

1 Pochodne pierwszego rzędu

1.1 Podstawowe definicje

Def. Niech funkcja f będzie określona w pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt a . Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie a dla przyrostu h nazywamy funkcję

$$g_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

Pochodną funkcji f w punkcie a (ozn. $f'(a)$) nazywamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

Inne oznaczenia pochodnej: Pochodną funkcji f w punkcie a oznacza się też:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

bądź – jeśli nie trzeba podawać, w jakim punkcie jest liczona – jako $\frac{df(x)}{dx}$.

Oznaczenia $\frac{df(x)}{dx}$ pochodzą od Leibniza (XVII w.) – jednego z wynalazców (obok Newtona) rachunku różniczkowego. Pochodzenie tej symboliki jest następujące: iloraz różnicowy (1) można zapisać jako:

$$\frac{\text{przyrost wartości funkcji } f}{\text{przyrost wartości argumentu } x} = \frac{\Delta f}{\Delta x};$$

pochodna jest granicą ilorazu różnicowego, i "w granicy" zastępuje się Δ przez d .

Uwaga. Symbol $\frac{df(x)}{dx}$ należy traktować jako *jedną całość*. O ile wielkości z licznika czy mianownika – tzn. Δf czy Δx są dobrze określone, o tyle *oddzielnie* symbole df , dx – bez dodatkowych umów – nie mają sensu, lub są bezużyteczne. (gdyby np. rozpatrywać je w najbardziej narzucający się sposób, tzn. jako granice, gdy przyrost argumentu dąży do zera, to otrzymałoby się zero). Sensowna, bądź użyteczna, jest jedynie ich kombinacja $\frac{df}{dx}$.

Nie oznacza to, że *nie wolno* w ogóle posługiwać się symbolami w rodzaju df czy dx . Wolno, ale jedynie na etapie pośrednim jakiegoś rozumowania, którego finałem będzie jakiś w pełni legalny już symbol w rodzaju $\frac{df}{dx}$ czy $\int f(x)dx$.

Przykł. $f(x) = x^2$, $f'(3) = 6$.

Pochodna funkcji w punkcie ma bardzo wyrazisty sens geometryczny. (RYS.) Rozpatrzmy wykres funkcji $y = f(x)$. Ustalmy dodatnie h i przeprowadźmy prostą przez punkty: $(x, f(x))$ i $(x+h, f(x+h))$. Prostą taką

nazywamy *sieczną* krzywej. Jak widać, iloraz różnicowy jest tangensem kąta α_h , który sieczna tworzy z osią OX . Gdy $h \rightarrow 0$, to sieczne dążą do prostej granicznej – *stycznej* do krzywej w punkcie x . Tak więc

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

Nie każda funkcja ciągła posiada pochodną (co w ilustracji geometrycznej znaczy, że nie każda krzywa posiada styczną, a jeśli nawet tak, to taka styczna nie jest jednoznacznie określona). I tak np. funkcja $f(x) = |x|$ nie posiada pochodnej w punkcie $x = 0$. Mamy bowiem:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +1, \quad \text{oraz} \quad \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$

W powyższym jednak przypadku możemy mówić o *pochodnych jednostronnych*, tzn. granicach ilorazów różnicowych: $\lim_{h \rightarrow 0+}$ (pochodna prawostronna) i $\lim_{h \rightarrow 0-}$ (pochodna lewostronna). Dokładniej, mamy:

Def. Pochodną *prawostronną* (*lewostronną*) funkcji f w punkcie a nazywamy granicę

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (4)$$

Są jednak też funkcje, które (w jakimś punkcie) w ogóle nie posiadają pochodnej – ani lewo-, ani prawostronnej. Np. funkcja:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0 \quad (5)$$

jest ciągła, lecz nie posiada pochodnej (ani lewo-, ani prawostronnej) w zerze. Nieistnienie tej pochodnej wynika np. z nieistnienia granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$. Bowiem granica ilorazu różnicowego:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

nie istnieje, jak to widzieliśmy uprzednio (2 wykłady temu).

Istnieją także funkcje ciągłe, które nie posiadają pochodnej w *żadnym* punkcie.

