

1 Całki krzywoliniowe

Dotąd całkowaliśmy po n -wymiarowych podzbiorach $\mathbb{R}^n$ – w praktyce, po dwuwymiarowych podzbiorach $\mathbb{R}^2$ oraz trójwymiarowych podzbiorach $\mathbb{R}^3$. Zapotrzebowanie ze strony fizyki, a także matematyki stymulowało modyfikację i rozszerzenie dotąd używanych pojęć tak, aby móc całkować także po innych obiektach – po *powierzchniach* w $\mathbb{R}^n$. Pozostając na razie na intuicyjnym poziomie (dokładniejsze definicje podamy później), będziemy mieli do czynienia z całkowaniem po *krzywych* (zbiorach jednowymiarowych) w $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, oraz powierzchniach dwuwymiarowych w $\mathbb{R}^3$. Zanim jednak przejdziemy do całkowania, przypomnimy, rozszerzymy znane oraz podamy nowe pojęcia dotyczące krzywych i powierzchni: wektorów stycznych i normalnych oraz prostych i płaszczyzn stycznych i normalnych.

1.1 Krzywe płaskie – podstawy opisu

Def. *Krzywą płaską* nazywamy odwzorowanie $\gamma : \mathbb{R} \ni [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^1 .

Uwaga. Czasem tę postać krzywej nazywamy *krzywą sparametryzowaną*. (Inne postaci, które – być może – Czytelnik pamięta: $y = f(x)$ – postać nieuwikłana, nazywana też czasem *wykresową*; $F(x, y) = 0$ – postać *uwikłana*).

Często trzeba krzywą γ zapisać w składowych:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$$

Przykł. Okrąg; elipsa; liść Kartezjusza; cykloida.

Def. *Wektorem stycznym* $\vec{v}$ do krzywej $\gamma(t)$ nazywamy *pochodną* odwzorowania γ :

$$\vec{v} = \dot{\gamma}(t) \equiv \frac{d\gamma(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

RYS. *Interpretacja fizyczna:* Jeśli $s(t)$ jest trajektorią punktu materialnego w $\mathbb{R}^3$, to pochodna $s(t)$ jest *prędkością* punktu.

Z wzoru (1) widać, że długość wektora stycznego wynosi

$$|| \vec{v} || = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Łatwo znaleźć też kąty, jakie tworzy styczny wektor z osiami układu współrzędnych: Oznaczając przez α kąt tworzony przez $\vec{v}$ z osią x , zaś przez β – z osią y , mamy

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

Tu pominiemy szereg interesujących wielkości geometrycznych takich jak płaszczyzna normalna, krzywizna i skręcenie krzywej, trójkąt Freneta.

1.2 Długość krzywej

Niech będzie dana na płaszczyźnie krzywa γ pomiędzy punktami A i B , zadana parametrycznie równaniami

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{gdzie} \quad a \leq t \leq b \quad (2)$$

(mamy więc $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$). **RYS.**

Podzielmy przedział $[a, b]$ punktami: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ na n dowolnych części. Oznaczmy przez δ_n średnicę podziału, tzn. największą z różnic $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$). Będziemy rozpatrywać takie podziały, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. Niech punktom podziału odcinka $[a, b]$ odpowiadają na krzywej punkty $A \equiv A_0 = \gamma(a), A_1 = \gamma(t_1), \dots, A_n = \gamma(b) \equiv B$. Łamaną $AA_1 \dots A_{n-1}B$ nazywamy *łamaną wpisaną w krzywą*, a punkty $A, A_1, \dots, A_{n-1}, B$ – jej *wierzchołkami*. Oznaczmy przez d_n długość łamanej, tzn. sumę długości odcinków tworzących tę łamaną

$$d_n = \sum_{i=1}^n |A_{i-1}A_i| \quad (3)$$

Def. Jeśli istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ oraz jeśli granica ta nie zależy od podziału, to krzywą AB nazywamy *krzywą prostowalną*, a granicę $d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ nazywamy *długością* krzywej γ .

Analogicznie definiujemy długość krzywej przestrzennej, zadanej równaniami

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \text{gdzie} \quad a \leq t \leq b \quad (4)$$

Uwaga. Nie każda krzywa jest prostowalna; ale z takimi raczej się w fizyce nie spotkamy.

Def. Krzywą sparametryzowaną (2) czy (4) nazywamy *łukiem zwykłym* (lub *łukiem Jordana*), jeśli nie ma punktów wielokrotnych, tzn. jeśli różnym wartościom parametru t odpowiadają różne punkty na krzywej. **RYS.**

Def. Łuk zwykły nazywamy *regularnym*, jeśli funkcje $x(t), y(t), z(t)$ występujące w (2) bądź (4) mają ciągłe pochodne i spełniają $x'^2 + y'^2 > 0$ ($d = 2$), bądź $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$ ($d = 3$)

Def. Krzywą sparametryzowaną (2) czy (4) nazywamy *krzywą regularną*, jeśli daje się podzielić na skończoną ilość części będących łukami regularnymi.

Uwaga. Może się zdarzyć, że krzywa nieregularna nie ma w jakichś punktach stycznej; ma jednak styczną lewo- i prawostronną.

Wykażemy teraz, że

Tw. Jeżeli krzywa 2) jest łukiem regularnym, to jest prostowalna i jej długość d wyraża się wzorem

$$d = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \quad (5)$$

Dow. (Zasadniczo polega na zsumowaniu długości kawałeczków łamanej, korzystając z tw. Pitagorasa **RYS.** i następnie uzasadnieniu że przy przechodzeniu do coraz drobniejszych podziałów, długość dąży do (5).

Długość łamanej jest równa

$$d_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

gdzie $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$. Z twierdzenia o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej (sem. I) mamy

$$x_i - x_{i-1} = x'(\theta_i) \Delta t_i, \quad y_i - y_{i-1} = y'(\tilde{\theta}_i) \Delta t_i$$

gdzie θ_i oraz $\tilde{\theta}_i$ należą do przedziału $t_{i-1}, t_i]$, tak więc

$$d_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\theta_i)]^2 + [y'(\tilde{\theta}_i)]^2} \Delta t_i.$$

Zastąpmy w powyższej sumie $\tilde{\theta}_i$ przez θ_i . Otrzymamy naówczas sumę przybliżoną dla całki (5):

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\theta_i)]^2 + [y'(\theta_i)]^2} \Delta t_i;$$

gdy $n \rightarrow \infty$, to $\delta_n \rightarrow 0$ oraz $\sigma_n \rightarrow d$. Do tej samej granicy dąży też ciąg $\{d_n\}$, gdyż sumy d_n i σ_n różnią się dowolnie mało, gdy średnica δ_n jest dostatecznie mała; jest tak, gdyż pochodna $y'(t)$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $[a, b]$. Wobec tego, długość łamanej d_n dąży do całki (5).

CBDO

Gdy krzywa (2) jest krzywą regularną, to powyższe twierdzenie i wzór (5) pozostają prawdziwe, gdyż daną krzywą można podzielić na skończoną ilość łuków regularnych.

Wniosek. Krzywa $y = f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$ oraz funkcja f jest klasy C^1 na $[a, b]$, jest prostowalna i jej długość wynosi

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \quad (6)$$

Dow. Wynika to natychmiast z powyższego twierdzenia, bowiem krzywą $y = f(x)$ można przedstawić równaniami parametrycznymi $x = t$, $y = f(t)$, gdzie $t \in [a, b]$.

CBDO

Tw. Jeżeli krzywa w trzech wymiarach: (4) jest regularna, to jej długość wyraża się wzorem

$$d = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \quad (7)$$

Dow. jest analogiczny jak w przypadku krzywych płaskich.

CBDO

Przykł. Długość cykloidy; dł. łuku elipsy.

1.3 Całki krzywoliniowe nieskierowane

Niech krzywa γ , zadana równaniem (2), będzie *łukiem regularnym*; tak więc – jak to zobaczyliśmy przed chwilą – ma określoną długość d . Na krzywej γ niech będzie określona funkcja $f(x, y)$. Podzielmy przedział $[a, b]$ punktami $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ na n części. O tym podziale zakładamy (jak zwykle), że jego średnica δ_n dąży do 0, gdy $n \rightarrow \infty$. Oznaczmy przez $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ długości łuków częściowych, tzn.

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

a przez $f(A_i)$ – wartość funkcji $f(x, y)$ w dowolnym punkcie $A_i = (x_i, y_i)$ łuku Δs_i . Utwórzmy teraz sumę:

$$\kappa_n = \sum_{i=1}^n f(A_i) \Delta s_i. \quad (9)$$

Def. Jeżeli istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n$, przy czym granica ta nie zależy od wyboru punktów podziału t_i oraz punktów A_i na łukach Δs_i , to granicę tę oznaczamy jako

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds \quad (10)$$

i nazywamy *całką krzywoliniową nieskierowaną* funkcji $f(x, y)$ po krzywej γ .

Wykażemy, że:

Tw. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła na krzywej γ , to całka (10) istnieje i jest równa zwykłej całce z funkcji jednej zmiennej

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (11)$$

Dow. W sumie (9) niech punkt A_i ma współrzędne $x(\theta_i), y(\theta_i)$, gdzie $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Oznaczając $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ możemy, wykorzystując tw. o wartości średniej, wyrazić całkę (8) wzorem

$$\Delta s_i = \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2} \Delta t_i, \quad u_i \in [t_{i-1}, t_i],$$

więc

$$\kappa_n = \sum_{i=1}^n f(x(\theta_i), y(\theta_i)) \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2} \Delta t_i.$$

Gdy n jest dostatecznie duże, to suma ta różni się dowolnie mało od sum wypunktowanych dla całki (11); tak więc sumy (9) dążą do całki (11).

