góry; $F_3 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \rightarrow F_3(x) := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ nie jest ograniczona; a funkcja $F_4 : \mathbb{R} \ni x \rightarrow F_4(x) := \sin^2(x) \in \mathbb{R}$ jest ograniczona.

Def. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ przyjmuje *największą* wartość $y_{\max} \in Y$ dla $x_0 \in X \iff f(x_0) = y_{\max}$ oraz $\forall x \in X : f(x) \leq f(x_0)$.



Rysunek 8: Wykresy funkcji $\sin x$ (czerw.) i $\cos x$ (nieb.). Uwaga! Argument x podany jest w mierze łukowej, tak więc np. 180° odpowiada $\pi \approx 3.14$.

Analogicznie

Def. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ przyjmuje *najmniejszą* wartość $y_{min} \in Y$ dla $x_0 \in X \iff f(x_0) = y_{min}$ oraz $\forall_{x \in X} : f(x) \geq f(x_0)$.

Przekształcenia wykresu funkcji.

- *Symetria względem osi OX* : Przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi OX , otrzymamy wykres funkcji $y = -f(x)$.
- *Symetria względem osi OY* : Przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi OY , otrzymamy wykres funkcji $y = f(-x)$.
- *Symetria względem punktu $(0,0)$* : Przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem punktu $(0,0)$, otrzymamy wykres funkcji $y = -f(-x)$.
- *Przesunięcie równoległe wykresu o wektor $[a,b]$* : W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a,b]$ otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x-a) + b$.
- *Skalowanie wykresu funkcji*: wykresy $y = f(x)$ oraz $y = Af(x)$.

Przykł. Przy analizie ruchu drgającego, często używa się pojęć: *częstość*, *amplituda*, *faza*. Amplituda jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy maksymalnymi wychyleniami (czynnik A); częstość jest proporcjonalna do ilości drgań na jednostkę czasu (czynnik ω); wreszcie faza ϕ to 'wychylenie początkowe':

$$x = A \sin(\omega t + \phi).$$

- *Symetria względem prostej $y = x$* : Przekształcając w ten sposób wykres funkcji $y = f(x)$ otrzymamy wykres funkcji *odwrotnej* $y = f^{-1}(x)$.

3 Funkcje: liniowa, kwadratowa, wielomiany, f. wymierne

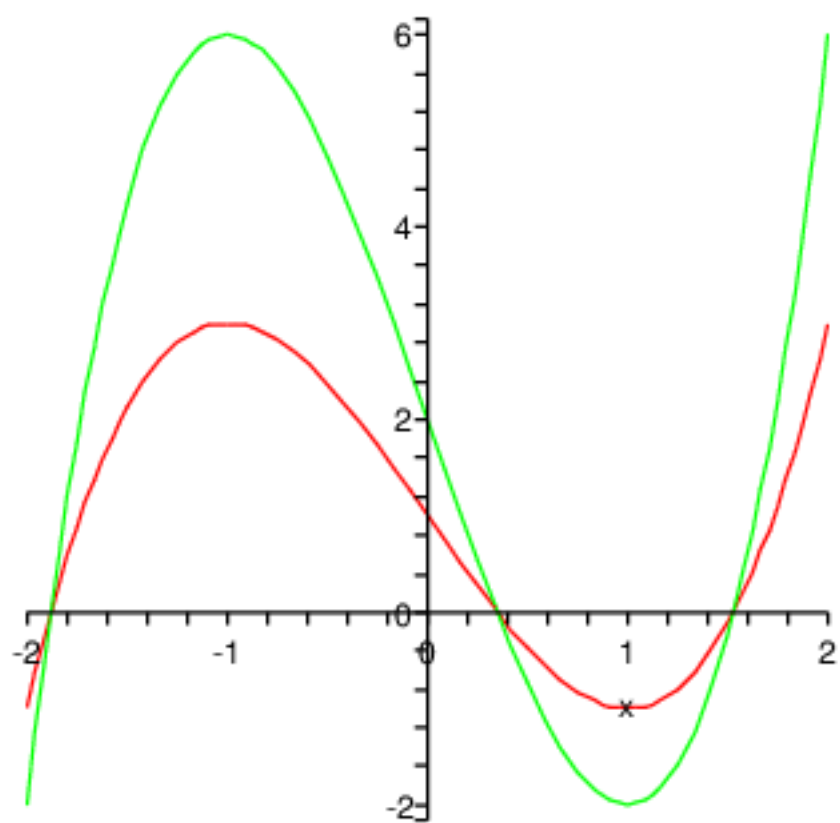
3.1 Funkcja liniowa

Def. Funkcją liniową nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

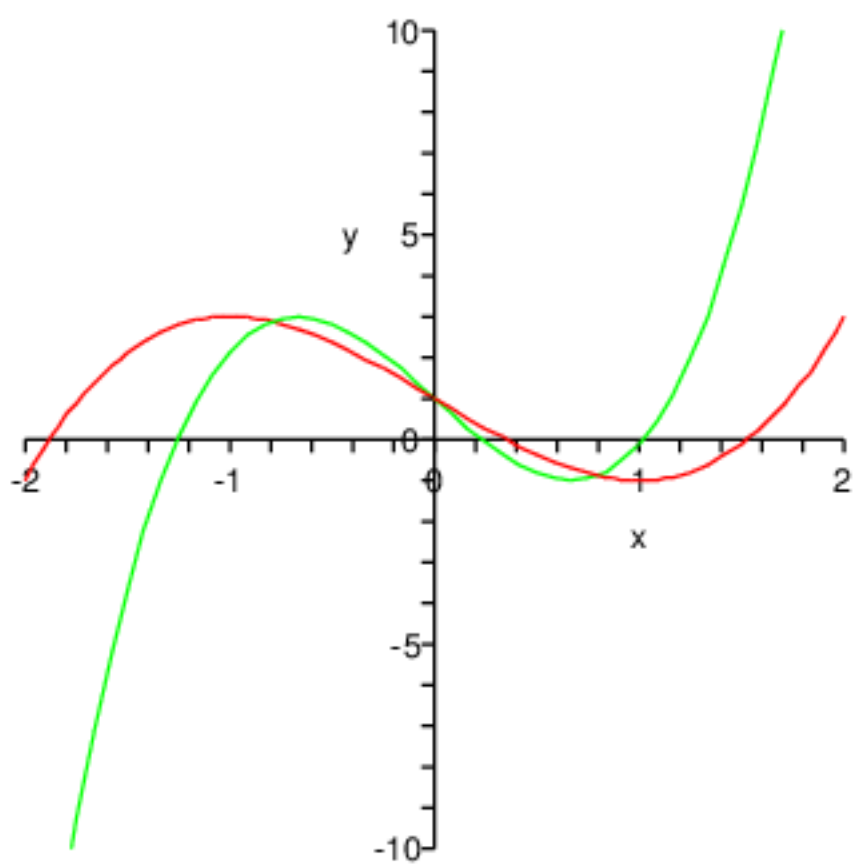
Stw. Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta o równaniu $y = ax + b$, nachylona do osi OX pod kątem α takim, że $a = \operatorname{tg} \alpha$.

Stw. Funkcja liniowa jest:

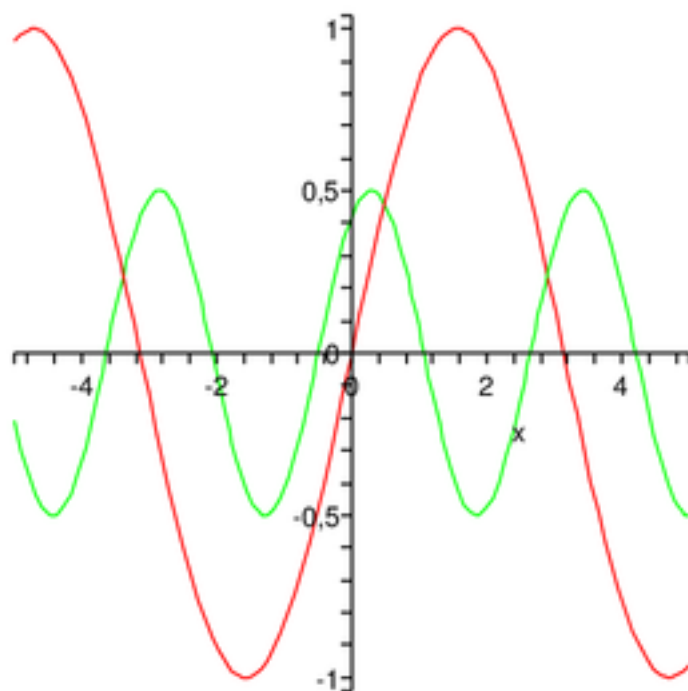
rys.