Rozważamy też pochodne *nieskończone* (ma to miejsce, gdy granica ilorazu różnicowego w jakimś punkcie dąży do nieskończoności). I tak np. dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ mamy

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

(bo $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$); bądź dla pochodnej dwustronnej: weźmy $f(x) = \sqrt[3]{x}$,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty$$

Def. Mówimy, że funkcja jest *różniczkowalna* w przedziale otwartym, jeśli posiada pochodną skończoną w każdym punkcie tego przedziału. Funkcja jest różniczkowalna w przedziale domkniętym $[a, b]$, jeśli posiada pochodną w każdym punkcie wewnętrznym przedziału, a pochodną jednostronną (prawą lub lewą) w lewym /prawym końcu przedziału.

Def. Mówimy, że pochodna $f'(x)$ funkcji $f(x)$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$, jeśli $f'(x)$ jest ciągła wewnątrz przedziału, pochodna prawostronna jest ciągła prawostronnie w punkcie a , zaś pochodna lewostronna – ciągła lewostronnie w punkcie b .

1.2 Pierwsze zastosowania geometryczne i fizyczne pochodnej

Def. Przez *normalną* do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $p = (x, f(x))$ rozumiemy prostą, prostopadłą do stycznej w p i przechodzącą przez p .

Tak więc:

- równanie prostej stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $p = (x_0, y_0)$, gdzie $y_0 = f(x_0)$ jest:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$

lub – w postaci być może łatwiejszej do zapamiętania –

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (6)$$

- Dla prostej normalnej mamy: Współczynnik kierunkowy tej prostej to $-\frac{1}{f'(x_0)}$, co daje równanie prostej

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}x + y_0 + \frac{x_0}{f'(x_0)}$$

lub w równoważnej postaci

$$f'(x_0)(y - y_0) = -(x - x_0). \quad (7)$$

Przykł. $f(x) = x^3$; znajdziemy styczną i normalną do wykresu w punkcie $x = 1, y = 1$.

Odp. Styczna: $y = 3x - 2$; normalna: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. W fizyce, znaczeniem pochodnej jest *prędkość* (zmiany jakiejś wielkości fizycznej w czasie). I tak, prototypem wszelkich takich wielkości jest *droga* (punktu materialnego jako funkcja czasu). Pochodna drogi po czasie – to właśnie prędkość. Analogicznie definiuje się inne rodzaje prędkości. Np. gdy mamy rozpad promieniotwórczy substancji radioaktywnej, to możemy mówić o szybkości rozpadu (prędkości ubytku masy substancji radioaktywnej).

1.3 Różniczkowanie funkcji elementarnych

Zauważmy najsamprzód, że jest prawdziwe

Tw. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x , to jest w tym punkcie ciągła.

Dow. Skoro f jest różniczkowalna w punkcie x , to istnieje i jest skończona granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

tak więc

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = 0,$$

co oznacza, że f jest ciągła w punkcie x .

CBDO

Tw. Pochodna funkcji stałej: $f(x) = c$ jest równa 0:

$$\frac{dc}{dx} = 0 \quad (8)$$

Dow. Bowiem: $f(x+h) = c$, $f(x) = c$, co daje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

CBDO

Tw. Pochodna funkcji identycznościowej $f(x) = x$ jest równa 1:

$$\frac{dx}{dx} = 1. \quad (9)$$

Dow. Mamy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Tw. Mamy następujące wzory dotyczące różniczkowania sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych. Jeśli $f(x)$, $g(x)$ są różniczkowalne w punkcie x , to mamy

$$\frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\text{lub krócej } \boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}; \quad (10)$$

$$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \cdot f(x)$$

$$\text{lub } \boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)} \quad (11)$$

$$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) - \frac{dg(x)}{dx} \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

$$\text{lub } \boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}} \quad (12)$$

Dow. (10) (dla sumy):

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x); \end{aligned}$$

dla różnicy dowód jest analogiczny.