CBDO

Przykł.

1. Długość łuku krzywej dana jest przez całkę (11), gdy $f(x, y) \equiv 1$.
2. Masa łuku o ciągłym rozkładzie gęstości
3. Potencjał pochodzący od rozkładu ładunku na krzywej

1.4 Całki krzywoliniowe skierowane

1.4.1 Definicja

Rozważmy krzywą γ daną przez (2); niech na tej krzywej będą określone dwie funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$. Jak uprzednio, podzielmy przedział $[a, b]$ punktami: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ na n dowolnych części. Oznaczmy przez δ_n średnicę podziału, tzn. największą z różnic $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$). Będziemy rozpatrywać takie podziały, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. W każdym z przedziałów $[t_{i-1}, t_i]$ wybierzmy dowolny punkt θ_i . Utwórzmy sumę:

$$s_n = \sum_{i=1}^n [P(x(\theta_i), y(\theta_i))(x(t_i) - x(t_{i-1})) + Q(x(\theta_i), y(\theta_i))(y(t_i) - y(t_{i-1}))] \quad (12)$$

RYS. Niech teraz $n \rightarrow \infty$. (Mamy wtedy $\delta_n \rightarrow 0$).

Def. Jeśli dla $n \rightarrow \infty$ sumy w (12) dążą do granicy niezależnej od wyboru punktów t_i oraz θ_i , to granicę tę oznaczamy przez

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy \equiv \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (13)$$

i nazywamy *całką krzywoliniową*¹ z jednoformy $P dx + Q dy$ po krzywej γ .

¹W jęz. niemieckim nazywa się ona *Kurvenintegral*

Analogicznie, jeśli mamy krzywą γ w trzech wymiarach, daną przez (4), oraz trzy funkcje: $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ określone na krzywej γ , to definiujemy całkę krzywoliniową

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz \equiv \int_{\gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (14)$$

Takie całki z jednoform pojawiają się w sposób naturalny w różnych problemach z fizyki (i matematyki).

1.4.2 Zamiana całki krzywoliniowej na całkę zwykłą

Całkę krzywoliniową skierowaną można zamienić na całkę zwykłą w następujący sposób.

Tw. Niech $P(x, y)$ będzie funkcją ciągłą na krzywej γ danej równaniem

$$y = y(x), \quad \text{dla } a \leq x \leq b.$$

Wówczas pierwsza z całek (13) istnieje i jest równa całce zwykłej

$$\int_{\gamma} P(x, y)dx = \int_a^b P(x, y(x))dx. \quad (15)$$

Dow. W takiej sytuacji suma (12) definiująca całkę (13) sprowadza się do sumy

$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, y(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$, gdzie $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ oraz $x_{i-1} \leq \xi_i < x_i$, tak więc suma (12) jest sumą przybliżoną dla całki po prawej stronie równości (15); całka ta zaś istnieje, bo funkcja podcałkowa jest ciągła.

CBDO

Tw. Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są ciągłe na łuku regularnym γ , to całka (13) istnieje i jest równa całce oznaczonej

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt. \quad (16)$$

Dow. Sumę przybliżoną (12) można zapisać w postaci

$$s_n = \sum_{i=1}^n [P(x(\theta_i), y(\theta(i)))x'(u_i) + Q(x(\theta_i), y(\theta(i)))y'(v_i)]\Delta t_i,$$

gdzie $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, zaś u_i, v_i są punktami przedziału $[t_{i-1}, t_i]$, – do różnic $x(t_i) - x(t_{i-1})$, $y(t_i) - y(t_{i-1})$ można zastosować tw. o wartości średniej. Całka po prawej stronie równości (16) istnieje (bo funkcja podcałkowa jest ciągła) i jest granicą ciągu sum wypunktowanych $\{\sigma_n\}$, gdzie

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n [P(x(\theta_i), y(\theta(i)))x'(\theta_i) + Q(x(\theta_i), y(\theta(i)))y'(\theta_i)]\Delta t_i,$$

Dalej: Różnice $|x'(\theta_i) - x'(u_i)|$ oraz $|y'(\theta_i) - y'(v_i)|$ są dowolnie małe przy dostatecznie dużym n , co wynika z *jednostajnej* ciągłości pochodnych $x'(t)$, $y'(t)$. A stąd wynika, że umy s_n i σ_n różnią się dowolnie mało przy dostatecznie dużych n ,

1.4.3 Kanoniczny przykład skierowanej całki krzywoliniowej: Praca w polu sił.

Założmy, że mamy w przestrzeni pole wektorowe sił: $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Założmy, że przesuwamy w polu sił po krzywej γ punkt materialny. Przesuwamy od p. A do p. B, co odpowiada zmianie parametru t od $t_A \equiv a$ do $t_B \equiv b$. Natomiast praca wykonana jest równa: $W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$, co można też zapisać jako: $W = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{v} \frac{1}{\|\vec{v}\|} dl$, gdzie $\vec{v}$ jest wektorem stycznym do γ . W tej ostatniej postaci wyrażenie podcałkowe to: $\frac{1}{\|\vec{v}\|} (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z)$. Weźmy jakiś wyraz z tej sumy, np. $F_x v_x$; mamy: $F_x dx = F_x \frac{dx}{dt} dt = F_x \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} dt = F_x \cos(x, v) dl$, (co można symbolicznie zapisać jako $dx = \cos(x, v) dl$). Tak więc $F_x v_x dl = F_x dx$, i razem: $W = \int_a^b F_x dx + F_y dy + F_z dz$, czyli praca jest dokładnie całką postaci (14).

Może się pojawić pytanie: Skoro całkę (14) można zapisać w postaci (11), to może te całki są *tym samym*? Otóż, jako pojęcia – *nie są* tym samym: Okazuje się, że całka nieskierowana (11) *nie zależy* od kierunku, w jakim przebiegamy krzywą γ , natomiast całka skierowana (14) *zmienia znak*, gdy zmieni się kierunek przebiegu krzywej.

Przykł.

Morał. Całki nieskierowane zachowują się jak długość krzywej – nie zależy ona od tego, czy liczy się ją od początku do końca, czy od końca do początku. Z pracą jest inaczej: Gdy wnosimy ciężar na górę, to wykonujemy pracę *dodatnią*, a gdy znosimy go na dół – to pracę *ujemną*.

1.5 Twierdzenie Greena na płaszczyźnie

1.5.1 Krzywe zamknięte. Obszary jedno- i wielospójne. Orientacja brzegu

Def. Krzywą sparametryzowaną (2) lub (4) nazywamy *zamkniętą*, jeśli jej początek pokrywa się z końcem. Jeśli ponadto punkty krzywej znajdują się we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z punktami odcinka parametryzującego krzywą, to mówimy, że taka krzywa nazywa się *krzywą Jordana*.

Tw. Krzywa Jordana na płaszczyźnie dzieli płaszczyznę na dwa obszary:

jeden jest ograniczony (nazywa się go *wnętrzem* krzywej), a drugi – nieograniczony – jest *zewnątrzem* krzywej.

(bez dowodu. Twierdzenie wydaje się oczywiste, ale dowód nie jest trywialny!)

Def. Obszar płaski ograniczony jedną krzywą Jordana nazywamy *jedno-spójnym*, obszar zaś ograniczony n nie przecinającymi się krzywymi Jordana nazywamy n -spójnym. **RYS.**

Okaże się pożyteczne pewne uogólnienie powyższego pojęcia: Za obszary jedno/ wielospójne będziemy też uważać takie, dla których pewne krzywe brzegowe redukują się do łuków zwykłych lub punktów.

Def. Niech D będzie obszarem płaskim ograniczonym jedną lub kilkoma krzywymi Jordana. Mówimy, że brzeg D (ozn. ∂D) jest *zorientowany dodatnio* (względem obszaru D), jeśli w czasie obiegu po krzywej ∂D w danym kierunku (jednym z dwu możliwych) mamy obszar D po *lewej* stronie. **RYS.**

1.6 Twierdzenie Greena

Rozważmy całkę (13) po krzywej *zamkniętej*. Okazuje się, że można ją zamienić na mocy następującego *twierdzenia Greena*:

Tw. (Greena). Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są ciągle wraz z pochodnymi P_y oraz Q_x wewnątrz i na brzegu obszaru normalnego D , przy czym brzeg ∂D obszaru D jest zorientowany dodatnio, to zachodzi równość:

$$\int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (17)$$

Dow. Jeśli pokażemy, że

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\gamma} P(x, y)dx, \quad \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\gamma} Q(x, y)dy, \quad (18)$$

to twierdzenie będzie udowodnione, bo dodając powyższe równości stronami, dostaniemy (17).

