

1 Agitacja

W. I. Arnold – wielkiej klasy matematyk – zauważył, że:

’Główne odkrycie Newtona, to, którego zdecydował się nie ujawniać i opublikował tylko w postaci anagramu, brzmi: *Data aequatione quodcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*. W tłumaczeniu [z łaciny i] na współczesny język matematyki oznacza to, że

Rozwiązywanie równań różniczkowych jest rzeczą pożyteczną.’

Tak się składa, że ogromna większość praw fizyki sformułowana jest jako równania różniczkowe. Pierwsze z brzegu przykłady to: Prawo Newtona $f = ma$, równania Maxwella, równanie Schrödingera. Aby wydobyć fizyczną treść z równania, trzeba je umieć rozwiązać lub zbadać jego własności. Niniejszy rozdział jest wstępem do tego.

2 Ogólnikowa definicja

Niech F będzie funkcją $n + 1$ zmiennych, zaś y niech będzie funkcją *jednej* zmiennej x . Równanie

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

(gdzie $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$) nazywamy *równaniem różniczkowym zwyczajnym*. Każdą funkcję $y(x)$, która po wstawieniu do tego równania spełnia je tożsamościowo, nazywamy *rozwiązaniem równania różniczkowego*.

Tak sformułowany problem jest bardzo ogólny i bardzo trudny – w tej chwili dalecy jesteśmy od jego pełnego rozwiązania. Będziemy zaczynać od szczególnych przypadków, o których da się więcej powiedzieć.

3 Garść przykładów

Zanim podamy formalne definicje, podamy najspierw garść przykładów, które Czytelnik najprawdopodobniej już zna, nie będąc może jedynie obznajomionym z terminologią.

1. (a) Znaleźć funkcję $x(t)$, spełniającą równanie:

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \tag{1}$$

gdzie $f(t)$ jest zadaną funkcją. Rozwiązanie problemu każdy umie znaleźć (a przynajmniej powinien):

$$x(t) = \int f(t)dt + C, \quad C - \text{dowolna stała.} \quad (2)$$

W języku najbardziej chyba typowego przykładu z fizyki: Rozpatrujemy ruch punktu materialnego po prostej. Niech $f(t)$ jest prędkością punktu w chwili t . Szukamy zależności drogi od czasu.

- (b) Możemy też mieć do czynienia z nieco innym postawieniem problemu: Znaleźć rozwiązanie zagadnienia (1) zakładając, że $x(t_0) = x_0$ – dane. (W języku fizyki, zakładamy, że w danej chwili czasu t_0 punkt materialny znajduje się w określonym położeniu $x_0 = x(t_0)$). Wtedy rozwiązanie (2) jest już *jednoznaczne* – stała C przybiera określoną wartość.

2. *Rozpad promieniotwórczy.* Szybkość rozpadu promieniotwórczego próbki jest proporcjonalna do jej masy. Można więc zapisać:

$$\frac{dm}{dt} = -km; \quad (3)$$

(gdzie k jest dodatnią stałą); chcemy znaleźć zależność masy próbki od czasu.

Rozważmy ogólniejszy problem: Znaleźć funkcję $x(t)$, spełniającą równanie:

$$\frac{dx}{dt} = g(x). \quad (4)$$

Tu wygodniej jest szukać nie $x(t)$, a funkcji odwrotnej $t(x)$. Pamiętając, że pochodna funkcji odwrotnej $\frac{dt}{dx}$ wyraża się przez pochodną $\frac{dx}{dt}$ wzorem: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$, mamy:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{g(x)}, \quad (5)$$

co daje

$$t(x) = \int \frac{1}{g(x)}dx + C, \quad C - \text{dowolna stała.} \quad (6)$$

(Powyższą procedurę można zapamiętać za pomocą sztuczki mnemotechnicznej, polegającej na potraktowaniu lewej strony równania (4) jako ułamka i przekształceniu go do postaci: $dt = \frac{dx}{g(x)}$ i obłożeniu obu stron znakiem całki, co daje (6). Ten sposób postępowania należy traktować WYŁĄCZNIE jako sztuczkę mnemotechniczną, bo pochodna *nie jest* ułamkiem, a całościowym wyrażeniem).

Rozwiązując w ten sposób równanie (3), mamy

$$t = - \int \frac{1}{km} dm = -\frac{1}{k} \ln m + C,$$

co przekształcamy do postaci

$$m(t) = e^C e^{-kt}$$

zatem masa próbki *wykładniczo* maleje w czasie.

Jest to *ogólne* rozwiązanie problemu. Gdy mamy do czynienia z konkretnym *warunkiem początkowym*, tzn. warunkiem, że masa próbki w danej chwili czasu (powiedzmy $t = 0$) jest równa m_0 , mamy

$$m(t) = m_0 e^{-kt}$$

3. Omawiane dotąd przykłady miały jedną cechę wspólną: Istniało *jednoznaczne* rozwiązanie równania z zadaniem warunkiem początkowym. Istnieją jednak sytuacje, w których jednoznaczność *nie ma* miejsca.

Rozważmy równanie:

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 0$.

Rozwiązanie ogólne równania jest proste do uzyskania:

$$t = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C,$$

skąd, uwzględniając warunek początkowy

$$x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ale też! Funkcja $x(t) = 0$ spełnia zarówno równanie (7) jak i warunek początkowy $x(0) = 0$. Rozwiązanie zatem *nie jest* jednoznaczne. Niedługo zobaczymy, przy jakich warunkach *istnienie* i *jednoznaczność* rozwiązania mają miejsce.

3.1 Algorytmy rozwiązywania niektórych równań pierwszego rzędu

(Prawie) najogólniejsza postać równania pierwszego rzędu to

$$y' = F(x, y) \quad (8)$$

gdzie F jest daną funkcją ciągłą. Szukamy funkcji $y(x)$, która spełnia równanie (8).

1. **Równanie o zmiennych rozdzielonych.** Nazywamy tak sytuację, gdy $F(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$, gdzie f, g – funkcje ciągłe. Wtedy równanie (8) przyjmuje postać

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Zapiszmy je w postaci:

$$g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x).$$

Niech F, G będą funkcjami pierwotnymi do f i g odpowiednio (tzn. $F'(x) = f(x)$, $G'(y) = g(y)$). Wtedy powyższe równanie można zapisać

$$(G(y(x)))' = F'(x)$$

co daje

$$G(y(x)) = F(x) + C;$$

rozwiązanie jest więc dane w postaci uwikłanej. Po odwróceniu G (jeśli się to da zrobić) mamy

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Przykł. Podajmy ogólne rozwiązanie równania

$$y' = \frac{e^{-x}}{y}; \quad \text{zakładamy, że } y > 0$$

Postępując jak powyżej, mamy

$$y \cdot y' = e^{-x} \quad \text{lub} \quad y \frac{dy}{dx} = e^{-x}, \quad \text{co daje}$$

$$\int y dy = \int e^{-x} dx,$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -e^{-x} + C, \quad \text{czyli} \quad y^2(x) = -2e^{-x} + C$$

i ostatecznie

$$y(x) = \sqrt{C - 2e^{-x}}.$$

Uwaga. Do klasy równań o zmiennych rozdzielonych należą dwa pierwsze przykłady z poprzedniej Subsection.

2. **Równanie jednorodne.** Nazywamy tak równanie (8), gdzie prawa strona jest funkcją zależącą tylko od $\frac{y}{x}$:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{9}$$

Rozwiązanie otrzymujemy podstawiając zamiast y nową zmienną u , zdefiniowaną jako

$$u = \frac{y}{x}$$

Mamy wtedy:

$$y(x) = u(x)x, \quad y'(x) = u'(x)x + u(x)$$

i wstawiając to do równania (9), otrzymujemy

$$xu' + u = F(u), \quad \text{co daje} \quad u' = \frac{F(u) - u}{x}$$

co jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Całkując je otrzymamy

$$\int \frac{du}{F(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (10)$$

Przykł. Rozwiążmy równanie:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$$

Podstawiając standardowo $y = ux$, otrzymamy:

$$u + xu' = u^2 - 2, \quad \text{tzn.} \quad u' = \frac{u^2 - u - 2}{x}$$

i całkując, otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c = \int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{u - 2} - \frac{1}{u + 1} \right) du = \ln \left(\sqrt[3]{\frac{u - 2}{u + 1}} \right),$$

i wracając do zmiennej y , dostajemy rozwiązanie w postaci

$$Cx^3 = \frac{y - 2x}{y + x}.$$

bądź, gdybyśmy chcieli mieć rozwiązanie w postaci niewykłanej,

$$y = \frac{Cx^3 + 2}{1 - Cx}x.$$

3. Równanie liniowe. Nazywamy tak równanie

$$y' - p(x)y = b(x) \quad (11)$$

gdzie p, b – zadane funkcje. Gdy $b(x) \equiv 0$, to równanie powyższe nazywamy *jednorodnym*; w przeciwnym wypadku mówimy o równaniu *niejednorodnym*.