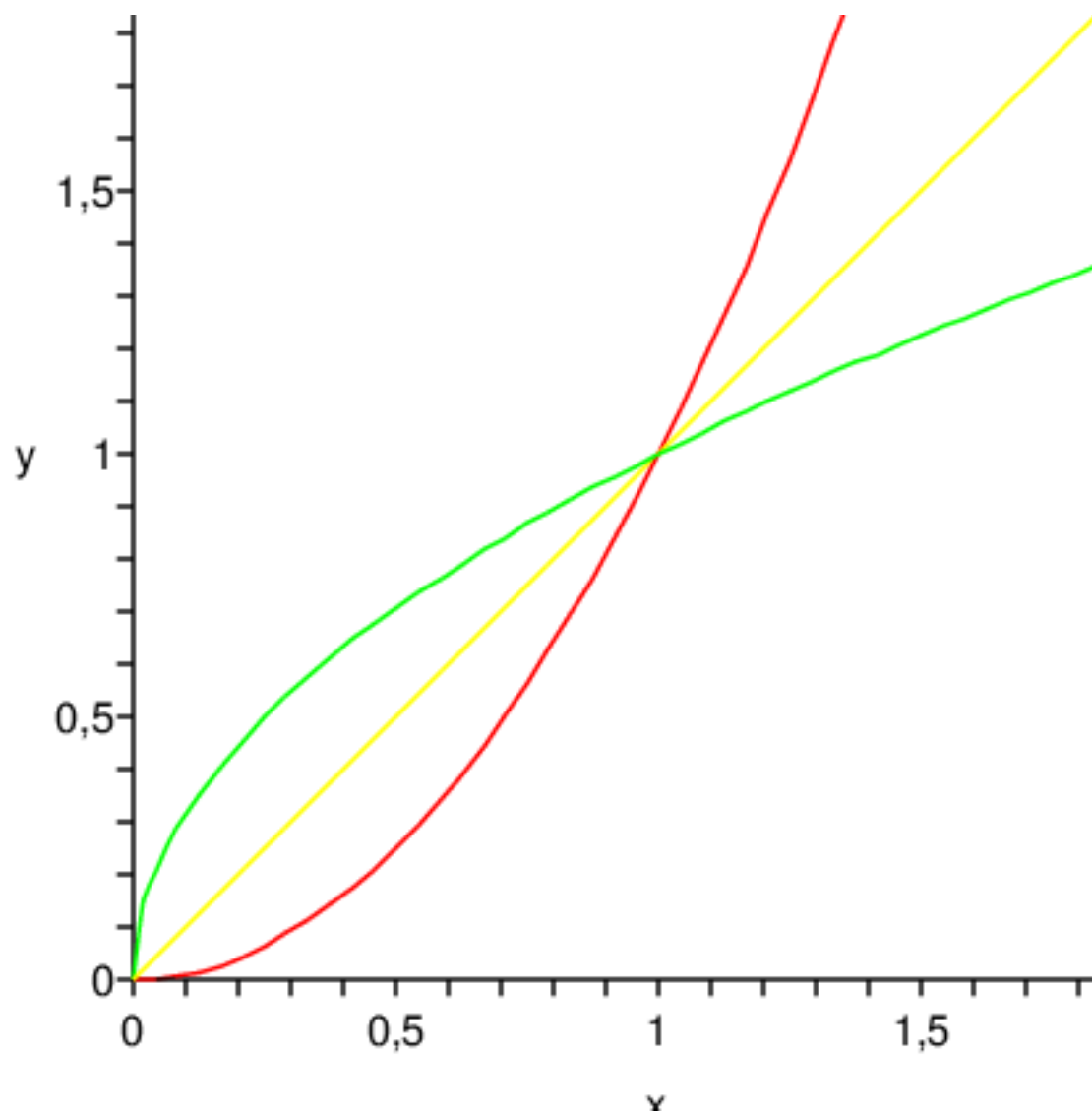
Rysunek 9: Wykresy funkcji $f(x)$ (czerw.) i $2 \times f(x)$ (ziel.).



Rysunek 10: Wykresy funkcji $f(x)$ (czerw.) i $f((1.5 \times x))$ (ziel.).



Rysunek 11: Znaczenie częstości, amplitudy i fazy w ruchu drgającym: wykresy funkcji: $f_1(x) = \sin(x)$ (czerwony) oraz $f_2(x) = 0.5 \sin(2x + 1)$ (zielony). Wykres f_2 powstał z wykresu f_1 przez zastosowane operacji: 1. zamiany argumentu: $x \rightarrow x + \frac{1}{2}$; 2. przeskalowaniu argumentu: $x + \frac{1}{2} \rightarrow 2(x + \frac{1}{2})$; 3. przeskalowaniu wartości $y \rightarrow 0.5y$.



Rysunek 12: Wykres funkcji $y = f(x) = x^2$ (czerwona) oraz odwrotnej do niej $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (zielona). Wykres funkcji odwrotnej f^{-1} uzyskujemy przez odbicie f względem prostej $y = x$ (żółta).

- rosnąca $\iff a > 0$,
- malejąca $\iff a < 0$,
- stała $\iff a = 0$.

Jak powiedziano, wykresem funkcji liniowej jest prosta. Patrząc na wszystkie możliwe proste na płaszczyźnie, widzimy, że postać $y = ax + b$ obejmuje prawie wszystkie przypadki, z wyjątkiem jednej klasy – *prostych pionowych*. Aby uwzględnić także tę sytuację, dogodnie jest przyjąć ogólniejszą postać równań prostej, a mianowicie

$$Ax + By + C = 0, \quad A \neq 0 \text{ lub } B \neq 0$$

Warunki równoległości wykresów funkcji liniowych:

- Proste zadane jako wykresy funkcji: $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe $\iff a_1 = a_2$.
- Proste zadane w postaci ogólnej $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe $\iff A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

3.1.1 Równanie liniowe z jedną niewiadomą

Def. *Równaniem liniowym z jedną niewiadomą* nazywamy równanie postaci $ax + b = 0$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Mogą zachodzić następujące sytuacje dotyczące rozwiązalności takiego równania:

rys.

- Jeśli $a \neq 0$, to równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = -\frac{b}{a}$.
- Jeśli $a = 0$ i $b = 0$, to rozwiązaniem równania jest dowolna liczba rzeczywista.
- Jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie nie posiada rozwiązań

3.2 Funkcja kwadratowa

Def. *Funkcją kwadratową* (trójmianem kwadratowym) nazywamy funkcję: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest *parabola* o wierzchołku w punkcie $p = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, gdzie $\Delta := b^2 - 4ac$ nazywamy *wyróżnikiem* trójmianu kwadratowego.

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej.

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$:

rys.

- ma dwa różne miejsca zerowe (pierwiastki): $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, gdy $\Delta > 0$;
- ma jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, gdy $\Delta = 0$;
- nie ma miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$.

Przykł. *Rzut pionowy.* Z miejsca znajdującego się 2 m nad podłogą rzucamy w górę piłkę z prędkością początkową $3m/s$. Po jakim czasie piłka upadnie na podłogę? Założyć wartość przyspieszenia ziemskiego $10m/s^2$.

Rozw. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym określona jest wzorem: $s(t) = at^2/2 + v_0t + s_0$, gdzie a – przyspieszenie, v_0 – prędkość początkowa, s_0 – droga w chwili $t = 0$. Pytamy zatem, jakiej chwili czasu t_0 będzie odpowiadała wysokość $s(t_0) = 0$. Mamy więc równanie:

$$s(t) = -5t^2 + 3t + 2 = 0,$$

skąd: $\Delta = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, $t_1 = 1[s]$, $t_2 = -0.4[s]$. Tak więc piłka upadnie na podłogę po upływie 1 sekundy. (Czemu odpowiada drugi pierwiastek t_2 ?)