Obszar D , jako normalny względem osi x , da się zdefiniować przez nierówności:

$$D : \quad a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

gdzie funkcja $y = y_1(x)$ definiuje pewien łuk AMB , funkcja $y = y_2(x)$ definiuje pewien łuk ANB oraz $\partial D = AMB \cup BNA$ (**RYS.**; pisząc kolejność literek w definicji łuku, zdefiniowaliśmy tym samym orientację ∂D). Zamieniając całkę podwójną na iterowaną i uwzględniając (15), otrzymamy

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx = \int_{ANB} P(x, y) dx - \int_{AMB} P(x, y) dx \\
&= - \int_{AMB} P(x, y) dx - \int_{BNA} P(x, y) dx = - \int_{\gamma} P(x, y) dx.
\end{aligned}$$

Dla drugiej całki dowód jest analogiczny: Obszar D można określić nierównościami:

$$c \leq y \leq d, \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y),$$

gdzie funkcja $x = x_1(y)$ definiuje łuk MAN , zaś $x = x_2(y)$ – łuk MBN RYS.; tak więc

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \\
&= \int_c^d [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)] dy = \int_{MBN} Q(x, y) dy - \int_{MAN} Q(x, y) dy \\
&= \int_{MBN} Q(x, y) dy + \int_{NAM} Q(x, y) dy = \int_{\gamma} Q(x, y) dy.
\end{aligned}$$

CBDO

Obszary wielospójne

1.7 Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania

Weźmy dwa punkty A i B na płaszczyźnie. Rozpatrzmy całkę krzywoliniową skierowaną

$$I_{AB} = \int_{\gamma} P dx + Q dy \equiv \int_A^B P dx + Q dy \quad (19)$$

po krzywej γ . (W wyrażeniu końcowym jawniej zaznaczyliśmy, że droga całkowania jest skierowana od A do B ; symbol $\int$ jest niestandardowy i został przyjęty na użytek niniejszego podrozdziału). Całka ta na ogół zależy od krzywej γ , po której się całkuje. Czasem jednak okazuje się, że I_{AB} skierowana *nie zależy* od drogi całkowania. (Jako przykład: Być może Czytelnik miał do czynienia w fizyce z sytuacją pracy w polu tzw. *sił potencjalnych*): Jeśli pole sił jest potencjalne, to praca nie zależy od drogi, a jedynie od punktu początkowego i końcowego). Poniższe twierdzenie mówi, kiedy całka krzywoliniowa nie zależy od drogi całkowania.

Tw. Niech funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ będą ciągle wraz z pochodnymi P_y oraz Q_x w obszarze jednospójnym D . Rozważmy całkę (19) po krzywej γ zawartej w D . Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby całka (19)

nie zależała od drogi całkowania γ jest, aby w całym obszarze D spełniony był warunek

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (20)$$

Dow. • Warunek (20) jest *konieczny*: Załóżmy, że całka (19) nie zależy od drogi. Niech punkt A będzie ustalony, a zmieniamy punkt $B \equiv (x_B, y_B)$. Wówczas całka (19) będzie pewną funkcją współrzędnych x_B, y_B punktu B ; oznaczmy tę funkcję jako $F(x_B, y_B)$:

$$F(x_B, y_B) = \int_A^B Pdx + Qdy = \int_A^{(x_B, y_B)} Pdx + Qdy \quad (21)$$

Niech $C = (x_B + h, y_B)$ będzie punktem obszaru D . **RYS.** Wówczas

$$F(x_B + h, y_B) = \int_A^B Pdx + Qdy + \int_B^{(x_B+h, y_B)} Pdx + Qdy = F(x_B, y_B) + \int_B^{(x_B+h, y_B)} Pdx + Qdy \quad (22)$$

Gdy h jest dostatecznie małe, odcinek BC należy do obszaru D ; można więc całkować po nim. BC jest *poziomy*, tzn. na nim współrzędna y jest stała, więc ostatnia całka redukuje się do zwykłej całki $\int_{x_B}^{x_B+h} Pdx$, a ona, w myśl tw. o wartości średniej dla całek gdzieś z początku drugiego semestru redukuje się do $P(x_B + \theta h, y_B) \cdot h$ dla pewnego $0 < \theta < 1$; stąd mamy

$$\frac{F(x_B + h, y_B) - F(x_B, y_B)}{h} = P(x_B + \theta h, y_B), \quad \text{gdzie} \quad 0 < \theta < 1.$$

Wynika stąd, że $F_x = P$, gdy $h \rightarrow 0$. Argumentując analogicznie otrzymujemy bliźniaczą równość $F_y = Q$. Zatem funkcja F określona przez (21) ma w obszarze D obie pochodne cząstkowe, wyrażone wzorami

$$F_x = P(x, y), \quad F_y = Q(x, y). \quad (23)$$

Różniczkując te równości, otrzymamy $F_{yx} = P_y$, $F_{xy} = Q_x$; a że drugie pochodne mieszane są równe, to wynika stąd równość (20).

• • Teraz w drugą stronę: Niech funkcje P oraz Q spełniają warunek (20). Połączmy punkty A i B dwiema krzywymi $K_1 = AMB$ oraz $K_2 = ANB$ (**rys.**). Rozpatrzmy całkę po krzywej zamkniętej $AMBNA$. Z tw. Greena, całka po krzywej jest równa całce powierzchniowej, a ta jest *równa zero*. To znaczy, że $\int_{K_1} = \int_{K_2}$.

Może się zdarzyć sytuacja, gdy krzywa K_2 przecina się z krzywą K_1 (**rys.**). Wtedy tw. Greena stosujemy do kilku obszarów, ograniczanych przez przecięcia odpowiednich segmentów krzywych, i otrzymujemy ten wniosek co wyżej.

Uwaga. Konieczność założenia o jednospójności obszaru D

1.8 Sytuacja w 3 wymiarach

W tym: • Analogony warunków na niezależność całki krzywoliniowej w 3d od drogi całkowania; Aby dla 1-formy $\omega^1 = Pdx + Qdy + Rdz$ całka była niezależna od drogi, muszą być spełnione warunki

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (24)$$

Bo: (implikacja: Całka jest niezależna od drogi $\implies$ spełnione są warunki (24): Pokazujemy analogicznie jak poprzednio istnienie funkcji $F(x, y, z)$ spełniającej warunki: $F_x = P$; $F_y = Q$; $F_z = R$. Warunek równości drugich pochodnych mieszanych (mamy ich tutaj trzy) implikuje warunki (24); np. $F_{xy} = F_{yx} = F_{yx} = Q_x$ itd.

Implikacja w drugą stronę pojawi się niedługo – jako jedna z konsekwencji tw. Stokesa (analogon 3d tw. Greena).

• Co to jest rotacja pola wekt.; • oraz że warunek na pochodne składowych oznacza *bezrotacyjność* pola; na razie nie ma nic o interpretacji rotacji – będzie to przy całkach powierzchniowych

1.9 Całka z różniczki zupełnej – potencjał

Niech funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ spełniają w obszarze jednospójnym D założenia jak poprzednio (tzn. będą w D ciągłe wraz z pochodnymi P_y oraz Q_x).

Def. Mówimy, że określone na D wyrażenie:

$$\omega^1 = Pdx + Qdy \quad (25)$$

(zwane *jedno-formą*) jest *różniczką zupełną*, jeśli w obszarze D istnieje funkcja $F(x, y)$ taka, że $dF = Pdx + Qdy$ (tzn. $F_x = P$, $F_y = Q$). Funkcję taką nazywamy naówczas *funkcją pierwotną* dla 1-formy ω^1 (25).

Zachodzi

Tw. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by 1-forma (25) była różniczką zupełną w obszarze D , jest, aby w całym obszarze D zachodziła równość

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (26)$$

Dow. Powyższy warunek jest konieczny, gdyż jeśli zachodzi równość: $dF = Pdx + Qdy$, to znaczy to, że $F_x = P$, $F_y = Q$, skąd $Q_x = F_{xy} = F_{yx} = P_y$. I na odwrót: Jeśli spełniony jest warunek (26), to funkcja F określona przez całkę (21) ma pochodne cząstkowe wyrażone wzorami (23), co jest innym zapisem tego, że $dF = Pdx + Qdy$.

CBDO

Uwaga. Jeżeli $F(x, y)$ jest funkcją pierwotną dla 1-formy $Pdx + Qdy$, to funkcją pierwotną jest też funkcja różniąca się o stałą: $F(x, y) + C$. Jest też na odwrót: Dwie funkcje pierwotne F i $\tilde{F}$ dla 1-formy $Pdx + Qdy$ różnią się co najwyżej o stałą, tak więc $\tilde{F} = F + C$.

Przykł. Weźmy $P = 3x^2 + y^2$, $Q = 2xy - y$; spełniają one warunek (26). Poszukajmy dla 1-formy $Pdx + Qdy$ funkcji pierwotnej.

Odp: $F = x^3 + xy^2 - \frac{1}{2}y^2 + C$.

Jak jest w trzech wymiarach? Pokazujemy analogicznie jak powyżej, że: Aby 1-forma $Pdx + Qdy + Rdz$ była różniczką zupełną, muszą być spełnione równości (24).

Uwaga terminologiczna. Kilka stron wcześniej pokazywaliśmy, że całka z 1-formy $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ to to samo, co całka $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$; można więc 1-formę $F_x dx + F_y dy + F_z dz \equiv \omega_{\vec{F}}$ utożsamiać z wektorem $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Jeśli są spełnione warunki, będące przepisaniem warunków (24) dla powyższej postaci 1-formy: $F_{x,y} = F_{y,x}$; $F_{x,z} = F_{z,x}$; $F_{y,z} = F_{z,y}$ oznaczające, że pole $\vec{F}$ ma *znikającą rotację*, to 1-forma ma funkcję pierwotną; oznaczmy ją jako Φ i nazwijmy *potencjałem*. Zespół pochodnych cząstkowych funkcji Φ , czyli (Φ_x, Φ_y, Φ_z) , czyli *gradient* funkcji Φ , to właśnie wektor $\vec{F}$. Mamy więc: *Aby pole wektorowe było potencjalne, jego rotacja musi być równa zero*. Czy Czytelnicy pamiętają ten warunek z elektrostatyki?