Uwaga. Sprawdza się natychmiastowo, że jeśli $y_1(t), y_2(t)$ – dwa rozwiązania równania *jednorodnego*, to ich suma też jest rozwiązaniem; ponadto, jeśli jakieś rozwiązanie pomnoży się przez stałą, to również

otrzymuje się rozwiązanie. To pokazuje, że rozwiązania równania jednorodnego są *przestrzenią wektorową*. Jej wymiar jest równy 1 – co za chwilę zobaczymy.

Ogólny przypadek równania (11) – równania niejednorodnego – rozwiązuje się w dwóch etapach. Pierwszy z nich to rozwiązanie ogólne równania jednorodnego. Drugi, to uzyskanie jakiegoś (tzw. szczególnego) rozwiązania równania niejednorodnego. Ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego będzie sumą powyższych dwu rozwiązań.

(a) Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ). Mamy

$$y' - p(x)y = 0,$$

co jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Mamy

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y = \int p(x)dx + c,$$

i oznaczając: $\int p(x)dx = P(x)$ oraz $e^c = C$, mamy

$$y_{OJ} = Ce^{P(x)},$$

gdzie C – dowolna stała, a OJ – 'Ogólne Jednorodne'.

(b) Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN). Znajdowanie tego rozwiązania odbywa się za pomocą tzw. *metody uzmienniania stałej*. Polega ona na tym, iż *zakładamy*, że rozwiązanie równania niejednorodnego jest postaci $y_{SN} = C(x)e^{P(x)}$. Zakładając tę postać, wstawiamy ją do równania (11) i mamy

$$C'(x)e^{P(x)} + C(x)P'(x)e^{P(x)} - p(x)C(x)e^{P(x)} = b(x),$$

a że $P'(x) = p(x)$, to drugi i trzeci wyraz z lewej strony się kasują i dostajemy

$$C'(x)e^{P(x)} = b(x),$$

skąd

$$C(x) = \int b(x)e^{-P(x)}dx.$$

Można zapytać, dlaczego przy całkowaniu nie dopisaliśmy kolejnej dowolnej stałej? Otóż dlatego, że dopisanie tej stałej prowadziłoby do dodania do y_N wyrazu *proporcjonalnego do równania jednorodnego*, a więc nie prowadziłoby do rozwiązania ogólniejszego, niż już mamy.

Ostatecznie mamy wzór na rozwiązanie równania (11)

$$y(x) = y_{OJ} + y_{SN} = Ce^{P(x)} + \int b(x)e^{-P(x)}dx \quad (12)$$

gdzie C – dowolna stała.

Przykł. Znajdźmy ogólne rozwiązanie równania

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}. \quad (13)$$

- RORJ: Równanie jednorodne: $y' + \frac{1}{x}y = 0$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Mamy:

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \text{skąd} \quad \ln y = -\ln x + c \quad \text{co daje} \quad y_{OJ} = \frac{C}{x} \quad (\text{gdzie } C = e^c)$$

- • RSRN: Uznajemy stałą C tzn. przyjmujemy, że jest ona funkcją x . Mamy: $y_{SN} = \frac{C(x)}{x}$, co po wstawieniu do wyjściowego równania (13) daje, po kilku skróceniach: $C'(x) = e^x$, skąd $C(x) = e^x$; tak więc

$$y = \frac{C}{x} + \frac{e^x}{x}.$$

3.2 Równania 2. rzędu: Obniżenie rzędu równania – parę sztuczek

3.2.1

$$y'' = F(x)$$

Tu recepta jest prosta: Pamiętając, że $y'' = (y')'$, mamy po jednostronnym scałkowaniu:

$$y' = \tilde{F}(x) + C_1,$$

gdzie: $\tilde{F}(x) = \int F(x)dx$, zaś C_1 jest dowolną stałą.

Całkujemy jeszcze raz i dostajemy już rozwiązanie:

$$y = \tilde{\tilde{F}}(x) + C_1x + C_2,$$

gdzie: $\tilde{\tilde{F}}(x) = \int \tilde{F}(x)dx$, zaś C_2 jest drugą dowolną stałą.

Przykł. Ruch ze stałym przyspieszeniem a , np. spadek swobodny ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym. Chcemy znaleźć zależność położenia od czasu $x(t)$. $x(t)$ spełnia równanie Newtona:

$$F = ma = mx'', \quad \text{skąd} \quad x'' = a.$$

Po jednokrotnym scałkowaniu:

$$x' = at + v_0$$

(stałą całkowania nazwaliśmy v_0), a po drugim

$$x \equiv x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

(stałą całkowania nazwaliśmy x_0). Te dwie stałe całkowania mają sens fizyczny *prędkości* oraz *położenia początkowego*: $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$.

3.2.2

$$y'' = F(y')$$

Podstawiamy $z = y'$ i mamy:

$$z' = F(z),$$

co jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Gdy znajdziemy jego rozwiązanie sposobem znanym nam już, tzn. mamy funkcję $z(x, C)$ (C – stała całkowania), to dalej

$$y(x) = \int z(x) dx + C_2.$$

3.2.3

$$y'' = F(y)$$

Przykł. Obniżenie rzędu dla równania Newtona z siłą gradientową: $f = ma$, tzn.

$$mx'' = f(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Po obustronnym pomnożeniu przez x' mamy:

$$\frac{1}{2}m((x')^2)' = -(U(x))', \quad \text{a po scałkowaniu} \quad \frac{1}{2}m(x')^2 = E - U(x)$$

gdzie E jest dowolną stałą. Jaki jest jej sens fizyczny? Po przeniesieniu $-U(x)$ na drugą stronę mamy

$$\frac{1}{2}m(x')^2 + U(x) = E$$

czyli stała C ma sens fizyczny *energii całkowitej*.

Otrzymaliśmy w ten sposób *równanie pierwszego rzędu*. Stąd po przekształceniu mamy:

$$x' = \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

co jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\int dt = t - t_0 = \int \sqrt{\frac{m}{2(E - U(x))}} dx.$$

- Oscylator harmoniczny

- • Wahadło bez przybliżenia małych drgań i ELIPTYSIE.

3.3 Równania wyższych rzędów

Okazuje się, że równanie n -tego rzędu

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{14}$$

można sprowadzić do układu równań pierwszego rzędu.

Wprowadźmy bowiem pomocnicze funkcje:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Wtedy równanie (14) można zapisać w postaci układu równań:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ F(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Przykł. Równanie ruchu oscylatora harmonicznego z tłumieniem zapisane jako układ 2 równań I rzędu.

Pole wektorowe.

Interpretacje graficzne układów równań w $\mathbb{R}^n$: $\dot{x} = f(x)$ ($f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), oraz $\dot{x} = F(x, t)$ ($F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$).

4 Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności – sformułowanie i ilustracja

4.1 Wstęp ideowy

Rozważamy tu układy równań różniczkowych pierwszego rzędu; zgodnie z otrzymanym dopiero co wynikiem, dowolne równanie n -tego stopnia możemy wyrazić jako układ n równań pierwszego rzędu.

Zadamy określony warunek początkowy i zapytamy, kiedy układ ma jednoznaczne rozwiązanie.

Odpowiedź dana jest przez twierdzenie (Cauchy’ego)¹ o istnieniu i jednoznaczności dla takich układów.

Zanim sformułujemy to twierdzenie, podamy najspierw wstęp ideowy, a potem przygarć niezbędnych definicji.

Niech $x \equiv x(t) \in \mathbb{R}^n$. Będziemy rozważać układ równań różniczkowych z warunkiem początkowym:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad - \text{ dane.} \quad (16)$$

¹Zwane też tw. Picarda lub Picarda–Cauchy’ego

Def. *Odwzorowaniem Picarda* nazywamy odwzorowanie A , przeprowadzające funkcję $\varphi : \mathbb{R} \ni t \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$ w funkcję $A\varphi : \mathbb{R} \ni t \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, gdzie

$$(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\varphi(\tau), \tau) d\tau. \quad (17)$$

Okazuje się, że φ jest rozwiązaniem układu z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = x_0$

$$\Longleftrightarrow$$

φ jest punktem stałym odwzorowania A , tzn.

$$\varphi = A\varphi \quad (18)$$

Dow. jest natychmiastowy, jeśli się nie przejmujemy 'drobiazgami', tzn. porządnym określeniem używanych obiektów oraz ich istnieniem. (*Na razie* się tym nie przejmujemy, ale zrobimy to później):

Jeśli zrózniczkujemy $(A\varphi)(t)$, to dostaniemy $F(\varphi(t), t)$ (z podstawowego tw. rachunku różniczkowego i całkowego); mamy więc: $\frac{d(A\varphi)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi(t), t)$. Ponadto $(A\varphi)(t_0) = x_0$, więc spełniony jest też warunek początkowy.