Pożyteczne są

Postaci funkcji kwadratowej:

- *Postać kanoniczna:* $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$. Wyprowadźmy to:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \dots$$

robimy z tego *pełny kwadrat plus wyraz stały* (eliminacja wyrazu liniowego) – sztuczka, która się nam niejednokrotnie przyda. Mamy więc:

$$\dots = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \dots$$

... sprowadzamy do wspólnego mianownika ...

$$\dots = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Z postaci kanonicznej widać, że wykres najogólniejszej funkcji kwadratowej – to parabola, przesunięta o odcinek $-\frac{b}{2a}$ w poziomie i odcinek $-\frac{\Delta}{4a}$ w pionie. Nie jest już tak prosto dla wielomianów wyższych stopni – tam jest więcej możliwych postaci kanonicznych.

- *Postać iloczynowa:* Istnieje $\iff \Delta \geq 0$. Jeśli tak jest, to:

- ★ $y = a(x - x_0)^2$ gdy $\Delta = 0$,
- ★ $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ gdy $\Delta > 0$.

Wzory Viéte'a:

Gdy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to zachodzą wzory (Viéte'a)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (3)$$

Wykażmy (3): Zapiszmy trójmian kwadratowy (gdy ma on pierwiastki rzeczywiste) w postaci iloczynowej:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) = \\ &= a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1 x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2. \end{aligned}$$

Porównując wyrazy wolne, mamy:

$$c = ax_1 x_2 \quad \implies \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

oraz dla współczynnika stojącego przy x :

$$-a(x_1 + x_2) = b \quad \implies \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

3.3 Funkcje wymierne – homografie

Def. Funkcję postaci: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ oraz $ad - bc \neq 0$, nazywamy *homografią*. Dziedziną homografii jest $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Wykresem funkcji homograficznej jest *hiperbola*: wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$ odpowiednio poprzysuwany: Napiszmy równanie funkcji homograficznej:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax + \frac{b}{c}}{cx + \frac{d}{c}} = \\ &= \frac{a}{c} \left[\frac{x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} \right] = \frac{a}{c} \left[1 + \frac{bc - ad}{ac} \frac{1}{x + \frac{d}{c}} \right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{x + \frac{d}{c}} \end{aligned}$$

Widać, iż ogólną homografię $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ powstaje ze 'standardowej' $y = \frac{1}{x}$ przez: i) przesunięcie pionowe o $y_0 = \frac{a}{c}$; ii) przesunięcie poziome o $x_0 = -\frac{d}{c}$; iii) przeskalowanie o czynnik $\frac{bc-ad}{c^2}$.

Prostą (poziomą) o równaniu $y = \frac{a}{c}$ nazywamy *asymptotą poziomą*; prostą (pionową) o równaniu $x = -\frac{d}{c}$ nazywamy *asymptotą pionową*.

Przykł. Znaleźć zbiór $X = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x-1} > 5\}$.

Rozw. ... , Po drodze pojawia się postać 'kanoniczna' homografii:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}.$$

Odp. $X =]1, 2[$.

4 Funkcje trygonometryczne

4.1 Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

RysTrojkata

Def. *Sinusem* kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi do przeciwprostokątnej:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Def. *cosinusem* kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do danego kąta do przeciwprostokątnej:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Def. *Tangensem* kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi do przyprostokątnej przyległej do danego kąta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Def. *Cotangensem* kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do danego kąta do przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Uwaga. Czasem, choć rzadko, używa się też funkcji *secans* i *cosecans*. Są one definiowane jako: $\sec \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.

4.2 Miara łukowa kąta

Def. *1 radian* (1 rad) jest to miara kąta opartego na łuku, którego długość jest równa długości promienia okręgu.

Mamy więc proste wzory na zamianę miary kąta w stopniach α_s na miarę łukową α_r :

$$\alpha_r = \frac{\pi \alpha_s}{180}, \quad \alpha_s = \frac{180 \alpha_r}{\pi}$$

W szczególności: $180^\circ = \pi$ (rad); $90^\circ = \frac{\pi}{2}$; $60^\circ = \frac{\pi}{3}$; $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ (podając kąt w mierze łukowej, często się już nie podaje że jest on mierzony w radianach).

4.3 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Mając zdefiniowane funkcje trygonometryczne dla dowolnego kąta $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, łatwo rozszerzyć te definicje na dowolny inny kąt. Robi się to tak: Niech $\alpha_{\text{F.tryg.dow}}$ będzie kątem skierowanym umieszczonym w ukł. wsp. tak, że jego początkowe ramię pokrywa się z dodatnią półosią OX , a końcowym ramieniem jest półprosta o początku w punkcie $(0, 0)$. Na końcowym ramieniu wybieramy dowolny punkt $P = (x, y)$, różny od punktu $(0, 0)$.

Funkcje trygonometryczne kąta α definiujemy w sposób następujący:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

gdzie r jest odległością punktu P od punktu $(0, 0)$, zaś $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \text{ więc } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \text{ więc } \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

4.3.1 Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych

:

"W pierwszej wszystkie są dodatnie,
W drugiej tylko sinus,
W trzeciej tangens i kotangens,
A w czwartej cosinus".

4.3.2 Wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych wartości kątów:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	NI
$\operatorname{ctg} \alpha$	NI	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Tu
wy-
kre-
sy
funk-
cji
try-
gon.

4.3.3 Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych

- Funkcja $f(x) = \cos(x)$ jest *parzysta*: $\cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Funkcja $f(x) = \sin(x)$ jest *nieparzysta*: $\sin(-x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Funkcja $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ jest *nieparzysta*: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x) \quad \forall x \in D_f$
- Funkcja $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$ jest *nieparzysta*: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}(x) \quad \forall x \in D_f$

4.3.4 Okresowość funkcji trygonometrycznych

- Okresem podstawowym funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ jest 2π : Zachodzi: $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ oraz $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- Okresem podstawowym funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$ jest π : Zachodzi: $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg}(x)$ oraz $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg}(x) \quad \forall x \in D_f, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Częstość? Amplituda?

4.3.5 Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta, tzn. tożsamości trygonometryczne

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ – jest to tzw. *jedynka trygonometryczna*;
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Przy użyciu tych tożsamości trygonometrycznych można udowodnić wiele innych – zależnie od potrzeby.

4.3.6 Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi różnych kątów

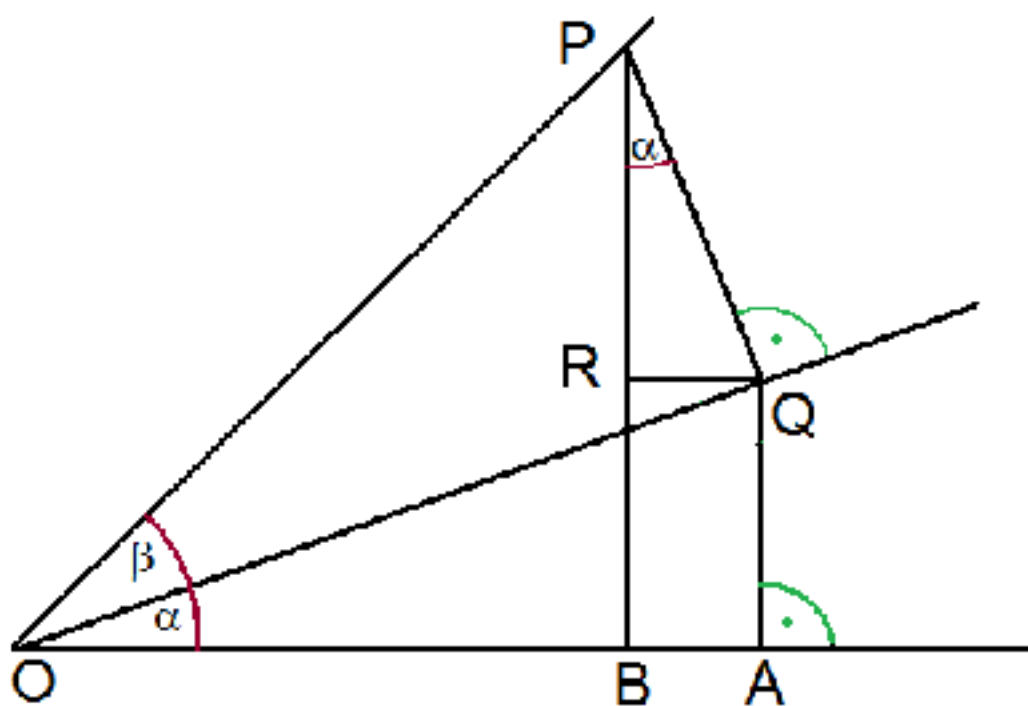
Dla dowolnych kątów α, β zachodzą związki:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (4)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (5)$$

Dow.