2 Całki powierzchniowe

2.1 Opis powierzchni: wykresowy, parametryczny, uwikłany

Czytelnik zapewne ma jakąś intuicję na temat co to jest powierzchnia – zbiór dwuwymiarowy. Powierzchnie można zadawać na różne sposoby; najpopularniejsze z nich to:

1. Sposób najprostszy – zadawanie powierzchni jako *wykresu*:

Def. Niech D będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ oraz niech f będzie funkcją określoną na D . Zbiór punktów $S \in \mathbb{R}^3 : S = \{x, y, f(x, y)\}$, gdzie

$(x, y) \in D$, nazywamy powierzchnią (zanurzoną w $\mathbb{R}^3$), zadaną jako wykres funkcji f . O funkcji f zakładamy, że jest klasy C^1 (tzn. istnieją pochodne cząstkowe f i są one ciągłe).

2. *Postać uwikłana.* Zdarza się często, że powierzchnia jest przedstawiona równaniem postaci

$$F(x, y, z) = 0. \quad (27)$$

Weźmy jakiś punkt $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, spełniający równanie (27). Załóżmy, że choć jedna z pochodnych cząstkowych $F_x(p_0)$, $F_y(p_0)$, $F_z(p_0)$ jest różna od zera; taki punkt p_0 nazywamy *nieosobliwym*. Niech zachodzi np. $F_z(p_0) \neq 0$. Wówczas z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że w pewnym otoczeniu p_0 równanie (27) określa z jako jednoznaczную funkcję $z = f(x, y)$, ciągłą i różniczkowalną względem obu argumentów.

Można zadać pytanie: Co się dzieje, gdy *wszystkie* pochodne cząstkowe F znikają w jakimś punkcie? Dziać mogą się różne rzeczy: Może tam być punkt samoprzecięcia, może być niegładkość, może tam wreszcie wszystko być dobrze.

3. *Postać parametryczna.* Określenie położenia punktu $p = (x, y, z)$ na powierzchni wymaga dwóch parametrów; nazwijmy je u, v . Przypuśćmy, że dane są równania

$$p \equiv p(u, v) = \begin{cases} x &= \phi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v) \end{cases} \quad (28)$$

założmy ponadto, że macierz pochodnych cząstkowych

$$Dp = \begin{bmatrix} \phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{bmatrix} \quad (29)$$

jest nieosobliwa, tzn. w jakimś punkcie (u_0, v_0) przynajmniej jeden z podwyznaczników tej macierzy jest różny od zera. Niech zachodzi np.

$$\begin{vmatrix} \phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Napiszmy teraz dwa pierwsze równania spośród (28) jako

$$\phi(u, v) - x = 0; \quad \psi(u, v) - y = 0$$

Z tw. o funkcji uwikłanej wynika teraz, że w otoczeniu punktu (u_0, v_0) można wyznaczyć u, v jako jednoznaczne funkcje x, y :

$$u = g(x, y); \quad v = h(x, y).$$

Podstawiając tak wyznaczone u i v do trzeciego z równań (28) otrzymujemy zwykłe (wykresowe) przedstawienie powierzchni:

$$z = \chi(g(x, y), h(x, y)) \equiv f(x, y);$$

funkcja f jest przy tym ciągła i różniczkowalna.

Morał: W otoczeniu punktu nieosobliwego, wszystkie trzy przedstawienia: 'wykresowe', 'uwikłane' i 'parametryczne' są równoważne.

Przykł.

1. *Sfera.* Najczęściej mamy do czynienia z równaniem uwikłanym: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, gdzie R – promień sfery. Pochodna F jest: $[2x, 2y, 2z]$ i nigdzie na sferze nie mogą być równe zero jednocześnie *wszystkie trzy* pochodne cząstkowe. Tak więc sfera jest powierzchnią.

Łatwo przejść do postaci wykresowej: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; każdy z tych opisów jest dobry dla górnej lub dolnej połówki sfery. A co z równikiem? Na równiku $F_z = 0$; pokazuje to, że coś złego dzieje się na równiku – w otoczeniu żadnego punktu z równika z nie może być wyrażone jako funkcja x, y . Ale łatwo temu zaradzić, wyrażając np. x jako funkcję y oraz z ; wtedy prawie cały równik będzie podpadał pod jedną lub drugą gałąź funkcji $x = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Jeszcze przedstawienie parametryczne:

$$x = R \sin \theta \cos \phi; \quad y = R \sin \theta \sin \phi; \quad z = R \cos \theta.$$

2. *Stożek.* Zadany jest on przez równanie: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$. F jest: $[2x, 2y, -2z]$; wszystkie trzy pochodne są równe zero w punkcie $(0, 0, 0)$; sprawia to, że stożek *nie jest* powierzchnią, natomiast stanie się nią, gdy wyrzucimy zeń punkt $(0, 0, 0)$.

Łatwo przejść do 'wykresowej' postaci stożka: $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Dwie hiperboloidy: jednopowłokowa i dwupowłokowa. Jak są usytuowane względem stożka, który można uważać za ich przypadek graniczny.

4. *Helikoida*. Jest to powierzchnia zadana parametrycznie: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = a\phi$, gdzie $r \geq 0$, $\phi \geq 0$ oraz $a > 0$. Macierz Jacobiego jest:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

2.2 Powierzchnie – wektory styczne, płaszczyzna styczna

Przypomnijmy sobie, jak był definiowany wektor styczny $\mathbf{v}$ do krzywej γ w $\mathbb{R}^3$:

$$\gamma : \mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \rightarrow \gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \gamma'(t) = \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \gamma'_3(t) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Założmy teraz, że mamy powierzchnię zadaną parametrycznie przez (28). Rozpatrzmy dwa wektory $\mathbf{t}_u$, $\mathbf{t}_v$, będącymi dwiema składowymi (kolumnowymi) macierzy Jacobiego odwzorowania p , tzn. są one zdefiniowane jako:

$$\mathbf{t}_u = \begin{bmatrix} \phi_u \\ \psi_u \\ \chi_u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_v = \begin{bmatrix} \phi_v \\ \psi_v \\ \chi_v \end{bmatrix} \quad (31)$$

Rozpinają one *płaszczyznę styczną* do powierzchni. Wektor $\mathbf{N}$ prostopadły do płaszczyzny stycznej jest proporcjonalny do *iloczynu wektorowego* $\mathbf{t}_u$, $\mathbf{t}_v$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$$

(przyda się to nam za chwilę).

2.3 Całki powierzchniowe nieskierowane tzn. całki skalarne

2.3.1 Pole powierzchni

2.3.2 Całka pow. nieskierowana

Niech $F(x, y, z)$ będzie funkcją określoną na *płacie powierzchniowym regularnym* S , zadany jako wykres:

$$z = f(x, y), \quad \text{gdzie } (x, y) \in D. \quad (32)$$

Podzielmy obszar D na n prostokątów, zadając tym samym podział $\pi_n = \{\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n\}$. Przez δ_n oznaczmy średnicę podziału π_n , tzn. dł.

najdłuższego boku spośród wszystkich prostokątów. Oznaczmy przez $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ części płata S odpowiadające podziałowi (tzn. będące wykresami f nad obszarami ΔD_i); pole powierzchni ΔS_i oznaczmy $|\Delta S_i|$. Przez A_i oznaczmy dowolny punkt płata ΔS_i (tzn. $A_i = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$, gdzie $(x_i, y_i) \in D_i$). Utwórzmy sumę

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n F(A_i) |\Delta S_i| \quad (33)$$

Weźmy teraz jakiś ciąg podziałów $\{\pi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. O tym ciągu zakładamy, że średnica n -tego podziału dąży 0, gdy $n \rightarrow \infty$.

Def. Jeżeli istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma$ i granica ta nie zależy od wyboru ciągu podziałów ani od wyboru wypunktowania, to granicę tę oznaczamy przez

$$\int \int_S F(x, y, z) d^2 S \quad (34)$$

i nazywamy *całką powierzchniową nieskierowaną* funkcji F po płacie S .

Podobnie jak dla całek krzywoliniowych nieskierowanych dowodzi się następującego faktu i wzorów:

Tw. Jeżeli funkcja F jest ciągła na płacie S , to całka (35) istnieje i wyraża się wzorem:

$$\int \int_S F(x, y, z) d^2 S = \int \int_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (35)$$

w przypadku, gdy S jest zadana jako wykres $z = f(x, y)$.

Szkic uzupełnienia dowodu. Większość rzeczy w dowodzie 'idzie' jak w przypadku jednowymiarowym; uzasadnienia jednakże wymaga wyrażenie na 'pole powierzchni' $d^2 S$. Niech $\vec{v}_x, \vec{v}_y$ będą wektorami stycznymi do powierzchni S **RYS**. Wektory te są proporcjonalne do: $\vec{v}_x \approx [1, 0, f_x] \Delta x$, $\vec{v}_y \approx [0, 1, f_y] \Delta y$. Pole powierzchni $\Delta^2 S$ równoległoboku, rozpiętego na wektorach $\vec{v}_x, \vec{v}_y$ jest równe:

$$\Delta^2 S = \|\vec{v}_x \times \vec{v}_y\| = \|[f_x, f_y, 1]\| \Delta x \Delta y = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \Delta x \Delta y$$

CBDO

Tw. Gdy mamy powierzchnię sparametryzowaną jako (28), to całka z funkcji F po płacie S ma postać

$$\int \int_S F(x, y, z) d^2 S = \int \int_D F(\phi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} du dv \quad (36)$$

gdzie

$$D_x = \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}, \quad D_y = - \begin{vmatrix} \phi_u & \phi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} \phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}.$$

Uzasadnienie. Musimy obliczyć 'element pola powierzchni'. Mając wektory styczne jak w (31), liczymy ich iloczyn wektorowy i otrzymujemy:

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}$$

skąd otrzymujemy (36).