Koniec dowodu – ale tylko formalnego!

Uwaga. W ten sposób, zamieniliśmy równanie *różniczkowe* (16): Tu szukana funkcja występuje jako *pochodna* na równanie *całkowe* (18) (tu szukana funkcja występuje pod znakiem całki).

Jak znaleźć punkt stały odwzorowania A ?

Okazuje się, że – przy pewnych założeniach, o których dalej – można to zrobić *iteracyjnie*: Wybierzmy jakąś funkcję ϕ_0 . Działajmy na nią kolejnymi iteracjami operatora A , otrzymując w ten sposób ciąg:

$$\phi_1 = A\phi_0; \quad \phi_2 = A\phi_1 = A^2\phi_0; \quad \phi_3 = A\phi_2 = A^3\phi_0; \quad \dots \text{itd.}$$

Okazuje się, że *graniczna funkcja*

$$\phi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$$

jest punktem stałym odwzorowania A , tzn. mamy:

$$A\phi_\infty = \phi_\infty.$$

Dowód będzie za jakiś czas, a na razie przykład: Skonstruujemy rozwiązanie układu (16) przez kolejne iteracje odwzorowania A .

Przykł. Znajdźmy rozwiązanie równania różniczkowego z warunkiem początkowym:

$$\frac{dx}{dt} = x + t, \quad x(0) \equiv x_0 = 1 \quad (19)$$

metodą Picarda.

Tu nasza funkcja F , występująca we wzorze ogólnym (16), jest równa: $F(x, t) = x + t$.

Musimy wziąć jakąś funkcję jako 'punkt startowy' i następnie działać na nią kolejnymi potęgami odwzorowania Picarda. Weźmy dla prostoty jako punkt startowy *funkcję stałą* $x_0(t) = 1$:

$$x_0(t) = 1;$$

konkretna postać odwzorowania Picarda ma tu postać:

$$x_n(t) = Ax_{n-1}(t) = x_0 + \int_0^t F(x_{n-1}(\tau), \tau) d\tau = x_0 + \int_0^t (\tau + x_{n-1}(\tau)) d\tau.$$

Liczmy kolejno:

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2;$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1 + \tau + \frac{1}{2!}\tau^2) d\tau = 1 + t + \frac{2}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3;$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1 + \tau + \frac{2}{2!}\tau^2 + \frac{1}{3!}\tau^3) d\tau = 1 + t + \frac{2}{2!}t^2 + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4;$$

$$x_4(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1 + \tau + \frac{2}{2!}\tau^2 + \frac{2}{3!}\tau^3 + \frac{1}{4!}\tau^4) d\tau = 1 + t + \frac{2}{2!}t^2 + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{2}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5;$$

itd. Z postaci kilku pierwszych wyrazów ciągu funkcji $x(t)$ łatwo chyba już domyślić się postaci n -tego elementu:

$$x_n(t) = 1 + t + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{2}{4!}t^4 + \dots + \frac{2}{n!}t^n + \frac{1}{(n+1)!}t^{(n+1)}$$

w czym można rozpoznać rozwinięcie w szereg funkcji

$$x(t) = 2e^t - 1 - t.$$

Czytelnik zechce się przekonać, że powyższa funkcja jest rozwiązaniem problemu (19).

4.2 Punkty stałe, odwzorowania zwięzające etc.

Oswójmy się na razie z punktami stałymi. Mamy ogólne odwzorowanie $F : X \rightarrow X$, odnośnie X zażądajmy tu na razie tylko, aby X było *przestrzenią macryczną*. Założmy, że F ma punkt stały $x^* \in X$, tzn. $F(x^*) = x^*$. Zapytajmy, jakie własności musi mieć F , aby punkt stały x^* był granicą ciągu rekurencyjnego $x_n = F^n x_0$ (x_0 – jakiś punkt startowy dla ciągu rekurencyjnego).

Najsamprw weźmy $X = \mathbb{R}$, ze zwykłą metryką: $d(x, y) = |x - y|$.

Weźmy trzy przykłady.

1. $F(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Punkt stały: $F(x^*) = x^*$ otrzymujemy przez rozwiązanie równania $\frac{1}{2}x^* + 1 = x^*$ czyli $\frac{1}{2}x^* = 1$, co daje $x^* = 2$.

A teraz wybierzmy jakiś punkt startowy, np. $x_0 = 5$ i liczymy kolejne iteracje. Mamy:

$$x_1 = \frac{7}{2} = 2 + \frac{3}{2}; \quad x_2 = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}; \quad x_3 = \frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}; \quad x_4 = \frac{35}{16} = 2 + \frac{3}{16}; \dots$$

Łatwo można wyprowadzić wzór na n -ty wyraz:

$$x_n = 2 + \frac{3}{2^n},$$

tak więc widać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Warto całą sytuację zilustrować graficznie **RYS.**

2. A teraz zobaczmy: $F(x) = 2x - 2$. Widać (sprawdzamy od razu), że punkt stały $x^* = 2$. Popatrzmy, jak wyglądają kolejne iteracje odwzorowania F **RYS.** Widać, że tu kolejne iteracje F *oddalają* od punktu stałego. Tu więc metoda znajdowania punktu stałego przez stosowanie kolejnych przybliżeń *nie działa*.

Rozpatrzmy teraz ogólne odwzorowanie, określone przez funkcję $F(x) = ax + b$. Po chwili zastanowienia widać, jaki warunek musi być spełniony, aby ciąg x_n dążył do punktu stałego. Z powyższej konstrukcji 'schodków' widać, że *Trzeba, aby* $0 < F' < 1$. (Okazuje się, że można go rozluźnić do warunku: $|F'| < 1$. Gdy $F' < 0$, scenariusz dążenia do punktu stałego jest ciekawszy – niech zainteresowany Czytelnik wykona analogon konstrukcji 'schodków' w tym przypadku).

3. $F(x) = +\sqrt{2+x}$. **RYS.** Tu można znaleźć rozwiązanie równania $F(x) = x$ – sprawdza się od razu, że punktem stałym jest $x^* = 2$. Z ilustracji (**RYS.**) wynika, że kolejne iteracje F prowadzą do punktu stałego. Weźmy jako punkt startowy np. $x_0 = 10$. Kalkulując bezpośrednio, otrzymamy kolejne wartości ciągu x_n :

$$x_1 = 3.4641; \quad x_2 = 2.3375; \quad x_3 = 2.0826; \quad x_4 = 2.0205; \quad x_5 = 2.0051; \quad x_6 = 2.0013$$

4. $F(x) = \ln(5+x)$. **RYS.** Tu już nie napiszemy jawnego rozwiązania równania $F(x) = x$, przynajmniej przy użyciu znanych nam funkcji. Metodą kolejnych iteracji możemy znaleźć rozwiązanie z dowolną dokładnością: Biorąc np. $x_0 = 10$, dostajemy:

$$x_1 = 2.7080; \quad x_2 = 2.0423; \quad x_3 = 1.9519; \quad x_4 = 1.9390; \quad x_5 = 1.9371; \quad x_6 = 1.9369$$

z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku jest to już granica – pierwszych pięć cyfr nie zmienia się już przy dalszych iteracjach.

Podsumujmy nasze obserwacje: *Punkt stały x^* odwzorowania F jest granicą ciągu rekurencyjnego $x_n = F^n x_0$: $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, jeśli odwzorowanie F spełnia warunek: $|F'(x)| < 1$, a tak będzie wtedy, gdy F jest zblizajace, tzn. $|F(x) - F(y)| < |x - y|$.*

Uwaga. Opisaną wyżej technikę znajdowania punktu stałego można wykorzystać m.in. do znajdowania rozwiązań równania $f(x) = 0$. Zauważmy, że to równanie można przepisać jako: $f(x) + x = x$; definiując teraz: $F(x) = f(x) + x$ i zakładając, że $|F'(x)| < 1$, mamy gwarancję, że możemy iteracyjnie znaleźć rozwiązanie równania $f(x) = 0$ jako punkt stały odwzorowania F . Obserwacja ta jest podstawą kilku metod numerycznych znajdowania rozwiązań równań postaci $f(x) = 0$.