Weźmy kąty $\alpha, \beta > 0$ i takie, że $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ (dla innych, łatwo będzie się przekonać o prawdziwości otrzymanych wzorów). Rozpatrzmy sinus sumy.



Rysunek 13: Do wyprowadzenia wzoru na sinus sumy

Popatrzmy na rys. 13: Odcinek AQ wzięliśmy jako prostopadły do OA , zaś PQ jako prostopadły do OQ . Stąd i z podobieństwa trójkątów wynika, że kąt RPQ jest równy α .

Mamy:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{|PB|}{|PO|}$$

Założmy, że długość $|PO|$ znamy, i wyrażmy przez nią długość $|PB| = |PR| + |RB|$. Mamy: $\frac{|PQ|}{|PO|} = \sin \beta$, skąd $|PQ| = |OP| \sin \beta$. Dalej,

$$\frac{|PR|}{|PQ|} = \cos \alpha, \text{ skąd } |PR| = |PQ| \cos \alpha = |OP| \sin \beta \cos \alpha.$$

Dla odcinka RB mamy: $|RB| = |QA|$. Żeby wyliczyć $|QA|$, najspierw wyliczmy $|OQ|$:

$$\frac{|QA|}{|OQ|} = \sin \alpha, \text{ skąd } |QA| = |OQ| \sin \alpha. \text{ Ale:}$$

$$\frac{|OQ|}{|OP|} = \cos \beta, \text{ skąd } |QA| = |OQ| \sin \alpha = |OP| \sin \alpha \cos \beta.$$

Razem:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{|PR| + |RB|}{|PO|} = \frac{|OP|(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)}{|OP|} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \end{aligned}$$

czyli pokazaliśmy wzór (4).

Dla obliczenia cosinusa sumy, skorzystajmy z jedynki trygonometrycznej:

$$\cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \sin^2(\alpha + \beta) = 1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \sin \beta =$$

... zamieniamy 1 na $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$...

$$\begin{aligned} &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \sin \beta \\ &= \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \sin \beta \\ &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \sin \beta \\ &= (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta)^2; \end{aligned}$$

stąd mamy

$$\cos(\alpha + \beta) = \pm(\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta).$$

Jaki znak należy wziąć: plus czy minus? Weźmy przypadek małych kątów α i β . Wtedy cosinusy są bliskie $+1$, a sinusy bliskie zeru; widzimy więc, że w powyższej równości należy wziąć *minus*. Ostatecznie otrzymujemy

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

czyli wzór (5).

cbdo

Wynikają z nich, po przyjęciu $\alpha = \beta$, związki na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (6)$$

oraz połówkowego kąta:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (7)$$

4.3.7 Wzory redukcyjne na sprowadzanie kąta do pierwszej ćwiartki

Okresowość funkcji trygonometrycznych oraz wzory na sumę kątów pozwalają sprowadzić dowolny argument funkcji trygonometrycznej do I. ćwiartki.

Przykł.

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \sin 270^\circ \cos \alpha + \cos 270^\circ \sin \alpha = -\cos \alpha;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos 180^\circ \cos(-\alpha) - \sin 180^\circ \sin(-\alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$$

4.4 Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych

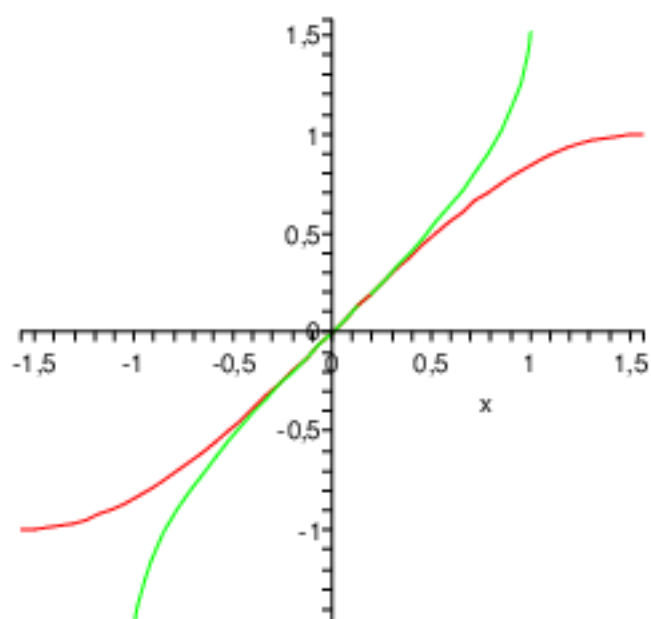
Z uwagi na okresowość funkcji trygonometrycznych, *nie można* zdefiniować funkcji odwrotnych do nich dla *wszystkich* argumentów. Funkcję odwrotną do f można zdefiniować dla tych argumentów, dla których f jest wzajemnie jednoznaczna.

Weźmy funkcję $f(x) = \sin x$ (+ zbiory, pomiędzy którymi f działa). Patrząc na wykres $y = f(x) = \sin x$, widać, że $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczna, jeśli za zbiór argumentów weźmiemy $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, zaś za zbiór wartości $Y = [-1, 1]$. Funkcję odwrotną $\sin^{-1}(\cdot)$ do funkcji $\sin(\cdot)$ nazywamy $\arcsin(\cdot)$ i definiujemy – zgodnie z definicją funkcji odwrotnej – jako: Jeśli $y = \sin(x)$, to $x = \sin^{-1}(y) = \arcsin(y)$.

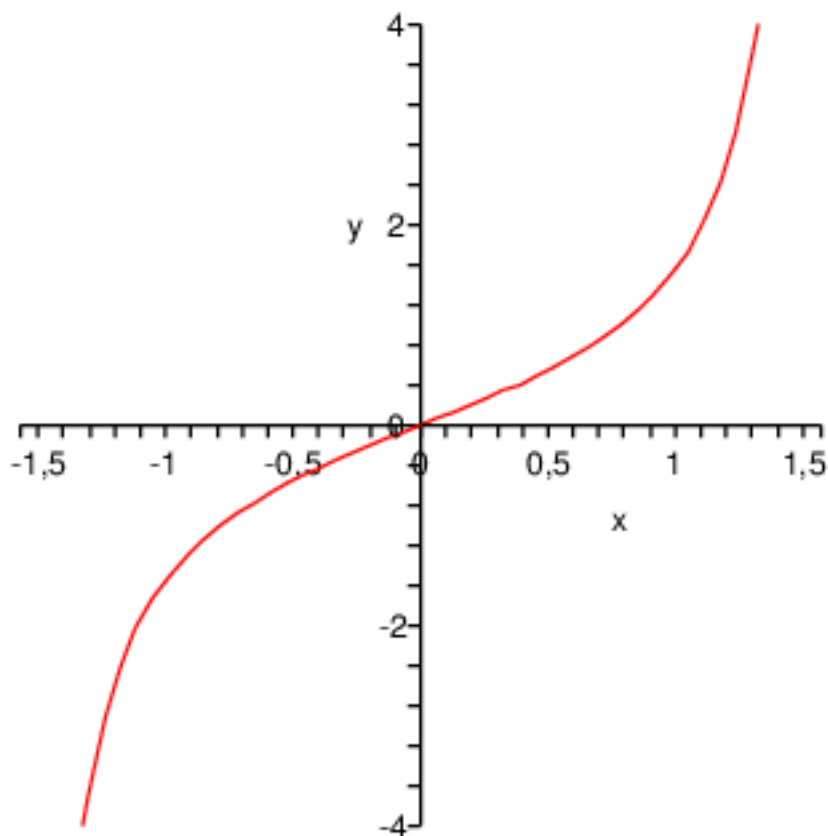
Uwaga: Wzajemna jednoznaczność $\sin : X \rightarrow Y$ ma miejsce także w innych sytuacjach, np. $X_{ns} = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $Y = [-1, 1]$, i zdefiniować funkcję $\arcsin_{ns} : [-1, 1] \rightarrow [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Standardowa umowa mówi, że za X bierze się $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Ostatecznie (aby oswoić z różnymi notacjami):

Def. Dla funkcji $\sin(\cdot) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$ definiujemy odwrotną do niej funkcję $\arcsin(\cdot) : [-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jako: Jeśli $y = \sin(x)$, to $x = \arcsin(y)$.