Przykł.

1. *Pole powierzchni.* Do wyliczenia pola powierzchni kładziemy $F(x, y, z) \equiv 1$ w całce (35). Policzmy np. pole powierzchni $\mathcal{A}$ wykresu paraboloidy $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ nad kołem $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Mamy:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_S \mathrm{d}^2 S = \int_D \int \sqrt{1 + x^2 + y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \mathrm{d}r \sqrt{1 + r^2} r \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

2. *Pole powierzchni sfery.* Parametryzacja sfery przez kąty θ, ϕ : $x = R \sin \theta \cos \phi$, $y = R \sin \theta \sin \phi$, $z = R \cos \theta$. Stąd, bezpośrednio wyliczając: $D_x = R^2 \cos \theta \sin \theta$, $D_y = R^2 \sin^2 \theta \sin \phi$, $D_z = R^2 \sin \theta \cos \theta$, i dalej: $\mathrm{d}^2 S = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = \dots$ po skróceniach... $= R^2 \sin \theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$. Pole pow. sfery $\mathcal{A}$ jest więc

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta R^2 \sin \theta = 4\pi R^2$$

jak i należało oczekiwać.

3. Masa powłoki o zadanym rozkładzie gęstości
4. Potencjał pochodzący od rozkładu ładunku na dwuwymiarowej powierzchni
5. Współrzędne środka masy powierzchni dwuwymiarowej

Przykł. Znaleźć współrzędną z środka masy półsfery o $z \geq 0$, promieniu $\mathbb{R}$ i o jednorodnej gęstości masy ρ .

Rozw. Mamy:

$$Z_{MC} = \frac{\int \int_S \rho z d^2 S}{\int \int_S \rho d^2 S}$$

Dolna całka to $2\pi R^2$ (see above – obliczenie pola powierzchni sfery).
Górna całka to:

$$\begin{aligned} I_g &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} R \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) \\ &= 2\pi R^3 \int_0^1 ds s = \pi R^3. \end{aligned}$$

2.4 Orientacja

2.4.1 Powierzchnie dwu- i jednostronne tzn. orientowalne i nie

2.4.2 Orientacja bazy przestrzeni wektorowej

Weźmy dwie bazy $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ oraz $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n\}$ w przestrzeni wektorowej V . Są to bazy, zatem jedną można otrzymać z drugiej przez nieosobliwe przekształcenie liniowe S : $\mathbf{E} = T \mathbf{f}$.

Def. Jeżeli $\det T > 0$, to mówimy, że orientacja baz $\mathbf{f}$ i $\mathbf{E}$ jest *zgodna*.
Jeśli $\det T < 0$, to mówimy, że orientacja baz $\mathbf{f}$ i $\mathbf{E}$ jest *przeciwna*.

Umawiamy się, że orientacje baz w $\mathbb{R}^3$ porównujemy z bazą standardową $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Przykł. Inwersja bazy standardowej w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nie zmienia orientacji. Inwersja bazy standardowej w $\mathbb{R}^3$ zmienia orientację.

2.4.3 Orientacja powierzchni

Niech S będzie powierzchnią orientowalną zadaną wykresowo: $z = f(x, y)$, niech $p = (x, y, f(x, y))$ – punktem tej powierzchni. Niech $\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y$ będą dwoma wektorami stycznymi do S w punkcie p . Wybierzmy trzeci wektor $\mathbf{n}$, prostopadły do S w punkcie p . Razem trzy wektory $\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y, \mathbf{n}$ tworzą bazę. Orientację tej bazy nazywamy orientacją powierzchni w punkcie p (może więc ona być zgodna z orientacją standardową lub przeciwna do niej).

2.5 Całki powierzchniowe skierowane tzn. całki z 2-form

Niech S będzie powierzchnią orientowalną, rzutowalną we wszystkich trzech kierunkach x, y, z . (Mówimy, że S jest *rzutowalna* w kierunku z , jeśli daje się

przedstawić jako wykres: $z = f(x, y)$. W pozostałych kierunkach analogicznie.)

Niech na S wraz z pewnym otoczeniem będą zadane trzy funkcje $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Rozważmy formalne wyrażenie:

$$\tilde{\omega} = Rdx \wedge dy + Qdz \wedge dx + Pdy \wedge dz \quad (37)$$

2.6 Tw. Gaussa-Ostrogradskiego

Niech będzie dany w $\mathbb{R}^3$ obszar normalny V , ograniczony jedną powierzchnią regularną S . Zachodzi:

Tw. Gaussa – Ostrogradskiego Jeżeli funkcje P , Q , R są ciągłe wraz z pochodnymi P_x , Q_y , R_z wewnątrz obszaru V i na jego brzegu S , przy czym brzeg jest powierzchnią regularną o orientacji zewnętrznej, to zachodzi równość

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz &= \int \int_S (Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) \\ &= \int \int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d^2 S \end{aligned} \quad (38)$$

(tu α jest kątem między wektorem normalnym $\mathbf{n}$ do powierzchni S a osią x , β – między $\mathbf{n}$ a osią y , γ – między $\mathbf{n}$ a osią z).

Dow. Obszar V , jako normalny względem płaszczyzny xy , daje się określić nierównościami

$$f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y), \quad \text{gdzie } (x, y) \in D$$

(tu D jest rzutem V na płaszczyznę xy).

Stosując wzór na zamianę całki potrójnej na iterowaną i fakt, że całkujemy pochodną, dostajemy

$$\int \int \int_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int \int_D R(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \int \int_D R(x, y, f_1(x, y)) dx dy$$

Oznaczmy przez S_1 powierzchnię $z = f_1(x, y)$ (dolną) zorientowaną w dół, a przez S_2 – powierzchnię $z = f_2(x, y)$ (górną) zorientowaną ku górze. Wówczas, wykorzystując wzory o tym, jak się wyraża całka powierzchniowa skierowana przez całkę podwójną, oraz fakt, że przy zmianie orientacji powierzchni całka zmienia znak, mamy

$$\int \int_D R(x, y, f_1(x, y)) dx dy = \int \int_{-S_1} R(x, y, z) dx \wedge dy = - \int \int_{S_1} R(x, y, z) dx \wedge dy$$

i analogicznie

$$\int \int_D R(x, y, f_2(x, y)) \mathbf{d}x \mathbf{d}y = + \int \int_{S_2} R(x, y, z) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

tak więc

$$\int \int \int_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = \int \int_{S_1} R(x, y, z) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + \int \int_{S_2} R(x, y, z) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

i ostatecznie

$$\int \int \int_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = \int \int_S R \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y = \int \int_S R \cos \gamma \mathbf{d}^2 S.$$

W analogiczny sposób (rzutując S na pozostałe płaszczyzny: xz oraz yz) otrzymamy

$$\int \int \int_V \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{d}x \mathbf{d}y \mathbf{d}z = \int \int_S P \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = \int \int_S P \cos \alpha \mathbf{d}^2 S,$$

$$\int \int \int_V \frac{\partial Q}{\partial y} \mathbf{d}x \mathbf{d}y \mathbf{d}z = \int \int_S Q \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x = \int \int_S Q \cos \beta \mathbf{d}^2 S,$$

Po zsumowaniu powyższych trzech wzorów otrzymujemy (38).

CBDO

2.6.1 Interpretacja dywergencji

...

Przykł. Całka po brzegu górnej półkuli, tzn. $K_+(0, R) \equiv K(0, R); z \geq 0$ zorientowanej zewnętrznio.

$$\int \int_S z \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x = \int \int \int_{K_+(0, R)} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$$

2.7 Tw. Stokesa

Niech w $\mathbb{R}^3$ będzie zadana orientowalna powierzchnia S z brzegiem ∂S . Niech powierzchnia S będzie rzutowalna na płaszczyznę xy (to założenie jest chwilowe – zaraz zostanie usunięte). Niech S będzie zorientowana tak, by dodatni obieg na krzywej ∂S dookoła prostej normalnej do powierzchni S był taki sam, jak obieg na płaszczyźnie xy dookoła osi z . **RYS.**

Niech w otoczeniu powierzchni S będą określone funkcje P, Q, R , ciągle wraz z pochodnymi.

Zachodzi

Tw. (Stokesa).

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int_S (R_y - Q_z)dy \wedge dz + (P_z - R_x)dz \wedge dx + (Q_x - P_y)dx \wedge dy. \quad (39)$$

Dow. Załóżmy, że S dana jest jako wykres funkcji $f: z = f(x, y)$, gdzie $(x, y) \in D$. Niech ∂D będzie brzegiem obszaru D . Wówczas

$$\int_{\partial S} P(x, y, z)dx = \int_{\partial D} P(x, y, f(x, y))dx.$$

Całkę po prawej stronie przekształćmy, wykorzystując tw. Greena:

$$\int_{\partial D} P(x, y, f(x, y))dx = - \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = - \int_S \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy - \int_S \frac{\partial P}{\partial z} f_y dx \wedge dy,$$

a tę ostatnią całkę zamieniamy na całkę powierzchniową nieskierowaną:

$$I \equiv \int_S \frac{\partial P}{\partial z} f_y dx \wedge dy = \int_S \frac{\partial P}{\partial z} f_y \cos \gamma d^2 S,$$

gdzie γ jest kątem pomiędzy wektorem normalnym do powierzchni S a osią z . Mamy jednak zależność między kątami γ i β :

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \cos \beta = -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \implies \cos \beta = -f_y \cos \gamma,$$

tak więc

$$I = - \int_S \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta d^2 S = - \int_S \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx$$

i ostatecznie

$$\int_{\partial S} Pdx = \int_S \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy.$$

Analogicznie można przekształcić całki $\int_{\partial S} Qdy$ oraz $\int_{\partial S} Rdz$. Przez dodanie stronami tych wyrażeń otrzymamy wzór (39).