Dow. (11)

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x)) + (f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x). \end{aligned}$$

Dow. (12). Pokażemy najspierw:

$$\frac{d\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{dx} = -\frac{1}{g^2(x)} \frac{dg(x)}{dx}. \quad (13)$$

Mamy bowiem:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \\ &= -\frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{1}{g^2(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (14)$$

bo $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$; i ponadto, ponieważ $g(x) \neq 0$, to istnieje takie $\delta > 0$, że dla $|h| < \delta$ zachodzi $g(x+h) \neq 0$, tak więc wszystkie wyrażenia w (14) są dobrze określone.

Teraz (12) wynika z (11) oraz (13):

$$\left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}. \quad (15)$$

Wniosek. Podstawiając we wzorach (10) oraz (11): $f(x) = c$, otrzymamy:

$$(f(x) + c)' = f'(x), \quad (16)$$

$$(c \cdot f(x))' = cf'(x). \quad (17)$$

Wzór (16) mówi, że przesunięcie wykresu funkcji $f(x)$ wzdłuż osi OY nie ma wpływu na wartość kąta, tworzonego przez styczną z osiami (RYS.). Wzór natomiast (17) mówi, że jeżeli przeskalujemy wykres funkcji $y = f(x)$ c razy, to tyle samo razy zwiększy się tangens kąta nachylenia stycznej.

Tw.

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

Dow. Dowodzi się indukcyjnie. Dla $n = 0$ i $n = 1$ wzór ten jest prawdziwy – p. (8) i (9). Załóżmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla $n - 1$, i mamy dla n , z wykorzystaniem (11)

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = n \cdot x^{n-1}.$$

CBDO

Tw. $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

Dow. Weźmy teraz $n < 0$. Wtedy $-n > 0$. Mamy, z (14) i (18)

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}} \right)' = -\frac{1}{x^{-2n}} (x^{-n})' = n \cdot x^{-n-1} \cdot \frac{1}{x^{-2n}} = nx^{2n-n-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

CBDO

Uwaga. Wzór ten słuszny jest też dla dowolnych wykładników rzeczywistych, co udowodnimy nieco później.

Z pokazanych właśnie faktów wynika od razu

Tw. (wzór na pochodną wielomianu).

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

1.4 Intermezzo: 2 granice – uzupełnienie

Aby nie rozpraszać się na wątkach pobocznych, policzmy następujące granice teraz.

Tw.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (19)$$

Dow. Mamy, dla $x > 0$, następujące nierówności (p. RYS.) dla pól dwu trójkątów i wycinka koła:

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x,$$

skąd

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x;$$

pierwsza nierówność jest równoważna:

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

a druga:

$$\frac{\sin x}{x} > \cos x;$$

razem:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Biorąc granicę $\lim_{x \rightarrow 0}$ i korzystając z faktu (co był uprzednio pokazany) że $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, otrzymujemy (19).

Tw.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (20)$$

Bez dowodu.

1.5 Granice funkcji elementarnych – cd.

Tw. $(\sin x)' = \cos x$.

Dow.

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x\end{aligned}\quad (21)$$

Tw.

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Dow.

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{h} \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\sin x\end{aligned}\quad (22)$$

Po drodze korzystaliśmy z tożsamości:

$$\cos(x+h) - \cos x = -2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \quad (23)$$

Bo: Mamy:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Odejmując stronami, mamy

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Biorąc teraz: $\alpha - \beta = x$; $\alpha + \beta = x + h$, mamy, przez dodanie i odjęcie stronami:

$$\alpha = x + \frac{h}{2}, \quad \beta = \frac{h}{2}$$

więc dostajemy (23).

Tw.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dow.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Tw. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ i ogólniej $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$

Dow.