Rysunek 14: Wykres funkcji $y = f(x) = \sin(x)$ (czerw.) oraz odwrotnej do niej $y = f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ (ziel.).



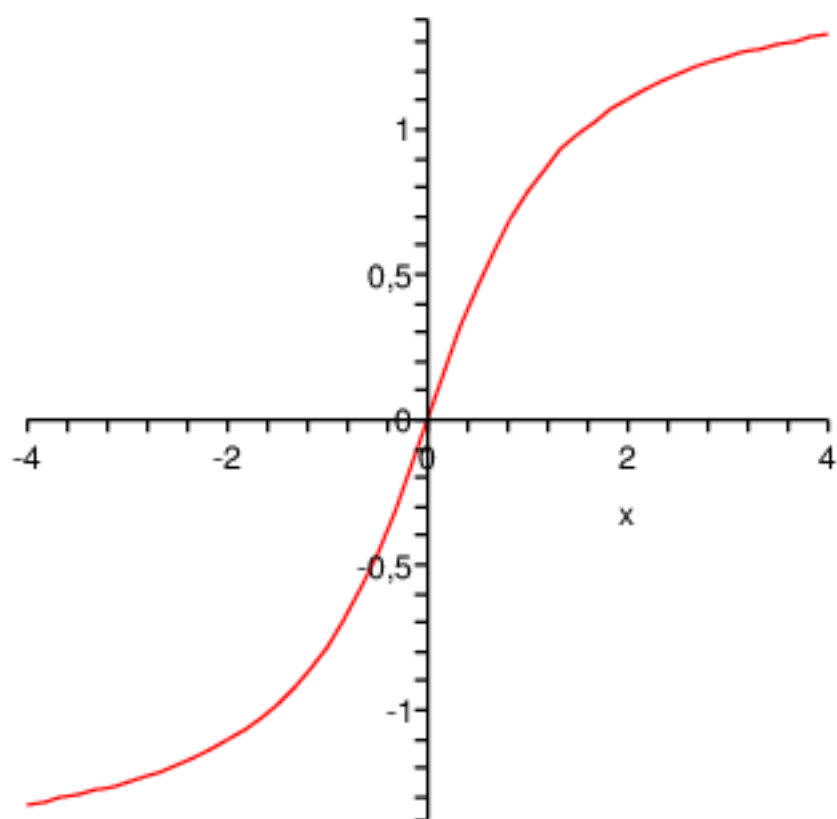
Rysunek 15: Wykres funkcji $y = f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

(więc np. $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ itd.). Wykres funkcji arcsin – zgodnie z ogólną regułą uzyskiwania wykresów funkcji odwrotnych – otrzymuje się z wykresu sin przez zamianę osi lub równoważnie przez symetrię względem osi $y = x$.

Dla innych funkcji trygonometrycznych funkcje odwrotne definiuje się ja-
ko: Wykr.
sin
arcsin

Def. Dla funkcji $\cos(\cdot): [0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$ definiujemy odwrotną do niej funkcję $\arccos(\cdot): [-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi]$ jako: Jeśli $y = \cos(x)$, to $x = \arccos(y)$.

Def. Dla funkcji $\operatorname{tg}(\cdot):]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\xrightarrow{\operatorname{tg}}]-\infty, \infty[$ definiujemy odwrotną do niej funkcję $\operatorname{arctg}(\cdot):]-\infty, \infty[\xrightarrow{\operatorname{arctg}}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ jako: Jeśli $y = \operatorname{tg}(x)$, to $x = \operatorname{arctg}(y)$.



Rysunek 16: Wykres funkcji $y = f(x) = \text{arctg}(x)$.

4.4.1 Biegunowy układ współrzędnych

Punkt na płaszczyźnie można zaznaczyć, zadając *układ współrzędnych* i pisząc współrzędne punktu p w tym układzie (są to też *składowe wektora* $\vec{OP}$: Do wyznaczenia położenia punktu na płaszczyźnie można jednak użyć innego układu współrzędnych. Jeżeli zamiast (x, y) wprowadzimy r, ϕ przez

$$x = \cos \phi, \quad y = \sin \phi$$

(lub na odwrót: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctg \frac{y}{x}$), to jest to równie dobry układ współrzędnych co (x, y) : Każdemu punktowi płaszczyzny odpowiada dokładnie jedna para liczb (r, ϕ) oraz na odwrót: Każdej parze (r, ϕ) odpowiada dokładnie jeden punkt płaszczyzny. (jest jeden WYJĄTEK: punkt $(0, 0)$, gdzie kąt ϕ nie jest określony).

Jedną z większych sztuk w matematyce (i fizyce) jest dobór odpowiedniego układu współrzędnych. Gdy się go odpowiednio (do zagadnienia) dobierze, to problem często znacznie się upraszcza lub nawet trywializuje.

Przykł. Równanie okręgu (o środku w $(0, 0)$ i promieniu R) ma we współrzędnych kartezjańskich postać

$$x^2 + y^2 = R^2$$

zaś we współrzędnych biegunowych

$$r = R, \quad \phi - \text{dowolne.}$$

Przykł. Rozważmy krzywą (*kardioidę*)

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad a > 0 \quad (8)$$

Analiza we współrzędnych kartezjańskich, aczkolwiek możliwa, jest dość uciążliwa. Przejdźmy jednak do współrzędnych biegunowych:

$$(r^2 - ar \cos \phi)^2 = a^2 r^2 \implies r^2 - ar \cos \phi = ar$$

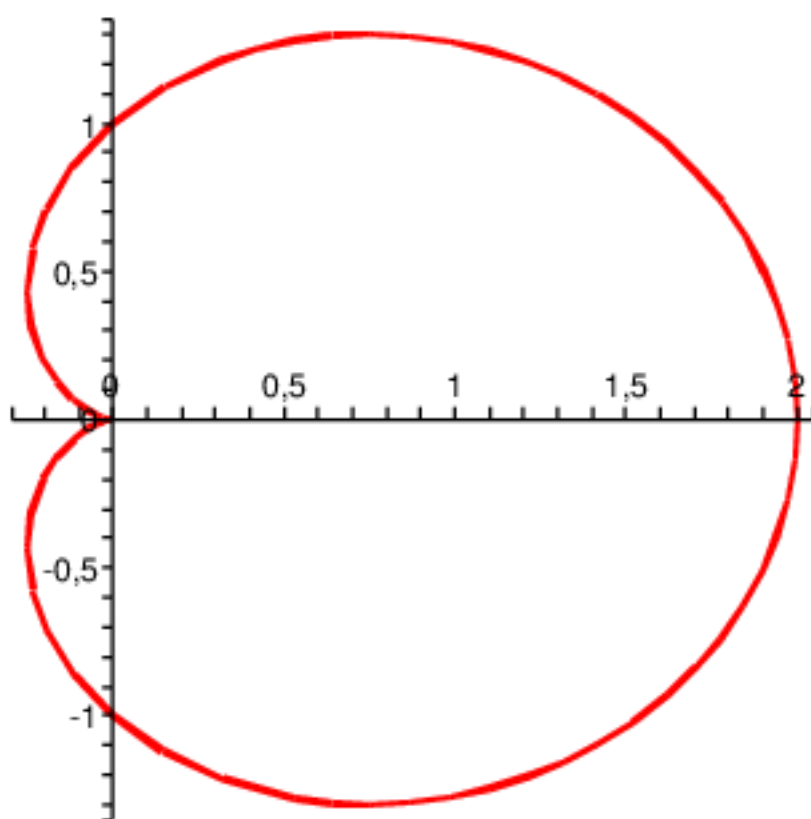
tzn.