CBDO

2.7.1 Interpretacja rotacji

Całkę po lewej stronie równości (39) można zapisać w postaci: $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{t} ds$, gdzie $\vec{t}$ oznacza jednostkowy wektor styczny do krzywej ∂S , zaś $\vec{F} = (P, Q, R)$. (Był taki wzór na przekształcenie całki krzywoliniowej skierowanej na nieskierowaną).

Rotacją pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ nazywamy pole wektorowe o składowych: $\text{rot } \vec{F} = (F_{y,z} - F_{z,y}, F_{z,x} - F_{x,z}, F_{x,y} - F_{y,x})$. Wyrażenie podcałkowe po prawej stronie równości (39) można, używając symbolu rotacji, zapisać jako

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = (R_y - Q_z) \cos \alpha + (P_z - R_x) \cos \beta + (Q_x - P_y) \cos \gamma.$$

(tu $\vec{n}$ jest wektorem normalnym do powierzchni S). Ostatecznie równość (39) można zapisać jako

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{t} ds = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d^2 S.$$

Całkę po lewej stronie powyższej równości nazywamy *krążeniem* pola wektorowego $\vec{F}$ po krzywej ∂S . Po prawej stronie zaś mamy strumień pola wektorowego $\text{rot } \vec{F}$ przez powierzchnię S .

2.7.2 Wielka Unifikacja

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \quad (40)$$

(zwane **tw. Stokesa** – ogólna wersja). Jest to '3 w 1' (zawierające – jako szczególne przypadki – tw. Greena, G-0, Stokesa).

Te 3 tw. (tw. Greena, G-0, Stokesa) są bardzo intuicyjne fizycznie, ale kiepsko poddają się uogólnieniom (np. na wyższe wymiary). Ogólne tw. Stokesa (40), z kolei, jest słuszne dla dowolnego wymiaru; ale jest mniej intuicyjne i wymaga wprowadzenia szeregu pojęć.

1. *Co to jest k-forma różniczkowa*: Coś, co się wsadza do całki k -wymiarowej i co zależy od orientacji.
2. *Formy na $\mathbb{R}^3$* .

- (a) 0-formy to funkcje: $\omega^0 = f$, gdzie f jest funkcją trzech zmiennych x, y, z .

- (b) 1-formy są postaci: $\omega^1 = Pdx + Qdy + Rdz$, gdzie P, Q, R – funkcje trzech zmiennych x, y, z .
- (c) 2-formy są postaci: $\omega^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, gdzie znowu P, Q, R – funkcje trzech zmiennych x, y, z .
- (d) 3-formy mają postać: $\omega^3 = Fdx \wedge dy \wedge dz$, gdzie F jest funkcją trzech zmiennych x, y, z .

Formy stopnia większego niż 1 mają własności:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \quad (41)$$

co w szczególności pociąga za sobą $dx^i \wedge dx^i = 0$.

Formom można nadać bardziej wyraziste znaczenie geometryczne, ale nie będziemy tego tu robić i poprzestaniemy na ich znaczeniu jako symboli mających własności (41).

3. *Formy na $\mathbb{R}^n$* . Ogólna postać k -formy na $\mathbb{R}^n$ jest:

$$\omega^k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (42)$$

gdzie $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ jest funkcją n zmiennych: $x^1, x^2, \dots, x^n$ klasy C^2 .

4. *Iloczyn zewnętrzny*. Używając znaku ' $\wedge$ ' ('iloczyn zewnętrzny') można tworzyć nie tylko iloczyny $dx^i \wedge dx^j$, ale też ogólniejsze *iloczyny zewnętrzne* form: Np. jeśli $\omega^1 = Pdx + Qdy + Rdz$, $\eta^1 = adx + bdy + cdz$, to $\omega^1 \wedge \eta^1 = (Pb - Qa)dx \wedge dy + (Ra - Pc)dz \wedge dx + (Qc - Rb)dy \wedge dz$; wykorzystaliśmy tu rozdzielność mnożenia (zewnątrznego) względem dodawania i własności antysymetrii iloczynów zewnętrznych.
5. *Przyporządkowanie wektorowi z $\mathbb{R}^3$ 1-formy i 2-formy*. Większość rachunków na wektorach można wyrazić w języku form. Najsamprzód jednak zdefiniujmy przyporządkowanie wektorom form. Otóż w zależności od zapotrzebowania, wektorowi $\vec{F} = (P, Q, R)$ przyporządkowuje się w następujący sposób jedno- albo dwuformę:

$$\vec{F} = (P, Q, R) \leftrightarrow \omega_{\vec{F}}^1 = Pdx + Qdy + Rdz; \quad (43)$$

$$\vec{F} = (P, Q, R) \leftrightarrow \omega_{\vec{F}}^2 = Pd \wedge ydz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy; \quad (44)$$

6. Wyrażenie il. skalarnego i wektorowego przez powyższe formy. Niech będą zadane dwa wektory: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ oraz $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Bezpośrednim rachunkiem można przekonać się, że:

$$\omega_{\vec{a}}^1 \wedge \omega_{\vec{b}}^1 = \omega_{\vec{a} \times \vec{b}}^2 \quad (45)$$

(z tego wzoru od razu, dzięki antysymetrii przy mnożeniu 1-form, wynika antysymetria iloczynu wektorowego) oraz

$$\omega_{\vec{a}}^1 \wedge \omega_{\vec{b}}^2 = (\vec{a} \cdot \vec{b}) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (46)$$

7. Przypomnienie + uogólnienie: Całkowanie k -formy tzn. sprowadzenie jej do całki k -wymiarowej.

Całkę z k -formy (42) po k -wymiarowej powierzchni S określa się następująco:

Niech powierzchnia S będzie sparametryzowana przez $y = (y^1, y^2, \dots, y^k) \in D \subset \mathbb{R}^k$. Całka z całej k -formy (42) będzie sumą całek z jednomianów k -formowych. Rozpatrzmy całkę z jakiegoś jednego jednomianu k -formowego. Definiujemy całkę z k -formy jako całkę k -wymiarową:

$$\int_S a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$$

$$\text{Or } \int_D a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x^1(y^1, \dots, y^k), x^2(y^1, \dots, y^k), \dots, x^n(y^1, \dots, y^k)) \frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})}{\partial(y^1, y^2, \dots, y^k)}$$

8. *Różniczka zewnętrzna* d . Dla form mamy określoną jeszcze jedną operację, a mianowicie operację *różniczki zewnętrznej* d , przeprowadzającej k -formę w $k+1$ -formę. Działa ona następująco:

- (a) Na 0-formach czyli funkcjach $f \equiv f(x^1, \dots, x^n)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n; \quad (47)$$

- (b) Na k -formach: Weźmy jakąś k -formę proporcjonalną do którejś bazowej tzn. jednomian formowy:

$$\overset{k}{\eta} = F dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge x^{i_k};$$

tu różniczka zewnętrzna działa tak:

$$d \overset{k}{\eta} = dF \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge x^{i_k};$$

gdzie dF oblicza się zgodnie z wzorem (47)

9. *Gradient, dywergencja i rotacja.* W ten sposób można zdefiniować operacje różniczkowe: gradient, dywergencję i rotację:

(a) Gradient funkcji f :

$$df = \omega_{\text{grad } f}^1;$$

(b) Rotacja: Dla pola wektorowego $\vec{F}$:

$$d\omega_{\vec{F}}^1 = \omega_{\text{rot } \vec{F}}^2;$$

(c) Dywergencja: Dla pola wektorowego $\vec{F}$:

$$d\omega_{\vec{F}}^2 = \text{div } \vec{F} dx \wedge dy \wedge dz$$

10. d ma własność: $d \circ d = 0$; sprawdzenie tego na 0-formach i 1-formach.

(a) 0-formy: $\omega^0 = f(x^1, x^2, x^3)$,

$$df = \sum_{i=1}^3 f_{,i} dx^i;$$

$$d(df) = \sum_{i=1}^3 d(f_{,i}) dx^i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 f_{,ij} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i < j} (f_{,ij} - f_{,ji}) dx^i \wedge dx^j = 0;$$

ostatnia równość wynika z faktu, że pochodne mieszane drugiego rzędu są równe.

W przełożeniu na język wektorów oznacza to, że *rotacja gradientu jest równa zeru*.

(b) 1-formy: $\omega^1 = \sum_{i=1}^3 a_i dx^i$, gdzie a_1, a_2, a_3 są funkcjami x^1, x^2, x^3 ; weźmy pojedynczy jednomian 1-formowy $a_i dx^i$ i obliczmy jego pochodną zewnętrzną:

$$d(a_i dx^i) = da_i \wedge dx^i = \sum_{j=1}^3 a_{i,j} dx^j \wedge dx^i$$

i licząc jeszcze raz różniczkę zewnętrzną otrzymanego wyrażenia,

$$\begin{aligned} d(d(a_i dx^i)) &= d\left(\sum_{j=1}^3 a_{i,j} dx^j \wedge dx^i\right) = \sum_{j=1}^3 da_{i,j} dx^j \wedge dx^i = \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{i,kj} dx^k \wedge dx^j\right) \wedge dx^i \\ &= \left(\sum_{k < j} (a_{i,kj} - a_{i,jk}) dx^k \wedge dx^j\right) \wedge dx^i = 0, \end{aligned}$$

znów ze względu na to, że drugie pochodne mieszane funkcji a_i są sobie równe.