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right].$$

Podstawmy teraz $y = \frac{h}{x}$. Ponieważ $\lim_{h \rightarrow 0} y = 0$, to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Mamy: $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. Pamiętając, że logarytm jest funkcją ciągłą wszędzie w dziedzinie, a w szczególności dla wartości argumentu równej e , mamy

$$\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}} = \ln \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \ln e = 1,$$

zatem

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Drugą część twierdzenia otrzymamy z własności logarytmu:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

1.6 Pochodna funkcji odwrotnej

Niech będzie dana w przedziale $[a, b]$ funkcja różniczkowalna i różnowartościowa $y = f(x)$. Wiadomo, że istnieje wówczas funkcja odwrotna f^{-1} (którą oznaczmy tu g : $x = g(y)$), ciągła w przedziale $[f(a), f(b)]$ (lub $[f(b), f(a)]$ – zależnie od tego, czy f jest rosnąca czy malejąca). Pokażemy, że w tym przedziale funkcja g też jest różniczkowalna, a przy okazji wyprowadzimy wzór na pochodną funkcji odwrotnej. Mianowicie mamy

Tw. Jeśli $f(x) = y$ tzn. $x = g(y)$, to

$$g'(y) \equiv \frac{dg(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}. \quad (24)$$

przy założeniu że $f'(x) \neq 0$.

Dow. Przy zadanym x weźmy $k = f(x+h) - f(x)$. Mamy więc $f(x+h) = y+k$, tzn. $x+h = g(y+k)$, skąd $h = g(y+k) - g(y)$. Możemy więc traktować h jako funkcję k . Ze względu na ciągłość funkcji g , mamy $\lim_{k \rightarrow 0} h(k) = 0$, a

ponadto dla $k \neq 0$ mamy $h \neq 0$, ponieważ funkcja g jest różnowartościowa. Mamy więc:

$$g'(y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Przy drugiej równości powyżej korzystaliśmy z faktu, iż dla funkcji ciągłych $F(x)$, $G(y)$ mamy: Jeśli $y_0 = F(x_0)$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} G(F(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} G(y)$.

CBDO

Uwaga. Twierdzenie powyższe ma ilustrację/interpretację geometryczną. Rozpatrzmy krzywą daną równaniem $y = f(x)$. Poprowadźmy w jakimś punkcie (x_0, y_0) (tu $y_0 = f(x_0)$) styczną do tej krzywej iznaczmy przez α kąt utworzony przez styczną z osią OX , a przez β – kąt utworzony przez styczną z osią OY . Oczywiście $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Wówczas $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$ czyli $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ – zgodnie z wzorem (24).

Za pomocą powyższego twierdzenia policzymy pochodne kolejnych funkcji elementarnych.

Tw. $(e^x)' = e^x$ i, ogólniej, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Dow. Weźmy $y = f(x) = e^x$; wtedy $x = f^{-1}(y) \equiv g(y) = \ln y$. Mamy: $g'(y) = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{f'(x)}$, a ostatnia równość to właśnie $f'(x) = (e^x)' = e^x$.

W ogólniejszym przypadku $(a^x)'$, bierzemy $y = f(x) = a^x$, a dla funkcji odwrotnej $x = g(y) = \log_a y$. Pamiętamy, że $g'(y) = \frac{1}{y \ln a} = \frac{1}{f'(x)} \implies f'(x) = a^x \ln a$.

CBDO

Tw. a) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dow. a) Weźmy $y = f(x) = \arcsin x$ i wtedy $x = g(y) = \sin y$. Mamy: $g'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{f'(x)}$, (znak pierwiastka to plus, bo $x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$), a ostatnia równość to $f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Rozważania są analogiczne: $y = f(x) = \arccos x$, $x = g(y) = \cos y$; jedyna różnica jest w znaku, bo $g'(y) = -\sin y$ i dalej jak w a), z wynikiem końcowym $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

CBDO

Tw. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Dow. Dla $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$ jest $x = g(y) = \operatorname{tg} y$, $g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$; stąd $f'(x) = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

1.7 Ekstrema funkcji. Twierdzenie Rolle'a

Def. Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu a (tzn. w jakimś

przedziale otwartym, zawierającym a). Jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że

$$\forall_{h:|h|<\delta} : f(a+h) \leq f(a), \quad (25)$$

to mówimy, że funkcja $f(x)$ ma *maksimum* w punkcie a .

Jeśli zaś przy analogicznych założeniach mamy nierówność:

$$f(a+h) \geq f(a), \quad (26)$$

to mówimy, że funkcja $f(x)$ ma *minimum* w punkcie a .