$$r = a(1 + \cos \phi) \quad (9)$$

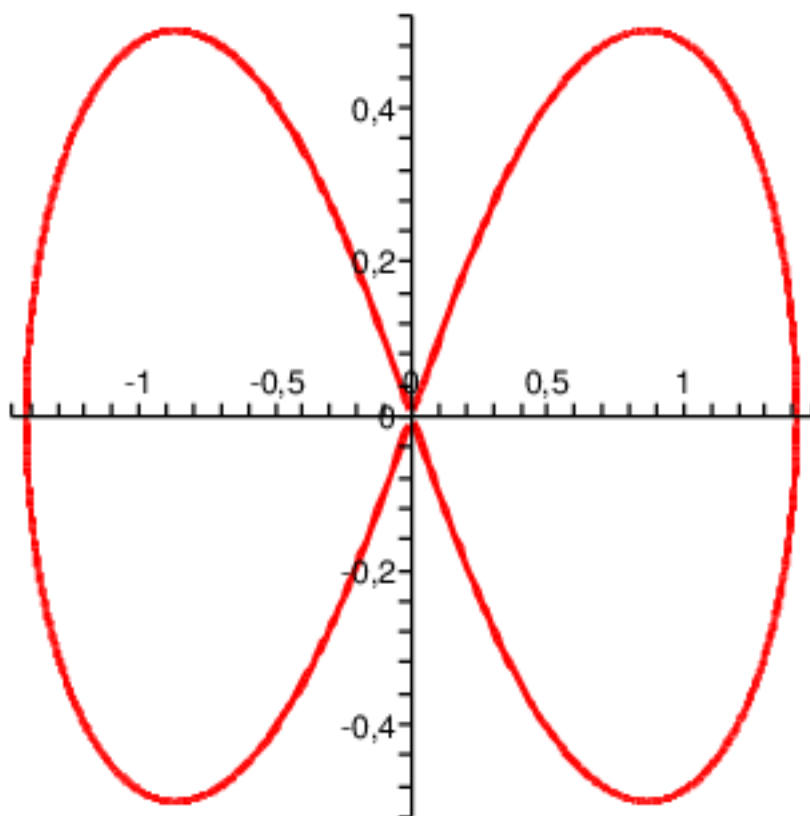
We współrzędnych biegunowych badanie jest o wiele łatwiejsze i krzywą można narysować "od ręki".

Przykł. Rozważmy krzywą (*lemniskata Bernoulliego*)

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0 \quad (10)$$



Rysunek 17: Wykres kardiody (8) lub (9) dla $a = 1$.



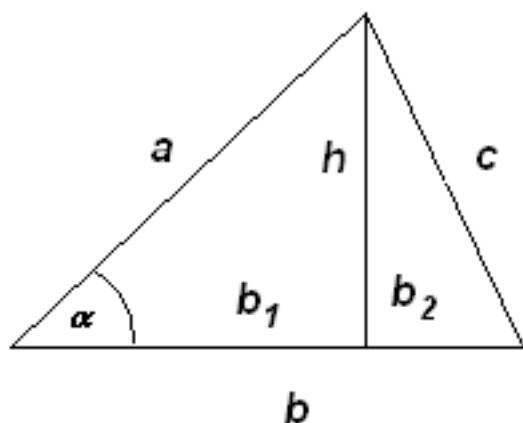
Rysunek 18: Wykres lemniskaty (10) lub (11) dla $a = 1$.

Można ją wykreślić we współrzędnych kartezjańskich, aczkolwiek jest to dość pracochłonne. We współrzędnych biegunowych ma ona o wiele dogodniejszą do analizy postać. Mamy bowiem:

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 2a^2r^2 \cos 2\phi$$

czyli

$$r^2 = a\sqrt{2 \cos 2\phi} \quad (11)$$



Rysunek 19: Do twierdzenia cosinusów

4.4.2 Twierdzenie cosinusów

Wróćmy jeszcze do do bardziej pocziwej geometrii, tzn. tej dla trójkątów, i pokażmy dwa ładne a czasem i pożyteczne twierdzenia.

Rozpatrzmy trójkąt o bokach długości a, b, c , gdzie kąt między bokami a i b wynosi α . p. rys. 19. Ma miejsce następujące uogólnienie twierdzenia Pitagorasa, zwane *twierdzeniem cosinusów*.

Tw.(cosinusów). Zachodzi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha. \quad (12)$$

Dow. Mamy:

$$\frac{b_1}{a} = \cos \alpha \implies b_1 = a \cos \alpha.$$

Z tw. Pitagorasa:

$$b_1^2 + h^2 = a^2, \quad b_2^2 + h^2 = c^2$$

Weźmy różnicę tych wyrażeń:

$$\begin{aligned} c^2 - a^2 &= b_2^2 + h^2 - b_1^2 - h^2 = b_2^2 - b_1^2 = (b_1 + b_2)(b_2 - b_1) \\ &= b(b_2 + b_1 - 2b_1) = b(b - 2a \cos \alpha) \\ &= b^2 - 2ab \cos \alpha \end{aligned}$$

Rysunek 20: Kąt środkowy β i kąt wpisany. Wartość kąta wpisanego α jest niezależna od położenia wierzchołka, i zachodzi relacja: $\beta = 2\alpha$.

Rysunek 21:

Zatem:

$$c^2 - a^2 = b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

a to jest dokładnie (12) – teza tw. cosinusów.

Żeby było sprawiedliwie, to oprócz tw. cosinusów będzie też tw. sinusów.

4.4.3 Twierdzenie sinusów

Najsamprzód pokażemy twierdzenie, znane (chyba) pod nazwą 'twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym'.

Tw. (o kącie wpisanym i środkowym). Rozpatrzmy okrąg zadaną cięciwą. Niech kąt β będzie kątem środkowym z ramionami przechodzącymi przez końce cięciwy. Wówczas, dla dowolnego kąta wpisanego takiego, że jego ramiona przechodzą przez końce cięciwy, miara α kąta wpisanego jest równa

$$\beta = 2\alpha. \quad (13)$$

(p. rys. 20).

Dow. Narysujmy odcinek łączący środek okręgu z wierzchołkiem kąta wpisanego (odcinek niebieski na rys. 21). Otrzymujemy w ten sposób dwa trójkąty o kątach wewnętrznych $\alpha_1, \tau_1, \gamma_1, \alpha_2, \tau_2, \gamma_2$. Ponadto oba te trójkąty są *równoramienne* (mają dwa boki równe promieniowi okręgu), czyli $\alpha_1 = \tau_1, \alpha_2 = \tau_2$.

Mamy następujące, raczej oczywiste relacje:

$$\alpha_1 + \tau_1 + \gamma_1 = \pi, \quad \alpha_2 + \tau_2 + \gamma_2 = \pi \implies \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi,$$

a że też zachodzi

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

to

$$2\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi.$$

A że

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \beta = 2\pi;$$

to ostatecznie

$$2\alpha = \beta.$$

o pokazanie czego chodziło.

cbdo.

Wniosek. Wszystkie trójkąty wpisane w okrąg, takie, że jeden z boków stanowi średnicę okręgu, są prostokątne. P. rys. 22.

To teraz właściwie

Tw. (*sinusów*). Rozpatrzmy trójkąt o bokach a, b, c , wpisany w okrąg o promieniu R . Niech kąty w trójkącie będą: α (przeciwległy do boku a), β (do boku b), γ (do boku c) (p. Rys. 23). Wtedy zachodzą równości:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2R}. \quad (14)$$

Dow. Załóżmy, że wszystkie kąty trójkąta są mniejsze od kąta prostego (gdy tak nie jest to rozszerzenie dowodu nie jest trudne). Dla kąta wierzchołkowego α , którego ramiona przechodzą przez końce boku a , narysujmy taki kąt wierzchołkowy (którego ramiona również przechodzą przez końce boku a , a więc ten kąt jest równy α), którego ramię będzie średnicą okręgu; ramiona tegoż kąta są pomarańczowe, p. rys. 24

Tak więc trójkąt o obu ramionach pomarańczowych jest *prostokątny*, i widać, że

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}, \implies \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{1}{2R}.$$

Identyczne rozważania można przeprowadzić dla pozostałych par β, b i γ, c , skąd mamy tezę (14) twierdzenia sinusów.

cbdo

Rysunek 22:

Rysunek 23: Ilustracja twierdzenia sinusów – p. wz. (14).

Rysunek 24: Do dowodu twierdzenia sinusów.

5 Wielomiany

Wielomianem jednej zmiennej (tu: rzeczywistej) nazywamy funkcję

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{gdzie } a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Liczby $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy *współczynnikami* wielomianu.