4.3 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Gwarancję znalezienia punktu stałego odwzorowania poprzez granicę ciągu iteracji daje

Tw. (Banacha). Niech (X, d) – zupełna przestrzeń metryczna.² Niech $T : X \rightarrow X$. Załóżmy, że odwzorowanie T jest *zblizajace*, tzn. dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi:

$$d(T(x), T(y)) \leq C d(x, y), \quad \text{gdzie } 0 \leq C < 1. \quad (20)$$

Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały x^* (tzn. zachodzi: $T(x^*) = x^*$). x^* jest granicą ciągu $x_n = T^n x_0$, gdzie x_0 jest dowolnym punktem z X .

Uwaga. Jeśli odwzorowanie T ma własność (20), to mówimy, że jest odwzorowaniem *zblizajacym* (lub *zwężajacym*), albo że jest *kontrakcją*.

Dow. Pokażemy, że ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy’ego, tzn.

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall m, n > M : d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Oszacujmy odległość $d(x_n, x_m)$ dla odwzorowania zblizajacego. Załóżmy przy tym, że $n > m$, tzn. $n = m + k$, gdzie $k > 0$:

$$d(x_n, x_m) = d(T^m x_k, T^m x_0) \leq C^m d(x_k, x_0)$$

Skorzystaliśmy tutaj z własności (20) odwzorowania zblizajacego.

Przypomnijmy sobie teraz *nierówność trójkąta* dla metryki:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Biorąc tu: $x = x_k$, $y = x_0$, $z = x_{k-1}$, mamy:

$$d(x_k, x_0) \leq d(x_k, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_0) = d(T^k x_0, T^{k-1} x_0) + d(x_{k-1}, x_0)$$

²Dla przypomnienia: X jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy’ego elementów z X ma granicę należącą do X . Pamiętamy np. (a przynajmniej było to w I semestrze), że $\mathbb{Q}$ nie jest zupełna, a $\mathbb{R}$ jest zupełna.

$$= C^{k-1}d(x_1, x_0) + d(x_{k-1}, x_0);$$

w ostatniej równości znów skorzystaliśmy z własności (20).

Do członu $d(x_{k-1}, x_0)$ znów stosujemy tę sztuczkę, co wyżej, i mamy:

$$d(x_{k-1}, x_0) \leq C^{k-2}d(x_1, x_0) + d(x_{k-2}, x_0)$$

i możemy napisać:

$$\begin{aligned} d(x_k, x_0) &\leq C^{k-1}d(x_1, x_0) + d(x_{k-1}, x_0) \leq C^{k-1}d(x_1, x_0) + C^{k-2}d(x_1, x_0) + d(x_{k-2}, x_0) \leq \\ &\leq (C^{k-1} + C^{k-2} + \dots + C + 1)d(x_1, x_0) = \frac{1 - C^k}{1 - C}d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{1}{1 - C}d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z wzorów na sumę częściową i nieskończoną szeregu geometrycznego.

Dla danego $\epsilon > 0$, niech teraz M będzie liczbą taką, że

$$\frac{C^M}{1 - C}d(x_1, x_0) < \epsilon.$$

Widzimy, że mamy wtedy spełniony warunek Cauchy'ego dla ciągu $\{x_n\}$, tzn. że ciąg ten jest zbieżny.

Jego granica jest punktem stałym odwzorowania T . Mamy bowiem:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C^n d(x_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

a z drugiej strony, ponieważ T jest *ciągłe* (co wynika z własności, że T jest zbijające), oraz, ponieważ metryka jest funkcją ciągłą swoich argumentów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T(x_n), x_n) = d(\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = d(T(x^*), x^*) = 0,$$

czyli $T(x^*) = x^*$.

Jeszcze jednoznaczność x^* . Załóżmy, że T ma dwa punkty stałe: x_1^* oraz x_2^* , tzn. mamy: $T(x_1^*) = x_1^*$, $T(x_2^*) = x_2^*$. Zatem:

$$d(T(x_1^*), T(x_2^*)) = d(x_1^*, x_2^*).$$

Z drugiej strony, ponieważ T jest zbijające, to

$$d(T(x_1^*), T(x_2^*)) \leq C d(x_1^*, x_2^*) < d(x_1^*, x_2^*);$$

otrzymujemy zatem *sprzeczność*, CHYBA ŻE $x_1^* = x_2^*$; wtedy wszystkie odległości powyżej są zerami. Mamy więc: $x_1^* = x_2^*$.

CBDO

4.4 Przy pewnych warunkach odwz. Picarda jest zwężające

4.4.1 Gdzie działa odwz. Picarda

Powiemy teraz nieco – ale tylko nieco – o *przestrzeni* w której działa odwz. Picarda.

Pamiętamy, że odwzorowanie Picarda A przyporządkowuje funkcji $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ inną funkcję $(A\phi)(t) \in \mathbb{R}^n$.

Podamy najpierw definicję przestrzeni odwzorowań.

Def. Załóżmy, że rozpatrujemy $\mathcal{C}$ – zbiór *funkcji ciągłych* określonych na odcinku $[a, b]$ o wartościach wektorowych $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. (Gdy $n = 1$, to tym zbiorem jest przestrzeń $C[a, b]$). Na zbiorze $\mathcal{C}$ wprowadzamy metrykę ρ : Dla funkcji $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ definiujemy ich odległość jako

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{t \in [a, b]} \|f_1(t) - f_2(t)\|.$$

Tw. Przestrzeń $(\mathcal{C}, \rho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

Dow. (częściowy). Pierwszą część, tzn. że $(\mathcal{C}, \rho)$ jest przestrzenią metryczną, sprawdza się nietrudno. Pierwsze dwa aksjomaty metryki są spełnione w oczywisty sposób, zaś nierówność trójkąta wynika z nierówności trójkąta dla normy i własności sup:

$$\begin{aligned} \rho(f_1, f_2) &= \sup_{t \in [a, b]} \|f_1(t) - f_2(t)\| = \sup_{t \in [a, b]} \|f_1(t) - f_3(t) + f_3(t) - f_2(t)\| \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} (\|f_1(t) - f_3(t)\| + \|f_3(t) - f_2(t)\|) \leq \sup_{t \in [a, b]} \|f_1(t) - f_3(t)\| + \sup_{t \in [a, b]} \|f_3(t) - f_2(t)\| \\ &= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_3, f_2). \end{aligned}$$

Druga część, tzn. sprawdzenie zupełności przestrzeni $\mathcal{C}$, wymaga szczegółów technicznych, którymi nie dysponujemy (tzn. pojęcia i własności *zbieżności jednostajnej*) i tę część pominiemy.

(częściowo **cbdo**)

Przestrzeń, w której działa odwzorowanie Picarda, jest przestrzenią $\mathcal{C}$, z pewnymi dodatkowymi warunkami, których teraz nie wypiszemy.

Wypiszemy za to warunek gwarantujący, że odwzorowanie A będzie zbliżające. Wtedy dowód twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego sprowadzi się do zaaplikowania tw. Banacha o punkcie stałym do odwzorowania A .

Będziemy jeszcze do tego potrzebowali definicji.

Def. Niech (M_1, ρ_1) , (M_2, ρ_2) – przestrzenie metryczne. Niech G – odwzorowanie między nimi: $G : M_1 \rightarrow M_2$. Niech $L \in \mathbb{R}_+$. Mówimy, że G

spełnia *warunek Lipschitza* ze stałą L , jeśli powiększa ono odległość między dowolnymi dwoma punktami należącymi do M_1 nie więcej niż L razy:

$$\forall_{x,y \in M_1} \rho_2(Gx, Gy) \leq L\rho_1(x, y).$$

Uwaga. Jeśli $(M_1, \rho_1) = (M_2, \rho_2)$, zaś stała $L < 1$, to takie odwzorowanie jest zbliżające.

Przykłady.

1. Niech $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ ze standardową metryką. Odwzorowanie $G(x) = ax + b$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = a$.
2. Niech $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ ze standardową metryką. Odwzorowanie $G(x) = x^2$ *nie* spełnia warunku Lipschitza – odległość $x_1^2 - x_2^2$ może być dowolnie duża dla $x_1 - x_2 = 1$.
3. Niech $M_1 = [-1, 1]$, $M_2 = [0, 1]$ ze zwykłą metryką. Odwzorowanie $G(x) = x^2$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = 2$.
4. Ogólnie, jeśli G ma *ograniczoną pochodną*, to spełnia warunek Lipschitza. Pokazaliśmy to przy okazji dowodu tw. o istnieniu odwzorowania odwrotnego (str. 5 części 12 notatek). Ale odwzorowanie może nie być różniczkowalne, a mimo to spełniać warunek Lipschitza.
5. Niech $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ ze standardową metryką. Odwzorowanie $G(x) = \sqrt[3]{x}$ *nie* spełnia warunku Lipschitza (biorąc $x_1 = 0$, iloraz $\frac{|G(x_2) - G(x_1)|}{|x_2 - x_1|}$ może być dowolnie duży).