Innymi słowy, w punkcie a występuje maksimum (minimum), jeśli istnieje takie otoczenie $\mathcal{U}$ punktu a , że $f(a)$ jest największą (najmniejszą) liczbą w zbiorze wartości, jakie funkcja f przyjmuje na $\mathcal{U}$.

Jeśli we wzorach (25) i (26) zastąpić znaki $\geq$ ($\leq$) przez $>$ ($<$), to mamy do czynienia z maksimum (minimum) *właściwym*.

Def. Maksima i minima obejmujemy wspólną nazwą *ekstremów* funkcji f .
Przykł.

1. Funkcja x^2 posiada minimum w punkcie $x = 0$;
2. funkcja $\cos x$ posiada maksima w punktach $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oraz minima w punktach $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. funkcja $|x|$ posiada minimum w $x = 0$.

Z pojęciem ekstremum ściśle jest związane (ale różne) pojęcie *kresów wartości funkcji na zbiorze*. Ekstrema są pojęciami *lokalnymi*: Aby stwierdzić, czy funkcja posiada ekstremum w danym punkcie a , wystarczy znać wartości funkcji w *dowolnie małym otoczeniu* punktu a . Natomiast wyznaczenie kresów zbioru wartości funkcji na zbiorze X wymaga znajomości funkcji na *całym* X .

Z definicji maksimum wynika natychmiast

Tw. Jeśli funkcja f określona w przedziale $[a, b]$ osiąga kres górny w punkcie c należącym do wnętrza tego przedziału (tzn. $a < c < b$), to funkcja posiada maksimum w c . (analogicznie dla kresu dolnego i minimum).

CBDO

Jeśli okaże się, że kres górny funkcji jest osiągany w jednym z końców przedziału $[a, b]$ (np. w a), to *nie mówimy*, iż w tym punkcie funkcja posiada maksimum, ponieważ funkcja nie jest określona w otoczeniu a . Np. funkcja $y = x$ na zbiorze $X = [0, 1]$ posiada kres górny równy 1; nie nazywamy go jednak maksimum.

Tw. . Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c i posiada w tym punkcie ekstremum, to $f'(c) = 0$.

Dow. Załóżmy, że f posiada w punkcie c maksimum (jeśli minimum, to rozumowanie jest analogiczne). Weźmy więc takie $\delta > 0$, aby dla dowolnego h takiego, że $|h| < \delta$, zachodziła nierówność $f(c+h) - f(c) \leq 0$. Dzieląc przez h , otrzymujemy

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{dla } h > 0, \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{dla } h < 0.$$

Ponieważ z założenia istnieje pochodna $f'(c)$, to

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c).$$

Z poprzednich nierówności wynika jednak, że $f'_+(c) \leq 0 \leq f'_-(c)$. Musi więc być

$$f'_+(c) = 0 = f'_-(c), \quad \text{co znaczy, że } f'(c) = 0.$$

CBDO

Uwaga. Twierdzenie odwrotne *nie zachodzi*: Równość $f'(c) = 0$ może być spełniona, mimo iż funkcja f nie posiada ekstremum w c . Jest tak np. dla funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x = 0$.

Def. Jeśli funkcja jest różniczkowalna w $x = a$ i $f'(a) = 0$, to punkt $x = a$ nazywamy *punktem krytycznym* funkcji f .

Uwaga. Istnienie ekstremum funkcji różniczkowalnej w punkcie c oznacza, że styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do osi OX (z możliwością, że się z tą osią pokrywa).

Tw. (Rolle'a). Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje takie c , że $a < c < b$ oraz $f'(c) = 0$.

Dow. Jeśli funkcja f jest stała, to $\forall_{x \in [a, b]} f'(x) = 0$. Można wtedy wziąć dowolny $x \in]a, b[$ i teza tw. Rolle'a będzie spełniona.