Jeśli $a_n \neq 0$, to liczbę n nazywamy *stopniem wielomianu*: $\deg W = n$. ("degree")

Jeśli $\forall_{x \in \mathbb{R}} W(x) = 0$, to wielomian nazywamy *zerowym*. Ma on wszystkie współczynniki równe zeru. Takiemu wielomianowi nie przypisujemy żadnego stopnia. (Można mu też przypisać stopień $-\infty$).

Def. Mówimy, że Dwa wielomiany $f(x), g(x)$ zmiennej rzeczywistej są równe $\iff$ gdy przyjmują te same wartości dla *każdej* wartości zmiennej x : $f = g \iff \forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) = g(x)$.

Mamy proste

Tw. Dwa wielomiany $f(x), g(x)$ zmiennej rzeczywistej są równe (zapisujemy to: $f \equiv g$) wtedy i tylko wtedy gdy mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x .

Tw. (o dzieleniu wielomianów) Jeśli $f(x), g(x)$ są wielomianami i $g(x)$ nie jest wielomianem zerowym, to istnieją takie wielomiany $q(x), r(x)$, że $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, przy czym $\deg r < \deg g$. Wielomian $q(x)$ nazywamy *ilorazem* wielomianów f i g , zaś wielomian r – *resztą* z dzielenia f przez g .

Def. Jeśli $r(x) \equiv 0$, to mówimy, że wielomian f jest *podzielny* przez wielomian g .

Def. *Pierwiastkiem* wielomianu f nazywamy taką liczbę rzeczywistą x_0 , że $W(x_0) = 0$.

Tw. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $W(a)$.

Dow. jest natychmiastowy: Stopień dwumianu $x - a$ jest 1, zatem stopień reszty musi być 0, czyli jest ona liczbą. Oznaczmy ją C . Mamy więc:

$$W(x) = q(x)(x - a) + C.$$

Aby obliczyć C , weźmy $x = a$ po obu stronach powyższej równości. Uczyniwszy to, dostajemy:

$$W(a) = C$$

Wniosek (Tw. Bézout). Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - a$.

Inna postać zapisu. Jeśli a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to można go zapisać w postaci: $W(x) = p(x)(x - a)$, gdzie $p(x)$ jest wielomianem stopnia o 1 niższego niż $W(x)$.

Tw. Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

Tw. Każdy wielomian n -tego stopnia ma co najwyżej n pierwiastków.

Tw. Każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek.

Def. Liczbę a nazywamy k -krotnym (gdzie $k \in \mathbb{N}$) pierwiastkiem wielomianu $W(x) \iff W(x)$ jest podzielny przez $(x - a)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x - a)^{k+1}$. Liczbę k nazywamy *krotnością* pierwiastka.

6 Funkcje wymierne

Def. Funkcję: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x), Q(x)$ są wielomianami i $Q(x) \not\equiv 0$, nazywamy *funkcją wymierną*. Dziedziną D_f tej funkcji jest zbiór $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

7 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

7.1 Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą definiuje się najspierw dla wykładników naturalnych. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ można zapisać:

$$a^n = a \cdot a \dots a \quad (n \text{ razy}) \quad (15)$$

Stąd od razu wynika, że:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (16)$$

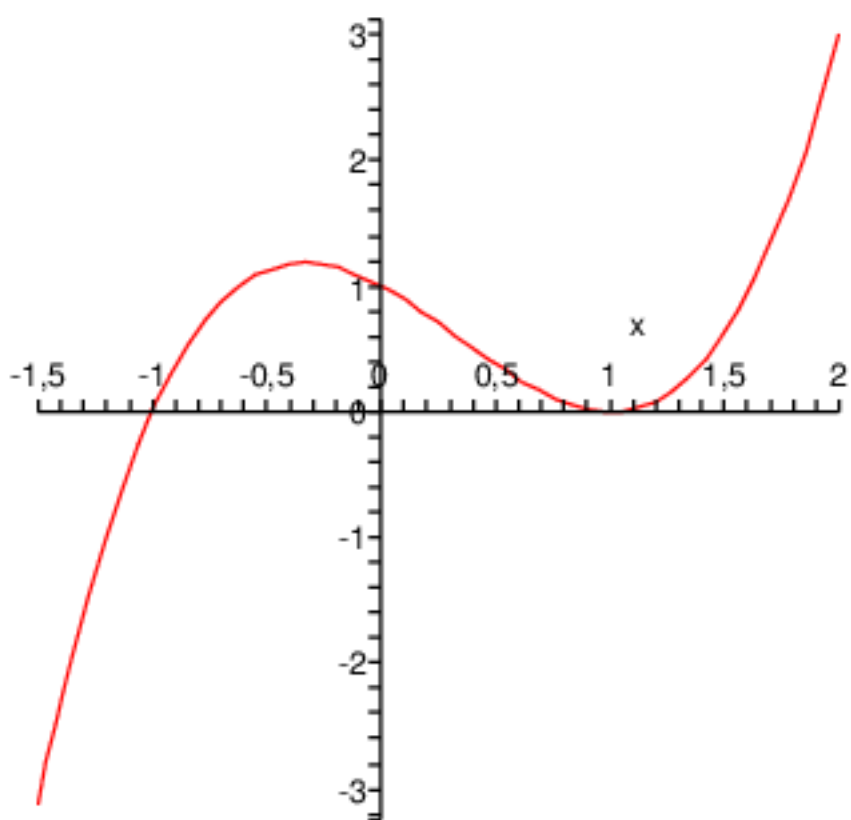
oraz

$$(a^n)^m = a^{nm} \quad (17)$$

Przyjmujemy, że $a^0 = 1$.

Ujemną potęgę definiujemy rozszerzając zasadę (16) przez dopuszczenie, aby n, m były dowolnymi liczbami całkowitymi. Weźmy:

$$a^{-n}a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$



Rysunek 25: Liczba $x_1 = -1$ jest pierwiastkiem 1-krotnym, a liczba $x_2 = 1$ – pierwiastkiem 2-krotnym wielomianu $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)$.

skąd

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (18)$$

(zakładamy tu, że $a \neq 0$). Stąd od razu mamy

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (19)$$

Definiujemy następnie potęgi *ułamkowe*. Tu zakładamy, że $a > 0$ (zaraz się okaże dlaczego). Oznaczmy: $b = a^{\frac{1}{n}}$. Mamy:

$$b^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

co znaczy, że $b = \sqrt[n]{a}$, czyli

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \quad (20)$$

Dowolną potęgę wymierną liczby a definiujemy teraz jako

$$a^{\frac{p}{n}} = (\sqrt[n]{a})^p \quad (21)$$

gdzie $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$.

Mamy też: Jeśli $a > 1$ i $b > 0$, to $a^b > 1$ i, w konsekwencji, jeśli $c_1 > c_2$, to $a^{c_1} > a^{c_2}$. (Dla $a < 1$ znaki trzeba odwrócić). To pozwala przez ciągłość zdefiniować a^b dla dowolnych $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$. Widać też, że funkcja wykładnicza jest *monotoniczna* (rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $a < 1$).

Wykresy funkcji wykładniczej dla $a > 1$ i $a < 1$ wyglądają tak:

Jako że funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca (weźmy, dla ustalenia uwagi, $a > 1$) w całej swojej dziedzinie, (dziedziną jest $\mathbb{R}$ a zbiorem wartości $\mathbb{R}_+$) to istnieje funkcja do niej odwrotna. Zwiemy ją *logarytmem*.

7.2 Funkcja logarytmiczna

Zakładamy, że $a > 0$, $a \neq 1$.