4.4.2 Kiedy odwz. Picarda jest zwężające

Spójrzmy znów na układ (16). Okazuje się, że:

1. jeśli odcinek czasu, na którym rozpatrujemy ewolucję daną przez układ (16) jest mały, tzn. rozpatrujemy wartości t spełniające: $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$, $\epsilon > 0$;
2. prawa strona układu (16) jest różniczkowalna w sposób ciągły (co można zastąpić przez słabsze założenie, iż spełnia ona *warunek Lipschitza*,

to gwarantuje już to, że odwz. Picarda będzie zwężające.

Tw. Jeśli wartość ϵ jest dostatecznie mała, to odwzorowanie Picarda jest zwężające.

Dow.

nie będzie. Nie jest on bardzo trudny, ale znów wymaga technicznych narzędzi: pojęcia i własności zbieżności jednostajnej.

4.5 Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania

Tw. (*Cauchy’ego³ o lokalnym istnieniu i jednoznaczności rozwiązania układu równań różniczkowych I. rzędu.*)

Rozważmy układ równań różniczkowych z warunkiem początkowym (16). Niech prawa strona F będzie różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu (t_0, x_0) . (co można zastąpić przez słabsze założenie, iż spełnia ona *warunek Lipschitza* Wówczas istnieje jednoznaczne rozwiązanie układu (16).

Komentarze – uwagi.

1. Gdy prawa strona układu (16) nie spełnia warunku Lipschitza, to jednoznaczność może nie mieć miejsca – przekonaliśmy się o tym na przykładzie.
2. Dla ogólnych (nieliniowych) równań, rozwiązanie może nie istnieć dla dowolnych t . Jako prosty przykład weźmy $n = 1$ i równanie:

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1.$$

Rozwiązanie znajdujemy prosto:

$$\frac{dx}{x^2} = dt, \quad \implies -\frac{1}{x} = t + C.$$

Stałą C znajdujemy z warunku początkowego: $x(0) = 1 \implies C = -1$. Mamy więc:

$$x(t) = -\frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t}.$$

Łatwo to rozwiązanie naszkicować – jest to fragment *hiperboli*. Rozwiązanie istnieje dla $t < t^* = 1$.

3. Powyższe twierdzenie można wzmocnić: Okazuje się, że jednoznaczne rozwiązanie istnieje również dla warunku początkowego dostatecznie bliskiego x_0 (tzn. jeśli $x(t_0) = y_0$, oraz $\|y_0 - x_0\|$ jest dostatecznie małe, to na odcinku czasu $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie z warunkiem początkowym $x(t_0) = y_0$).

Stąd widać, że:

4. Z punktu x_0 można pójść w n liniowo niezależnych kierunkach. Tak więc, *rozwiązanie układu n równań I. rzędu zależy od n dowolnych stałych.*

Ponadto

³Zwane też tw. Picarda lub Picarda–Cauchy’ego

5. Rozwiązanie to zależy przy tym od punktu początkowego w sposób ciągły.

Zainteresowany Czytelnik znajdzie dowody np. w książce Arnolda, 'Równania różniczkowe zwyczajne', rozdz. 4, lub F. Leja, 'Rachunek różniczkowy i całkowy', Dodatek.

5 Równania i układy liniowe

Def. *Układem równań liniowych* nazywamy układ (??) z prawą częścią zależącą *liniowo* od x :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (21)$$

Tu $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ jest macierzą $n \times n$. Zakładamy, że wszystkie elementy macierzy $A(t)$ oraz wektora niejednorodności $b(t)$ zależą w sposób *ciągły* od t dla $t \in [a, b]$ (jakiś odcinek).

Uwaga (terminologiczna). Analogicznie jak w przypadku równania I rzędu, układ (22) nazywamy *niejednorodnym*, gdy $b(t) \equiv 0$, oraz *niejednorodnym*, gdy $b(t) \not\equiv 0$.

I takż podobnie jak w przypadku równania I rzędu: Jeśli $x_1(t), x_2(t)$ są dwoma rozwiązaniami układu *jednorodnego*, to ich suma i – ogólniej – ich dowolna liniowa kombinacja też jest rozwiązaniem. Tak więc rozwiązania układu jednorodnego mają strukturę przestrzeni wektorowej.

Zapytajmy teraz, jak wygląda sprawa istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla układów równań liniowych. W celu zbadania tej sytuacji zauważmy najspierw, że dla układów równań liniowych warunek Lipschitza *jest spełniony*:

$$\|F(t, x) - F(t, x')\| = \|A(t)x + b(t) - A(t)x' - b(t)\| = \|A(t)(x - x')\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x - x'\|$$

Funkcja $t \rightarrow \|A(t)\|$ jest *ciągła*. Oznaczając

$$L = \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\|$$

widzimy, że jest spełniony warunek Lipschitza ze stałą L . Ponieważ warunek Lipschitza jest spełniony, to istnieje lokalnie jednoznaczne rozwiązanie.

Ale dzięki temu, że układ (22) jest *liniowy*, można o rozwiązaniu podać znacznie dokładniejsze informacje, niż w ogólnym przypadku. Dowody pominemy, natomiast stwierdzenie wypiszemy:

Stw. Rozważmy układ równań liniowych (22), gdzie $A(t)$ jest ograniczona:

$$\forall t > t_0 : \|A(t)\| \leq M.$$

Wtedy układ (22) ma rozwiązanie dla dowolnych $t > t_0$.

6 Układy liniowe o stałych współczynnikach

Ogólny układ równań (22) jest trudny do rozwiązania. Schematy rozwiązywania znamy dla szczególnych przypadków macierzy $A(t)$, i nawet te szczególne przypadki tworzą bogatą teorię. Np. rozwiązania układów 2×2 z macierzami specjalnej postaci są równoważne *funkcjom specjalnym* (wielomiany i funkcje Legendre'a, Hermite'a, Legendre'a, funkcje Bessela, hipergeometryczna, ... Zainteresowany Czytelnik dowie się więcej o nich np. na wykładzie dla II roku: 'Funkcje specjalne', lub np. z książki E.T. Whittaker, G. Watson, 'Elementy analizy współczesnej', t. II). Ale dla ogólnej postaci układu (22) algorytmu rozwiązywania nie znamy.

Ważną klasą układów równań liniowych, dla których *istnieje* ogólny algorytm rozwiązywania, są *układy o stałych współczynnikach*, tzn. układy (22), dla których macierz A *nie zależy od czasu*.

Rozpatrujemy więc:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (22)$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

6.1 Układy jednorodne

Zajmijmy się najspierw układem *jednorodnym*, tzn. takim, że $b(t) \equiv 0$:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (23)$$

Okazuje się, że rozwiązanie powyższego układu łatwo podać, a mianowicie mamy:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (24)$$

Sprawdźmy to. Pamiętamy, jak się definiuje funkcję analityczną – w naszym przypadku *exponens* – od argumentu macierzowego:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots$$

Pamiętając o tym, policzmy pochodną $\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}$, nie przejmując się takimi 'drobiazgami', jak możliwość różniczkowania szeregu wyraz za wyrazem oraz zbieżnością szeregu:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)} &= \frac{d}{dt} \left(I + A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}A^3(t-t_0)^3 + \dots \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(A + A^2(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^3(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}A^4(t-t_0)^3 + \dots \right) = \dots\end{aligned}$$

... wyciągamy A przed nawias...

$$\dots = A \left(I + A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}A^3(t-t_0)^3 + \dots \right) = A e^{A(t-t_0)}.$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}x_0 \\ &= A e^{A(t-t_0)}x_0 = A x(t).\end{aligned}$$

Sprawdzamy też, że dla rozwiązania (24) spełniony jest warunek początkowy:

$$x(t)|_{t=0} = e^{A \cdot 0}x_0 = I x_0 = x_0.$$

Zatem! Rozwiązanie układu (24) sprowadza się do obliczenia eksponensu od macierzy.

Na szczęście, takie rzeczy już robiliśmy.

Przypomnijmy więc sobie, jak to się robi, na przykładzie.