Założmy więc, że funkcja f nie jest stała; np. niech przyjmuje wartości większe od $f(a)$. Oznaczając przez M kres górny zbioru wartości funkcji na przedziale $[a, b]$, mamy: $M > f(a)$. Zatem, z tw. Weierstrassa, istnieje takie $c \in [a, b]$, że $f(c) = M$. Przy tym $a \neq c \neq b$, ponieważ z założenia $f(a) = f(b)$; zatem $a < c < b$. To znaczy, że funkcja f osiąga kres górny w punkcie c położonym wewnątrz przedziału $[a, b]$. Zgodnie z twierdzeniem niedawno udowodnionym funkcja f posiada w punkcie c *maksimum*, co z kolei implikuje (pamiętając o różniczkowalności f wewnątrz przedziału), że $f'(c) = 0$.

Rys. – ilustracja tw. Rolle’a.

Uwaga. Twierdzenie Rolle’a można tak sformułować: Jeśli $f(x) = f(x+h)$, to istnieje takie $\theta : 0 < \theta < 1$, że

$$f'(x + \theta h) = 0. \quad (27)$$

przy tych samych założeniach, tzn. funkcja f ma być różniczkowalna wewnątrz przedziału $[x, x+h]$ (lub $[x+h, x]$, jeśli $h < 0$; nie zakładamy tu, że $h > 0$ lecz jedynie że $h \neq 0$) i ciągła w x oraz $x+h$.

1.8 Twierdzenie Lagrange’a i Cauchy’ego

Tw. (Lagrange’a). Załóżmy (podobnie jak w tw. Rolle’a), że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Zachodzi wówczas wzór

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \theta h), \quad (28)$$

gdzie $h = b - a$ oraz $\theta \in]0, 1[$.

Uwaga. Wzór ten nazywany jest też wzorem Lagrange’a na wartość średnią, lub twierdzeniem o przyrostach skończonych.

Rys. – ilustracja tw. Lagrange’a.

Widać, że szczególnym przypadkiem (gdy $f(a) = f(b)$) jest tw. Rolle’a. Okazuje się, że dowód tw. Lagrange’a można sprowadzić do tw. Rolle’a.

Dow. Weźmy mianowicie funkcję

$$g(x) = f(a) - f(x) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (29)$$

i ponadto $g(x)$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w $]a, b[$; jej pochodna jest

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ponadto $g(b) = 0 = g(a)$, zatem $g(x)$ spełnia założenia tw. Rolle’a. Skoro tak, to pochodna $g'(x)$ znika w pewnym punkcie między a i b . Możemy to wypowiedzieć tak, że istnieje takie $\theta : 0 < \theta < 1$, że

$$g'(a + \theta h) = 0 \quad \text{tzn.} \quad 0 = -f'(a + \theta h) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

czyli zachodzi wzór z tezy tw. Lagrange’a.

Uwaga. W sposób podobny, jak wzór (27) przy tw. Rolle’a, można tezę tw. Lagrange’a sformułować jako:

Dla funkcji f różniczkowalnej wewnątrz przedziału $[x, x+h]$ i ciągłej na $[x, x+h]$ (to dla $h > 0$; dla $h < 0$ jest to przedział $[x+h, x]$) istnieje takie $\theta : 0 < \theta < 1$, że

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h) \cdot h. \quad (30)$$

Z tw. Lagrange’a wypływają dwa wnioski, bardzo ważne dla rachunku całkowego:

Tw. Jeśli $\forall_{x \in]a,b[}$ zachodzi $f'(x) = 0$, to funkcja w tym przedziale jest stała.

Dow. Na mocy udowodnionego dopiero co wzoru (30), mamy bowiem dla każdego x i h : $f(x) = f(x+h)$, co oznacza, że $f(x) = \text{const}$.

CBDO

Tw. Jeśli $\forall_{x \in]a,b[}$ zachodzi $f'(x) = g'(x)$, to $f(x) = g(x) + \text{const}$.

Dow. Mamy: $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$, czyli funkcja $f(x) - g(x)$ ma pochodną równą zeru. Na mocy dopiero co udowodnionego twierdzenia znaczy to, że $f(x) - g(x)$ jest stała, tzn. $f(x) = g(x) + \text{const}$.