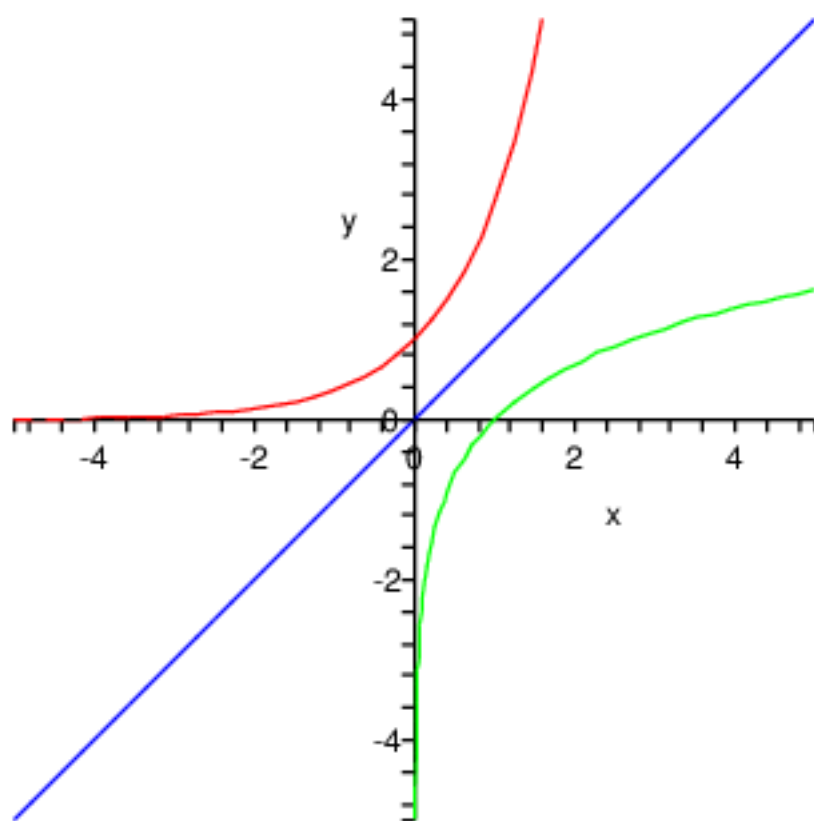
Def. Dla danych a oraz y , jeśli x jest takie, że $a^x = y$, to x nazywamy *logarytmem* o podstawie a z y i oznaczamy: $x = \log_a y$. Dziedziną logarytmu jest $\mathbb{R}_+$, a zbiorem wartości $\mathbb{R}$.

Mamy więc dla dowolnego a : $\log_a a = 1$ (ponieważ $a^1 = a$) oraz $\log_a 1 = 0$ (ponieważ $a^0 = 1$). Własności (16) odpowiada:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad \text{oraz} \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad (22)$$

a własności (17):

$$\log_a(b^c) = c \log_a b \quad (23)$$



Rysunek 26: Funkcja wykładnicza e^x (czerw.) i logarytmiczna $\log_e x$ (ziel.)

W szczególności

$$\log_a(\sqrt[n]{b}) = \frac{1}{n} \log_a b \quad (24)$$

Znaczenie logarytmów. Skala logarytmiczna.

Tu: Trzęsienia Ziemi i skala Richtera; oporność materiałów.

Często się zdarza, że trzeba przeliczać logarytmy o różnych podstawach. Najbardziej chyba rozpowszechnione są logarytmy *dziesiętne* (tzn. o podstawie 10) i *naturalne* o podstawie $e \approx 2,718...$ (o liczbie e powiemy więcej za kilka wykładów). Jak przeliczać jedno na drugie?

Rozważmy ogólniejszą sytuację – logarytmów o dwóch podstawach a oraz b . Wyrażmy teraz $\log_a x$ przez $\log_b x$.

Wyrażmy najspierw a jako pewną potęgę b . Napiszmy: $a = b^A$ i obustronnie zlogarytmujmy. Mamy: $\log_a a = 1 = \log_a(b^A) = A \log_a b$, skąd

$$A = \frac{1}{\log_a b}$$

Weźmy teraz: $y = a^x$; mamy więc: $x = \log_a y$. Z drugiej strony, $\log_b y = \log_b(b^{Ax}) = Ax = \frac{1}{\log_a b} x$ czyli

$$\log_a b \log_b y = \log_a y \quad (25)$$

Przykł. Biorąc $a = e$, $b = 10$, mamy: $\ln y = \ln 10 \cdot \log_{10} y \approx 2,303 \log_{10} y$.

8 Zasada indukcji matematycznej

Zbiór liczb naturalnych posiada bardzo ważną własność, której często się używa w dowodach. Mówi ona że:

Niech będzie dana jakaś własność liczb naturalnych (nazwijmy ją *tezą indukcyjną* T_n , która spełnia następujące warunki:

1. Liczba 1 posiada tę własność (tzn. teza T_1 jest prawdziwa),
2. Jeśli liczba n posiada tę własność, to posiada ją również liczba $n + 1$ (tzn. prawdziwa jest implikacja: $T_n \implies T_{n+1}$).

Zasada indukcji oznacza, że przy powyższych założeniach, *każda* liczba naturalna posiada tę własność (tzn. teza T_n jest prawdziwa dla każdej $n \in \mathbb{N}$).

Zasada indukcji odpowiada następującej intuicji: Jeśli prawdziwa jest teza T_1 , to – na mocy 2) – prawdziwa jest również teza T_2 . Skoro tak, to z 2) prawdziwa jest również teza T_3 , i znów używając 2) prawdziwa jest teza T_4 itd.

Przykł. *Nierówność Bernoulliego:* Mówi ona, że:

Tw. Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby rzeczywistej $a \geq -1$ zachodzi wzór

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad (26)$$

Dow.

1. Sprawdzamy prawdziwość tezy T_1 , tzn. czy nierówność jest prawdziwa dla $n = 1$. Mamy: $1+a \geq 1+a$ czyli ok.
2. Sprawdzamy prawdziwość implikacji $T_n \implies T_{n+1}$. Zapiszmy prawą stronę T_{n+1} :

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq \text{||korzystamy z założenia o prawdziwości } T_n \dots$$

$$\dots \text{ oraz że } (1+a) \geq 0 \text{||} \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

czyli, zakładając prawdziwość tezy T_n , otrzymaliśmy prawdziwość tezy T_{n+1} . Z zasady indukcji wynika więc, że teza T_n jest prawdziwa dla każdej $n \in \mathbb{N}$ – tzn. że nierówność (26) jest prawdziwa $\forall n \in \mathbb{N}$

Przykł. *Dwumian Newtona.* Najsamprzód jednak zdefiniujemy (a dla tych, co znają, przypomnimy) symbol *silnia*: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$, (przyjmujemy też, że $0! = 1$), a następnie *współczynniki Newtona*:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \quad (27)$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (28)$$

zakładamy, że n i k są to liczby naturalne, oraz $n \geq k$. Mamy:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Pokażemy teraz, że $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ zachodzi

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Liczymy bezpośrednio:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} \cdot \frac{k}{k} \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1+k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \binom{n+1}{k}.$$

Teraz przystępujemy do udowodnienia *wzoru dwumiennego Newtona*:

Tw. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n. \quad (29)$$

Uwaga. Dla $n = 1$ wzór (29) jest oczywisty. Dla $n = 2$ i $n = 3$ wzór (29) powinien być znany ze szkoły średniej (a jeśli nie jest, niech Czytelnik sprawdzi, że $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$).

Tak więc, zgodnie ze schematem dowodu indukcyjnego:

1. teza T_1 jest prawdziwa.

2. Aby pokazać wynikanie $T_n \implies T_{n+1}$, weźmy prawą stronę równości (29) dla $n+1$. Mamy:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b)^n a + (a+b)^n b,$$

i korzystając teraz z założenia o prawdziwości T_n , mamy

$$\begin{aligned} & (a+b)^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \dots + \binom{n}{n} a b^n + \\ &+ a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^n + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \dots + \binom{n+1}{n} a b^n + b^{n+1}, \end{aligned}$$

a jest to właśnie lewa strona równości (29) dla $n+1$. Zatem, możemy zakończyć dowód mówiąc, że

3. Równość (29) jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga. Wzór na dwumian Newtona daje się zapisać o wiele krócej używając symbolu *sumy*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (30)$$

Tu symbol: $\sum_{k=0}^n A_k$ oznacza, że należy utworzyć sumę $n+1$ składników, które powstają z wyrażenia A_k przez podstawianie na miejsce k kolejno liczb $0, 1, 2, \dots, n$.

Przykł. Pokazać, że

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1). \quad (31)$$

Przykł. Pokazać, że

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \quad (32)$$

Przykł. (startuje się od $n_0 > 1$) Pokazać, że $\forall n > 2$ zachodzi $2^n > 2n + 1$.

Przykł. (startuje się od $n_0 > 1$) Pokazać, że $\forall n > 4$ zachodzi $2^n > n^2$.

Wsk. Można wykorzystać poprzednie zadanie.

Przykł. (używa się tezy nie tylko T_n , ale też T_{n-1} aby pokazać prawdziwość T_{n+1}) *Ciąg Fibonacciego*. Określony jest on rekurencyjnie: $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$