Przykł. Znaleźć rozwiązanie układu równań w $\mathbb{R}^3$ z warunkiem początkowym:

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 \equiv x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Dla rozwiązania problemu kluczowe jest znalezienie macierzy e^{At} i zadziaływanie nią na wektor warunku początkowego x_0 .

W części algebraicznej wykładu, nie tak dawno temu, liczyliśmy funkcje od macierzy. Najsamprzód trzeba znaleźć wartości własne, co znajdujemy, przyrównując wielomian charakterystyczny do zera. Konkretnie⁴:

$$w_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

⁴Szampan i owoce...

Otrzymujemy więc tu *dwie* wartości własne: $\lambda_1 = -1$ o krotności 2 oraz $\lambda_2 = 2$ o krotności 1.

Stąd otrzymujemy wartości własne macierzy At : Są to: $\lambda_1 = -t$ o krotności 2 oraz $\lambda_2 = 2t$ o krotności 1. Sytuacja wielokrotnych wartości własnych wymaga rozszerzenia technologii liczenia funkcji od macierzy. Przyjrzyjmy się jej jeszcze raz, biorąc ogólny przypadek funkcji analitycznej $f(x)$; chcemy obliczyć funkcję macierzy B rozmiaru $n \times n$, tzn. $f(B)$.

Podzielmy $f(x)$ przez wielomian charakterystyczny macierzy B :

$$f(x) = q(x) w_B(x) + r(x), \quad \deg r < n \quad (26)$$

Reszta ma postać:

$$r(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1};$$

chcemy wyznaczyć współczynniki wielomianu-reszty tzn. $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$. Znajdziemy je, wstawiając do równości (26) kolejne wartości własne macierzy B . Mamy w ten sposób:

$$f(\lambda_i) = r(\lambda_i).$$

Jeśli mamy dokładnie n wartości własnych, to nie ma kłopotów: Mamy układ n równań na n współczynników wielomianu r . Co jednak, gdy mamy *wielokrotne* wartości własne? Mamy wtedy mniej równań niż niewiadomych!

'Brakujące' równania możemy jednak otrzymać w następujący sposób. Założmy, że λ_k jest dwukrotną wartością własną. Weźmy równanie:

$$f(x) = q(x) w_B(x) + r(x)$$

i zróżniczkujemy je po x . Otrzymamy:

$$f'(x) = q'(x) w_B(x) + q(x) w'_B(x) + r'(x).$$

Wstawiając doń λ_k , mamy: $w_B(\lambda_k) = 0$ (bo λ_k jest pierwiastkiem $w_B(x)$) oraz $w'_B(\lambda_k) = 0$ (bo λ_k jest *dwukrotnym* pierwiastkiem $w_B(x)$). Zatem otrzymamy równość:

$$f'(\lambda_k) = r'(\lambda_k).$$

Jest to brakujące równanie.

Gdy mamy więcej pierwiastków wielokrotnych, albo pierwiastek o większej krotności, postępujemy analogicznie. Łącznie zawsze możemy sprawić, że mamy tyle równań, ile jest niewiadomych współczynników.

Konkretyzując to dla naszej sytuacji i λ_1 jest dwukrotna, mamy: $r(x) = a + bx + cx^2$, oraz równania na współczynniki a, b, c :

$$\begin{cases} f(\lambda_1) &= a + b\lambda_1 + c\lambda_1^2 \\ f'(\lambda_1) &= 0 + b + 2c\lambda_1 \\ f(\lambda_2) &= a + b\lambda_2 + c\lambda_2^2 \end{cases}$$

W naszym przypadku $f(x) = e^x$, a macierzą której Exponens liczymy to At , i pamiętając, że $\lambda_1 = -t$ (dwukrotna) oraz $\lambda_2 = 2t$, mamy

$$\begin{cases} e^{-t} &= a - bt + ct^2 \\ e^{-t} &= 0 + b - 2ct \\ e^{2t} &= a + 2bt + 4ct^2 \end{cases}$$

To jest nasz układ równań. Rozwiązujemy go np. metodą wyznaczników:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & -2t \\ 1 & 2t & 4t^2 \end{vmatrix} = 4t^2 + 2t^2 + 0 - t^2 + 4t^2 + 0 = 9t^2;$$

$$W_a = \begin{vmatrix} e^{-t} & -t & t^2 \\ e^{-t} & 1 & -2t \\ e^{2t} & 2t & 4t^2 \end{vmatrix} = e^{-t}(4t^2 + 2t^3 + 4t^2 + 4t^3) + e^{2t}(2t^2 - t^2) = e^{-t}(8t^2 + 6t^3) + e^{2t}t^2;$$

$$W_b = \begin{vmatrix} 1 & e^{-t} & t^2 \\ 0 & e^{-t} & -2t \\ 1 & e^{2t} & 4t^2 \end{vmatrix} = e^{-t}(4t^2 - 2t - t^2) + e^{2t}2t = e^{-t}(3t^2 - 2t) + 2te^{2t};$$

$$W_c = \begin{vmatrix} 1 & -t & e^{-t} \\ 0 & 1 & e^{-t} \\ 1 & 2t & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{-t}(-t - 1 - 2t) + e^{2t} = e^{-t}(-3t - 1) + e^{2t}$$

Stąd mamy:

$$a = \frac{1}{9}[(8+6t)e^{-t} + e^{2t}]; \quad bt = \frac{1}{9}[(3t-2)e^{-t} + 2e^{2t}]; \quad ct^2 = \frac{1}{9}[(-3t-1)e^{-t} + e^{2t}]. \quad (27)$$

Więc!! Mamy znaleziony Exponens od macierzy:

$$e^{At} = aI + Abt + A^2ct^2 \quad (28)$$

gdzie a, b, c są dane przez (27). Można wynik zapisać w postaci jednej macierzy, ale nie będziemy tego robić z braku motywacji.

Napiszmy teraz rozwiązanie spełniające warunek początkowy (25). Musimy w tym celu zadziałać macierzą e^{At} na wektor x_0 . Mamy:

$$Ix_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2x_0 = A(Ax_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

stąd

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 = (aI + bAt + cA^2t^2)x_0 = \begin{bmatrix} -a + b - c \\ a - b + c \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} e^{-t}(-6t - 8 + 3t - 2 + 3t + 1) + e^{2t}(-1 + 2 - 1) \\ 1 - e^{-t}(-6t - 8 + 3t - 2 + 3t + 1) - e^{2t}(-1 + 2 - 1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

To jest nasze szukane rozwiązanie. Widać od razu, że spełnia ono warunek początkowy. **Uwagi.**

1. Ogólna struktura rozwiązania jest następująca: Z każdą pojedynczą wartością własną λ_i pojawia się wyraz proporcjonalny do $e^{\lambda_i t}$, zaś z wielokrotną wartością własną λ_k o krotności n_k pojawiają się dodatkowo człony proporcjonalne do $te^{\lambda_k t}, t^2e^{\lambda_k t}, \dots, t^{n_k-1}e^{\lambda_k t}$. (W naszym przypadku akurat się one skasowały).
2. Wykorzystując szczególne postaci macierzy (np. w naszym przypadku była ona *symetryczna*), można rozwiązanie znaleźć szybciej i prościej. Zaprezentowana metoda – będąc nieco przydługą – jest uniwersalna i działa dla *każdej* macierzy.

6.2 Układy niejednorodne

7 Równania liniowe o stałych współczynnikach

7.1 Ogólne fakty

Nazywamy tak równanie spełniane przez szukaną funkcję $y(x)$:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (30)$$

przy czym:

- Jeżeli $f(x) \equiv 0$ to równanie nazywamy *jednorodnym*,

- Jeżeli $f(x) \not\equiv 0$ to równanie nazywamy *niejednorodnym*.

Uwaga. Przy równaniu jednorodnym chodzi o to, aby funkcja $f(x)$ była równa zero *tożsamościowo*, tzn. dla każdego x . W izolowanych punktach x funkcja $f(x)$ może być równa zero, ale w takim przypadku równanie nazywamy jednorodnym, np. dla $f(x) = \sin x$.

Fakt 1. Zbiór rozwiązań równania *jednorodnego* (30) jest przestrzenią wektorową. Dla równania *jednorodnego* jest to przestrzeń *afiniczna*.

Fakt 2. Przestrzenie te są n -wymiarowe. Innymi słowy, ogólne rozwiązanie równania (30) zależy od n dowolnych stałych.

7.2 Równania jednorodne: algorytm

7.2.1 Jednokrotne wartości własne

7.2.2 A gdy się trafią zespolone...

... to nie należy ich się bać! Ale trzeba wtedy postępować trochę inaczej.

Najsamprzód przypomnijmy sobie (a jeśli go nie było, to od ręki pokażemy) fakt z algebry.