W przełożeniu na język wektorowy oznacza to, że *dywergencja rotacji jest równa zero*.

W fizyce (przede wszystkim elektrodynamice, ale nie tylko) korzysta się z tego faktu, wprowadzając *potencjał wektorowy* dla pola magnetycznego: Wiadomo, że dywergencja pola magnetycznego jest równa zero (nieistnienie pojedynczych ładunków magnetycznych). Skoro tak, to pole magnetyczne $\vec{B}$ daje się zapisać jako rotacja pewnego pola wektorowego $\vec{A}$, zwanego *potencjałem wektorowym dla pola magnetycznego*:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Podobnie jak wprowadzenie potencjału elektrostatycznego upraszcza wiele rachunków dla pola elektrycznego, tak wprowadzenie potencjału wektorowego upraszcza rachunki dla pola magnetycznego.

Uwaga. Własność $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$ jest prawdziwa dla dowolnych form w dowolnym wymiarze, natomiast wyrażenie tej własności w języku wektorowym, tzn. $\text{rot}(\text{grad} f) \equiv 0$ oraz $\text{div}(\text{rot} \vec{F}) \equiv 0$ są prawdziwe tylko w $\mathbb{R}^3$.

11. *Powierzchnia z brzegiem; orientacja przestrzeni i orientacja brzegu.* Było omówione; agitacja, że przenosi się to na wyższe wymiary.
12. Twierdzenie Stokesa.

3 Zadania

3.1 Całki krzywoliniowe nieskierowane

1. Obliczyć długość jednego łuku cykloidy (tzn. krzywej danej parametrycznie przez: $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$). **Odp.** $8R$.
2. Obliczyć długość elipsy o półosiach a i b . **Odp.** wyraża się przez całkę eliptyczną.
3. Obliczyć długość łuku paraboli $y = ax^2$ pomiędzy punktami x_1 i x_2 .
4. Obliczyć długość krzywej łańcuchowej, tzn. odcinka linii $y = \cosh x$ pomiędzy $x = 0$ a $x = x^*$.
5. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{\gamma} \frac{ds}{x-y}$, gdzie γ jest odcinkiem łączącym punkty $A = (0, -2)$ i $B = (4, 0)$.
6. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{\gamma} xy ds$, gdzie γ jest prostokątem o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (6, 3)$ i $D = (0, 3)$.
7. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{\gamma} xy ds$, gdzie γ jest ćwiartką elipsy o półosiach a i b , leżącą w pierwszej ćwiartce. **Odp.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.
8. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{\gamma} \sqrt{2y} ds$, gdzie γ jest łukiem cykloidy (jeśli ktoś nie wie co to jest to p. zad. 1) dla $t \in [0, 2\pi]$. **Odp.** $4\pi\sqrt{R^3}$.
9. Niech krzywa γ będzie opisana parametrycznie we współrzędnych biegunowych: $r = r(t)$, $\phi = \phi(t)$ dla $t \in [a, b]$. Pokazać, że całka krzywoliniowa nieskierowana $I = \int_{\gamma} f(x, y) ds$ wyraża się wzorem:

$$I = \int_a^b f(r(t) \cos \phi(t), r(t) \sin \phi(t)) \sqrt{r(t)^2 \phi'(t)^2 + r'(t)^2} dt$$

gdzie primy oznaczają pochodne po t .

10. Pokazać, że w przypadku, gdy opis krzywej jako: $r = r(\phi)$, to całka krzywoliniowa nieskierowana $I = \int_{\gamma} f(x, y) ds$ wyraża się wzorem:

$$I = \int_a^b f(r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi) \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2} d\phi$$

gdzie prim oznaczają pochodną po ϕ : $r' = \frac{dr}{d\phi}$.

Rozw. Liczymy element długości, pamiętając, że mamy tu funkcję dwukrotnie złożoną: $x \equiv x(\phi) =$
VVV

11. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{\gamma} x\sqrt{x^2 - y^2} \mathbf{d}s$, gdzie γ jest połówką lemniskaty Bernoulliego: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ dla $x \geq 0$.
12. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{\gamma} \arctg \frac{y}{x} \mathbf{d}s$, gdzie γ jest kawałkiem spirali Archimedesesa $r = 2\phi$, położonym wewnątrz okręgu o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0)$. **Odp.** $\frac{2}{3}[(1 + \frac{R^2}{4})^{3/2} - 1]$.
13. Obliczyć długość łuku spirali Archimedesesa w sytuacji z poprzedniego zadania.
14. Obliczyć współrzędne środka ciężkości połówki okręgu o stałej liniowej gęstości masy ρ i promieniu R , znajdującego się w górnej półpłaszczyźnie.

Rozw. Parametryzujemy okrąg: $x = R \cos \phi, y = R \sin \phi$; $\mathbf{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2} \mathbf{d}\phi = R \mathbf{d}\phi$. Długość półokręgu – a więc i jego masa M – wtedy się banalizuje:

$$M = \int_{\cap} \rho \mathbf{d}s = \rho \int_0^{\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} \mathbf{d}\phi = \rho R \int_0^{\pi} \mathbf{d}\phi = \pi \rho R;$$

teraz: Ramię działania siły F_y w kierunku y :

$$F_y = \int_{\cap} y \rho \mathbf{d}s = \rho \int_0^{\pi} R \sin \phi \sqrt{x'^2 + y'^2} \mathbf{d}\phi = \rho R^2 \int_0^{\pi} \sin \phi \mathbf{d}\phi = 2\rho R^2;$$

tak więc

$$Y_{MC} = \frac{2\rho R^2}{\pi \rho R},$$

czyli

Odp. $Y_{MC} = \frac{2}{\pi} R$.

15. Obliczyć całkę krzywoliniową $I = \int_{\gamma} \frac{z^2 \mathbf{d}s}{x^2 + y^2}$, gdzie γ jest fragmentem linii śrubowej: $x = R \cos t, y = R \sin t, z = Rt$ dla $t \in [0, 2\pi]$.

Rozw. Mamy: $x' = -R \sin t, y' = R \cos t, z' = R$; więc: $\mathbf{d}s = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + R^2} \mathbf{d}t = \sqrt{2} R \mathbf{d}t$. Podstawiając do funkcji całkowanej wartości współrzędnych na krzywej γ , mamy:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 t^2}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} \sqrt{2} R \mathbf{d}t = \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} t^2 \mathbf{d}t,$$

więc

Odp. $\frac{1}{3} R \sqrt{2} (2\pi)^3$.

16. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{\gamma} xyz \mathbf{d}s$, gdzie γ jest ćwiartką okręgu danego równaniami: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ dla $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

3.2 Całki krzywoliniowe skierowane (tzn. z 1-form) & tw. Greena

17. Obliczyć całki krzywoliniowe $I_1 = \int_{\gamma} x \mathbf{d}y, I_2 = -\int_{\gamma} y \mathbf{d}x$ po elipsie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, skierowanej dodatnio względem jej obszaru wewnętrznego.

Rozw. Parametryzujemy γ : $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$, $dx = -a \sin t dt$, $dy = b \cos t dt$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$. Więc:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} a \cos t b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab;$$

I_2 liczymy analogicznie. Then:

Odp. $I_1 = I_2 = \pi ab$.

18. Obliczyć całkę krzywoliniową $I = \int_{\gamma} xy dx + x^2 dy$:

(a) po odcinku o początku $(a, 0)$ i końcu $(0, b)$;

(b) po łuku elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o początku $(a, 0)$ i końcu $(0, b)$.

Rozw.

a) Parametryzacja odcinka: $y = -\frac{b}{a}x + b$, $x \in [a, 0]$; $dy = -\frac{b}{a}dx$. Mamy:

$$I = \int_a^0 x(-\frac{b}{a}x + b)dx + x^2(-\frac{b}{a})dx = \int_0^a (2\frac{b}{a}x^2 - bx)dx = \frac{2}{3}\frac{b}{a}a^3 - \frac{1}{2}ba^2 = \frac{1}{6}a^2b.$$

b) Parametryzacja elipsy jak w poprzednim zadaniu; tu $t \in [a, b]$. Mamy:

$$I = \int_0^{\pi/2} a \cos t b \sin t (-a \sin t dt + a^2 \cos^2 t b \cos t dt) = +\frac{1}{3}a^2b.$$

Odp. (a) $I = \frac{1}{6}a^2b$, (b) $I = \frac{1}{3}a^2b$.

19. Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} (x^2 - y^2) dy$, gdzie γ jest fragmentem paraboli $y = x^2$ pomiędzy punktami $(0, 0)$ a $(3, 9)$.

20. Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} -x \cos y dx + y \sin x dy$, gdzie γ jest odcinkiem łączącym punkty $(0, 0)$ oraz $\pi, 2\pi$.

21. Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} yz dx + zx dy + xy dz$, gdzie γ jest jednym zwitkiem linii śrubowej $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ (tzn. t się zmienia od 0 do 2π).

22. Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, gdzie γ jest krzywą, będącą przecięciem sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ z cylindrem $x^2 + y^2 = Rx$ (tu $R > 0$, $z \geq 0$). (Jest to tzw. *krzywa Vivianiego*). Kierunek obiegu γ jest taki, że startując z punktu $(R, 0, 0)$ idzie się najspierw przez punkty o wszystkich współrzędnych dodatnich.

23. Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$, gdzie γ jest półokręgiem $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, przebieganym od $t = 0$ do $t = \pi$.

24. Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$, gdzie γ jest połówką elipsy: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, przebieganą od $t = 0$ do $t = \pi$.

25. Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} x dy$, gdzie γ jest brzegiem trójkąta utworzonego przez osie współrzędnych oraz prostą: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Krzywa γ jest obiegana w dodatnim (tzn. antyżegarowym) kierunku.
26. To samo ogólniej: Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} x dy$, gdzie γ jest brzegiem trójkąta utworzonego przez osie współrzędnych oraz prostą: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a, b > 0$. Krzywa γ jest obiegana w dodatnim (tzn. antyżegarowym) kierunku. Całkę tę niezależnie obliczyć z tw. Greena; zinterpretować wynik.
27. **a)** Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} x dx + y dy$, gdzie γ jest fragmentem wykresu funkcji $y = e^x$, łączącym punkty $A = (0, 1)$ i $B = (2, e^2)$. **b)** Obliczyć to samo wzdłuż odcinka łączącego A i B . Zinterpretować wynik wykorzystując tw. Greena.
28. **a)** Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} x dx + y dy$, gdzie γ jest ćwiartką okręgu $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, przebieganą od $t = 0$ do $t = \frac{\pi}{2}$. **b)** Obliczyć to samo wzdłuż odcinka łączącego $(0, R)$ i $(R, 0)$. Zinterpretować wynik wykorzystując tw. Greena.
29. Obliczyć pole powierzchni figury ograniczonej osią $y = 0$ oraz jednym łukiem cycloidy. Wsk. Użyć tw. Greena.

3.3 Szukanie funkcji pierwotnych dla 1-form

30. Sprawdzić, że całki po krzywych zamkniętych γ są równe zeru niezależnie od postaci funkcji, które występują w całkowanych 1-formach. (Oczywiście jeśli są spełnione założenia nt. różniczkowalności tychże funkcji). Znaleźć funkcje pierwotne dla całkowanych poniżej 1-form.
- (a) $\int_{\gamma} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$.
- (b) $\int_{\gamma} f(xy)(y dx + x dy)$.
- (c) $\int_{\gamma} f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{xdy - ydx}{x^2}$.
- (d) $\int_{\gamma} [f(x+y) + f(x-y)] dx + [f(x+y) - f(x-y)] dy$.
- (e) $\int_{\gamma} f(x^2 + y^2 + z^2)(x dx + y dy + z dz)$.
31. Sprawdzić, że całkowane poniżej formy są różniczkami, i obliczyć całki z tych jednoform po (dowolnych) krzywych łączących punkt początkowy A z punktem końcowym B .
- (a) $\int_A^B y dx + x dy$, $A = (-1, 2)$, $B = (2, 3)$.

- (b) $\int_A^B 3x^2 y dx + x^3 dy$, $A = (0, 0)$, $B = (2, 3)$.
- (c) $\int_A^B \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$, $A = (3, 4)$, $B = (5, 12)$; zakładamy, że kontur całkowania *nie przechodzi* przez punkt $(0, 0)$ oraz, że się nie nawija wokół tego punktu.
- (d) $\int_A^B \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $A = (4, 3)$, $B = (12, 5)$; zakładamy, że kontur całkowania *nie przechodzi* przez punkt $(0, 0)$ oraz, że się nie nawija wokół tego punktu.
- (e) $\int_A^B yz dx + zx dy + xy dz$; $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$.
- (f) $\int_A^B \frac{zx dy + xy dz - yz dx}{(x - yz)^2}$, $A = (7, 2, 3)$, $B = (5, 3, 1)$; zakładamy, że kontur całkowania *nie przechodzi* przez powierzchnię $z = \frac{x}{y}$.

32. W poniższych zadaniach znaleźć funkcję pierwotną dla podanych 1-form, sprawdziwszy uprzednio, że taka funkcja istnieje.

- (a) $\omega = x^2 dx + y^2 dy$.
- (b) $\omega = (x^2 - y^2)(x dx - y dy)$.
- (c) $\omega = \frac{(x+2y)dx + y dy}{(x+y)^2}$.
- (d) $\omega = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$.
- (e) $\omega = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right) dy$

33. Znaleźć liczbę n taką, aby poniższa 1-forma ω była różniczką. Znaleźć dla tego przypadku funkcję pierwotną dla 1-formy.

$$\omega = \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{(x^2 + y^2)^n}.$$

34. W poniższych zadaniach znaleźć funkcję pierwotną dla podanych 1-form, sprawdziwszy uprzednio, że taka funkcja istnieje.

- (a) $\omega = \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}$.
- (b) $\omega = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- (c) $\omega = \frac{yz dx + xz dy + xy dz}{1 + x^2 y^2 z^2}$.
- (d) $\omega = \frac{zx dy + xy dz - yz dx}{(x - yz)^2}$.
- (e) $\omega = \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x + z^3}{z^2} dz$.

3.4 Całki powierzchniowe nieskierowane

1. Znaleźć pole powierzchni wyciętej:
 - (a) walcem $x^2 + y^2 = R^2$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = xy$;
 - (b) walcem $\frac{x^2}{a^2} + y^2 b^2 = c^2$ z paraboloidy eliptycznej $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$;
 - (c) 'walcem' $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = \frac{1}{a}xy$;
 - (d) walcem $x^2 + y^2 = \rho^2$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (zakładamy, że $R > \rho$).
2. Znaleźć pole powierzchni części sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ wyciętej przez walec $x^2 + y^2 = Rx$ (tzw. powierzchnia Vivianiego).
3. Znaleźć pole powierzchni walca $x^2 + y^2 = Rx$ zawartej wewnątrz kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (tzn. powierzchni bocznej bryły Vivianiego).
4. Znaleźć pole powierzchni utworzonej przez obrót krzywej $y = f(x)$ wokół osi x . Zakładamy, że $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$.
5. Niech powierzchnia będzie zadana we współrzędnych sferycznych jako:

$$r = r(\theta, \phi).$$

Znaleźć wyrażenie na pole tej powierzchni.

6. Wykorzystując otrzymany wyżej wzór, obliczyć pole powierzchni: $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 xy$.
7. Rozważmy powierzchnię kuli: $x^2 + y^2 + z^2 = Rz$. Znaleźć pole części tej sfery zawartej wewnątrz stożka $z^2 = Ax^2 + By^2$; zakładamy, że $z \geq 0$.

3.5 Całki powierzchniowe skierowane tzn. z 2-form

8. Obliczyć całkę: $\int_S (x^2 + y^2) dx \wedge dy$, gdzie S jest kołem $x^2 + y^2 = R^2$, zorientowanym przez wektor normalny skierowany w dół.
9. Obliczyć całkę: $\Sigma = \int_S z dx \wedge dy$, gdzie S jest górną połówką sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, zorientowaną przez wektor $\vec{n} = (-1, -1, -1)$ zaczepiony w punkcie $\frac{R}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. **Odp.** $\Sigma = -2\pi R^3/3$.

10. Obliczyć całkę: $\int\limits_S x^2 y^2 z \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$, gdzie S jest dolną połówką sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, zorientowaną przez wektor $\vec{n} = (0, 0, 1)$ zaczepiony w punkcie $(0, 0, -R)$. **Odp.** $-\frac{2\pi}{105}R^7$.

11. Obliczyć całki:

$$(a) \quad I_0 = \int\limits_S \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y,$$

$$(b) \quad I_1 = \int\limits_S z \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y,$$

$$(c) \quad I_2 = \int\limits_S z^2 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

gdzie S jest elipsoidą o półosiach a, b, c , zorientowaną na zewnątrz. **Odp.**

a) $I_0 = 0$, b) $I_1 = \frac{4}{3}\pi abc$, c) $I_2 = 0$.

12. Obliczyć całki

$$(a) \quad I_a = \int\limits_S x^3 \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z,$$

$$(b) \quad I_b = \int\limits_S yz \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x$$

po górnej połowie tejże elipsoidy, zorientowanej przez wektor normalny $\vec{n} = (0, 0, 1)$ zaczepiony w punkcie $(0, 0, c)$. **Odp.** a) $I_a = \frac{2}{5}\pi a^3 bc$, b) $I_b = \frac{1}{4}\pi abc^2$.

13. Znaleźć strumień pola wektorowego $\vec{a} = (0, yz, 0)$ przez powierzchnię S , ograniczającą obszar zadany nierównościami: $z \geq 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, $y \geq 0$. Orientacja S jest zadana przez wektor normalny skierowany na zewnątrz. Strumień policzyć: **a)** bezpośrednio, **b)** z tw. Gaussa – Ostrogradskiego. **Odp.** $\frac{\pi}{12}$.

14. Sprawdzić tw. Stokesa dla: $\omega = x^2 y^3 \mathbf{d}x + \mathbf{d}y + z \mathbf{d}z$. Konturem γ , po którym ta forma jest całkowana, jest okrąg $x^2 + y^2 = a^2$ zorientowany dodatnio.

15. Sprawdzić tw. Stokesa dla: $\omega = y \mathbf{d}x + z \mathbf{d}y + x \mathbf{d}z$, całkowanej po krzywej $\gamma = (x(t), y(t), z(t))$: $x(t) = a \sin^2 t$, $y(t) = \sqrt{2}a \sin t \cos t$, $z(t) = a \cos^2 t$, gdzie t zmienia się od 0 do π . **Odp.** $\int\limits_{Int \gamma} \mathbf{d} \omega = \int_{\gamma} \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} a^2 \pi$.

16. Sprawdzić tw. Stokesa dla: $\tilde{\omega} = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, całkowanej po brzegu sześcianu o długości boku 1, którego wierzchołki są w punktach: $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ itd.