Fakt. Jeżeli pierwiastki wielomianu n -tego stopnia o współczynnikach rzeczywistych:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (31)$$

są *zespolone*, to występują one w parach zespolonych sprzężonych. Innymi słowy, jeśli $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ jest pierwiastkiem równania (31), to $\overline{\lambda_k} = \alpha_k - i\beta_k$ również jest pierwiastkiem tego równania.

Dow.

To teraz napiszmy część rozwiązania równania ogólnego, odpowiadającą pierwiastkom $\lambda = \alpha + i\beta$ i $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Na pierwszy rzut oka nie ma tu nic podejrzanego: piszemy część rozwiązania równania ogólnego:

$$y_J = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\overline{\lambda} x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}). \quad (32)$$

Ale, na drugi rzut oka... jest tu *dwa razy za dużo* o 'stopni swobody'! Bo mamy nominalnie *dwie* stałe C_1 i C_2 ; ale mogą one przyjmować wartości *zespolone* (skoro są zespolone wyrazy wykładnicze). 2 stałe zespolone = 4 stałe rzeczywiste – dwa razy za dużo. Co tu jest nie tak?

Tu trzeci rzut oka (tzn. przyjrzenie się problemowi po raz trzeci). Gdybyśmy byli w dziedzinie *zespolonej*, to wszystko byłoby ok. Ale jesteśmy w dziedzinie *rzeczywistej*. Przyjmujemy, że w jakiejś chwili czasu rozwiązanie jest rzeczywiste, i musi ono być takie we wszystkich chwilach następnych. Jak

się przekonamy – ten warunek (aby rozwiązanie było rzeczywiste) zapewnia już właściwą ilość parametrów rozwiązania ogólnego.

Przyjrzyjmy się temu bliżej. Załóżmy, że stałe C_1, C_2 w (32) są:

$$C_1 = a + bi, \quad C_2 = c + di.$$

Aby rozwiązanie (32) było rzeczywiste dla $x = 0$, musimy mieć:

$$(a + bi)e^0 + (c + di)e^0 \in \mathbb{R} \implies b + d = 0, \quad \text{tzn. } b = -d.$$

Weźmy jeszcze jakiś drugi warunek, np. aby pochodna rozwiązania była rzeczywista dla $x = 0$. To daje:

$$(i\beta)C_1 - (i\beta)C_2 = \beta(ia - b - ic + d) \in \mathbb{R} \implies a - c = 0, \quad \text{tzn. } a = c.$$

Mamy więc tylko *dwie* niezależne stałe; wybierzmy jako niezależne a oraz b (pamiętając, że są one *czysto rzeczywiste*).

Wstawiając te warunki do stałych C_1, C_2 , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y_J &= e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}((a + ib)e^{i\beta x} + (a - ib)e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}[a(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) + ib(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})] = e^{\alpha x}[2a \cos \beta x - 2b \sin \beta x]; \end{aligned}$$

widać, że ta postać rozwiązania jest *czysto rzeczywista*!

Podsumujmy: W przypadku zespolonych pierwiastków równania charakterystycznego, (tzn. $\lambda = \alpha \pm i\beta$), zamiast pisać RORJ w postaci:

$$e^{\alpha x}[C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}],$$

co *nie jest* postacią jawnie rzeczywistą, możemy przyjąć, że RORJ będzie sumą członów postaci:

$$e^{\alpha x}[A \cos \beta x + B \sin \beta x].$$

7.2.3 Wielokrotne wartości własne

7.3 Równania jednorodne: przykłady

Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań:

1. $y'' + y' - 2y = 0$. ($y' = \frac{dy}{dt}$ itd.) Tworzymy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$, C_1, C_2 – dowolne stałe.

2. $y'' - 4y' = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{0 \cdot t} = C_1 e^{4t} + C_2$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
3. $y'' + y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 1 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$, gdzie C_1, C_2 są zespolone. Rozwiązanie, zamiast w postaci wykładniczej, można równoważnie zapisać w postaci trygonometrycznej: $y = A \cos t + B \sin t$, A, B – dowolne stałe rzeczywiste.
4. $y'' + 6y' + 13y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = -3 - 4i$, $\lambda_2 = -3 + 4i$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = a_1 e^{(-3-4i)t} + a_2 e^{(-3+4i)t} = e^{-3t}(a_1 e^{-4it} + a_2 e^{4it})$, co równoważnie można zapisać w postaci trygonometrycznej: $y = e^{-3t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t)$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
5. $y'' - 2y' + y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ posiada jeden pierwiastek podwójny $\lambda = 1$, zatem rozwiązanie ogólne jest $y = (C_1 + C_2 t)e^t$.
6. **Oscylator harmoniczny tłumiony.** Zapiszmy równanie ruchu dla położenia $x(t)$ w postaci:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 0.$$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$ ma wyróżnik:

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega^2 = 2(\gamma^2 - \omega^2).$$

Zachowanie rozwiązania jest jakościowo różne w zależności od tego, czy $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.

- $\Delta > 0$, co odpowiada $\gamma > \omega$ ('silne tłumienie'). Mamy, dla pierwiastków równania charakterystycznego:

$$\lambda_+ = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0, \quad \lambda_- = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$$

i rozwiązanie ogólne jest czysto wykładnicze:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}. \quad (33)$$

Ponieważ, jak widzieliśmy: $\lambda_+ < 0$, $\lambda_- < 0$, to oba człony w rozwiązaniu (33) będą 'gasły', a nie 'wybuchały' – rozwiązanie będzie wykładniczo 'spęzalo' do położenia równowagi.

- $\Delta = 0$, co zachodzi w przypadku $\gamma = \omega$ ('tłumienie krytyczne'). Mamy jeden pierwiastek podwójny:

$$\lambda_* = -\gamma < 0,$$

i rozwiązanie ogólne ma postać:

$$x(t) = e^{\lambda_* t}(C_1 + C_2 t).$$

Gdy $t \rightarrow \infty$, oba wyrazy dążą do zera ('funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż dowolny wielomian'). Rozwiązanie ma jakościowo podobny charakter co w poprzednim przypadku – 'spełza' ono do zera bez oscylacji, choć nieco wolniej.

- $\Delta < 0$, co odpowiada $\gamma < \omega$ ('słabe tłumienie'). Mamy: $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ i pierwiastki

$$\lambda_+ = -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} < 0, \quad \lambda_- = -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} < 0$$

(zwróćmy uwagę, że części rzeczywiste obu pierwiastków są mniejsze od zera). Ogólne rozwiązanie zapiszmy w postaci trygonometrycznej:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A \cos \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + B \sin \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t).$$

Rozwiązanie ma charakter tłumionych oscylacji, przy czym ich częstość $\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ jest *mniejsza* niż częstość ω w przypadku drgań nietłumionych. Częstość maleje do zera, gdy $\gamma \rightarrow \omega$.

7.4 Równania niejednorodne ze 'zgadywalnymi' niejednorodnościami: algorytm

7.5 Równania niejednorodne ze 'zgadywalnymi' niejednorodnościami: przykłady

Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań:

1. $y'' + 4y = e^t$ (*). *i)* Znajdujemy Rozwiązanie Ogólne Równania Jednorodnego (RORJ), tzn. z prawą stroną równą zeru: $y'' + 4y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 4 = 0$ ma pierwiastki: $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Wypisujemy od razu RORJ w postaci trygonometrycznej: RORJ = $C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t$. *ii)* Znajdujemy Rozwiązanie Szczególne Równania Niejednorodnego (RSRN) metodą 'zgadywania': Przewidujemy postać rozwiązania y_N jako: $y_N = Ae^t$, gdzie A jest stałą; po wstawieniu y_N do (*) dostajemy: $5Ae^t = e^t$, skąd $A = \frac{1}{5}$, zatem RSRN = $\frac{1}{5}e^t$.

iii) Rozwiązanie Ogólne Równania Niejednorodnego (RSRN) jest sumą RORJ i RSRN: $\text{RORN} = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t + \frac{1}{5}e^t$.

2. $y'' - 9y = (12t - 8)e^{-3t}$ (**). i) RORJ: $\lambda^2 - 9 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$. RORJ = $C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$. ii) RSRN: Niejednorodność jest 'zgadywalna', (bo jest postaci: wielomian razy funkcja wykładnicza). Wykładnik niejednorodności pokrywa się z jedną z wartości własnych, zatem RSRN przewidujemy w postaci: $y_N = t(A + Bt)e^{-3t}$, gdzie A i B są stałymi, które musimy wyznaczyć. Po wstawieniu y_N do (**) dostajemy: $(-2B - 6A - 12Bt)e^{-3t} = (12t - 8)e^{-3t}$, skąd, porównując współczynniki przy potęgach wielomianów po obu stronach, dostajemy: $-12Bt = 12t, 2B - 6A = 8$, skąd $B = -1, A = 1$. iii) RSRN = RORJ + RSRN = $C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + t(1 - t)e^{-3t}$.

3. Oscylator harmoniczny tłumiony z periodyczną siłą wymuszającą

Weźmy siłę wymuszającą w postaci $f(t) = \cos \alpha t$. Rozważmy najspierw

- oscylator *nietłumiony, nierezonansowy*. Mamy więc:

$$x'' + \omega^2 x = \cos \alpha t \quad (34)$$

i zakładamy $\alpha \neq \omega$.

Pamiętamy (a jeśli nie to liczymy od razu) RORJ:

$$x_J = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad A, B - \text{dowolne stałe}$$

Zakładamy RSRN w postaci:

$$y_N = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t,$$

i wstawiamy to do równania (34), dostając:

$$-a\alpha^2 \cos \alpha t - b\alpha^2 \sin \alpha t + \omega^2 a \cos \alpha t + \omega^2 b \sin \alpha t = \cos \alpha t$$

skąd mamy:

$$a(\omega^2 - \alpha^2) = 1, \quad b = 0$$

Mamy więc:

$$y_N = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} \cos \alpha t.$$

RORN jest sumą dwóch powyższych wyrażeń i ogólnie trudno znaleźć uproszczenie otrzymanego wyrażenia. W bardziej szczególnych przypadkach możemy się jednak o to pokusić. Weźmy $B = 0$ i $A = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2}$. Po pomnożeniu przez stałą mamy wtedy:

$$x(t) = \cos \omega t + \cos \alpha t.$$

Weźmy teraz przypadek *bliski rezonansowemu*, tzn. $\alpha \approx \omega$, co zapiszmy w postaci: $\alpha = \theta + \epsilon, \omega = \theta - \epsilon$, gdzie ϵ jest małe. Mamy:

$$x(t) = \cos \omega t + \cos \alpha t = \cos(\theta + \epsilon) + \cos(\theta - \epsilon)$$

$$\begin{aligned} & \cos \theta t \cos \epsilon t - \sin \theta t \sin \epsilon t + \cos \theta t \cos \epsilon t + \sin \theta t \sin \epsilon t \\ & = 2 \cos \theta t \cos \epsilon t \end{aligned}$$

Pierwszy czynnik jest *szybkozmenny* w porównaniu z drugim; ich iloczyn ma charakter wolnych oscylacji o częstości ϵ 'wypełnionych' szybkimi o częstości θ **RYS..** Sygnał radiowy ma podobny kształt: Szybkie oscylacje o częstości rzędu MHz (fale średnie) wypełniające powolne modulacje o częstości dźwiękowej (kHz).

- oscylator *nietłumiony, rezonansowy*, tzn. o częstości $\alpha = \omega$. RORJ mamy jak poprzednio, zaś RSRN zakładamy postaci:

$$y_N = t(a \cos \omega t + b \sin \omega t), \implies y_N'' = -2a\omega \sin \omega t + 2b\omega \cos \omega t - a\omega^2 \cos \omega t$$

po wstawieniu do równania niejednorodnego dostaniemy

$$y_N'' + \omega^2 y_N = -2a\omega \sin \omega t + 2b\omega \cos \omega t = \cos \omega t \implies a = 0, \quad b = \frac{1}{2\omega},$$

tzn.

$$y_N = \frac{1}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Są to *rosnące oscylacje* **RYS..** Przykład każdy mógł zaobserwować rozhuśtując huśtawkę – najskuteczniej robi się to działając ruchami o częstości dostosowanej do częstości własnej huśtawki.

Fizycznie tak można robić do czasu, aż przybliżenie harmoniczne się załamie, czasem załamanie się przybliżenia harmonicznego odpowiada destrukcji układu. Np.: Most w Amiens; śpiewanie do szklanki z jej częstością własną, co zostało przesadnie, ale malowniczo ukazane w 'Blaszonym bębenu', czy w filmie 'Shrek I', scena z Fioną i niebieskim ptaszkiem.

- Oscylator tłumiony. Tu mamy:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = \cos \alpha t \quad (35)$$

Wzory na RORJ już uzyskaliśmy uprzednio. Dla RSRN robimy standardowy Ansatz:

$$y_N = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t.$$

Przez wstawienie do równania jednorodnego uzyskamy równania na stałe a oraz b . Zanim to zrobimy, zastanówmy się nad postacią RORN. Nakładają się tu dwa czynniki: Pierwszy to odchodzące z RORJ gasnące oscylacje lub 'spływanie' do położenia równowagi, i drugi – periodyczne oscylacje o częstości α . Pierwsze ulegają wytłumieniu po czasie rzędu $\frac{1}{\gamma}$. Amplituda drugich się w czasie nie zmienia.

Wypiszemy zaraz y_N , pamiętając, że $\text{RORN} = y_J + y_N$, a charakter ruchu przeanalizujemy dokładniej dla dużych czasów (znacznie większych od $\frac{1}{\gamma}$). Wstawiamy, wyliczamy, aby wykładu nie przekształcić w środek nasenny, szczegóły rachunkowe pomijamy, i (**sprawdź, proszę, Czytelniku**) otrzymujemy, na współczynniki a oraz b z y_N :

$$a = \frac{\alpha^2 - \omega^2}{4\alpha^2\gamma^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}, \quad b = \frac{2\alpha\gamma}{4\alpha^2\gamma^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}$$

RSRN można zapisać jako *jedną* funkcję trygonometryczną, ale z *przesunięciem fazowym* i pomnożone przez *amplitudę* $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \sin(\alpha t + \phi_0) = \mathcal{A}(\sin \alpha t \cos \phi_0 + \cos \alpha t \sin \phi_0) = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t,$$

skąd mamy na przesunięcie fazowe:

$$\text{tg } \phi_0 = \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha\gamma},$$

zaś na amplitudę:

$$\mathcal{A} = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha^2\gamma^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}}.$$

Dla przypadku słabego tłumienia, see **RYS.** amplitudy jako funkcji częstości wymuszającej α . Widać, że amplituda ruchu wymuszonego jest największa dla *częstości bliskich częstości własnej*; tłumienie zapewnia, że amplituda pozostaje zawsze skończona.

7.6 Równania niejednorodne z ogólnymi niejednorodnościami

Sprowadzamy równanie n –tego rzędu do układu niejednorodnego pierwszego rzędu rozmiaru $n \times n$ i postępujemy tak jak to opisano w odpowiedniej Subsection.

1. Znaleźć ogólne rozwiązania równań *liniowych*:

(a) $y' + 2y = 4x$.

(b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

(c) $y' + y = \cos x$.

(d) $y' - y = \frac{1+x^2}{x}e^x$.

(e) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$.

(f) $y' \operatorname{tg} x - y = a$.

(g) $y' = 3x - 2y + 5$.

(h) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$.

2. Znaleźć ogólne rozwiązania równań *jednorodnych*:

(a) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

(b) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

(c) $y^2 + x^2 y' = xy y'$.

(d) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Znaleźć ogólne rozwiązania równań:

(a) $y'' = x^2 + \sin x$.

(b) $y'' = \ln x$.

(c) $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

(d) $(y'')^2 = y'$.

4. Znaleźć rozwiązania równań z danymi warunkami początkowymi:

(a) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

(b) $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$;

(c) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

5. Znaleźć ogólne rozwiązania równań:

(a) $y''' + 9y' = 0$.

- (b) • $y^{IV} + 16y = 0$.
- (c) • $y^{IV} - 16y = 0$.
- (d) • $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$.
- (e) $y''' - 13y' - 12y = 0$.
- (f) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.
- (g) $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$.
- (h) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

6. Znaleźć rozwiązania równań z warunkami początkowymi:

- (a) • $y''' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.
- (b) $y^V - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$, $y^{IV}(0) = 2$.

7. Znaleźć ogólne rozwiązania równań:

- (a) • $y''' = \cos 2x$;
- (b) • $2y'' + y' - 2y = 2e^x$;
- (c) • $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;
- (d) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;
- (e) • $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$;
- (f) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$;
- (g) $y'' - 3y' + 2y = 2 \sin x$;
- (h) $y'' - 3y' + 2y = 2 \sinh x$.

8. Znaleźć ogólne rozwiązania układów równań różniczkowych:

- (a) $\begin{cases} \dot{x} = y - 7x \\ \dot{y} = -2x - 5y \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = -x + y + z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$