CBDO

Tw. (Cauchy’ego; czasem z przydomkiem: O wartości średniej). Jeśli funkcje f i g są ciągłe na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalne wewnątrz oraz jeśli $\forall_{x \in]a,b[}$ jest $g'(x) \neq 0$, to istnieje takie $\theta \in]0, 1[$, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(a + \theta h)}{g'(a + \theta h)}, \quad (31)$$

gdzie $h = b - a$.

Przed dowodem

Uwaga. Twierdzenie Lagrange’a otrzymuje się z tw. Cauchy’ego, jeśli podstawić $g(x) = x$. Okazuje się, że także tw. Cauchy’ego wynika z tw. Lagrange’a, ale tu trzeba zaargumentować następująco:

Dow. Weźmy funkcję

$$G(x) = f(a) - f(x) + (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(mianownik $g(b) - g(a)$ jest różny od zera ze względu na założenie, że wszędzie w przedziale $]a, b[$ mamy $g'(x) \neq 0$ i tw. Rolle’a).

Funkcja $G(x)$ spełnia założenia tw. Rolle’a: Jest różniczkowalna i ciągła jak trzeba, oraz $G(a) = 0 = G(b)$. Pochodna funkcji $G(x)$ jest

$$G'(x) = -f'(x) + g'(x) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}; \quad (32)$$

zatem (z tw. Rolle'a) istnieje takie $x \in]a, b[$, (tzn. $x = a + \theta h$, $\theta \in]0, 1[$, gdzie $h = b - a$) że $G'(a + \theta h) = 0$. Podstawiając $x = a + \theta h$ we wzorze (32), otrzymujemy (31).

Analogicznie do sposobu, w jaki tw. Rolle'a i Lagrange'a były wyrażane wzorami (27) i (30), można tw. Cauchy'ego sformułować tak: Istnieje $\theta \in]0, 1[$ takie, że

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)}. \quad (33)$$

Uwaga: W powyższym wzorze θ jest TO SAMO w liczniku i mianowniku.

1.9 Różniczkowanie funkcji złożonych

Niech $y = f(x)$, $z = g(y)$, przy tym funkcja g jest określona na zbiorze wartości funkcji f ; ponadto niech f i g będą różniczkowalne, a pochodna g' niech będzie ciągła. Następujący wzór wyraża pochodną funkcji złożonej $g(f(x))$ przez pochodne f' i g' .

Tw.

$$(g(f(x)))' = f'(x) \cdot g'(f(x)), \quad \text{tzn.} \quad \frac{d(g(f(x)))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \left[\frac{dg(y)}{dy} \right]_{y=f(x)}. \quad (34)$$

Dow. Przy danych x i $h \neq 0$ weźmy $k = f(x+h) - f(x)$, tzn. $f(x+h) = y+k$.

Zastosujmy teraz wzór Lagrange'a na wartość średnią w wersji (30) do funkcji g ; otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \frac{g(y+k) - g(y)}{h} = g'(y + \theta k) \cdot \frac{k}{h} \\ &= g'(y + \theta k) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

dla pewnego $\theta \in]0, 1[$ (pamiętajmy, że θ jest pewną funkcją h). Co stanie się z powyższym wyrażeniem, gdy weźmiemy jego granicę przy $h \rightarrow 0$? Otóż ze względu na ciągłość funkcji g , mamy $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$, a ponieważ $0 < \theta < 1$, to również $\lim_{h \rightarrow 0} \theta k = 0$. Skoro tak, to $\lim_{h \rightarrow 0} (y + \theta k) = y$, co – w połączeniu z ciągłością funkcji g' – daje

$$\lim_{h \rightarrow 0} g'(y + \theta k) = g'(y) = g'(f(x)).$$

Mamy więc:

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} g'(y + \theta h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Przykł.

- $(\sin^2 x)'$ na dwa sposoby
- $(e^{-x^2})'$
- $(e^{\sin x})'$
- $(\ln(\operatorname{tg} \frac{x}{2}))'$

Przykł. Udowodnimy teraz anonsowany wcześniej wzór

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}.$$

Dow. Napiszmy x^a w postaci: $x^a = e^{a \ln x}$ i ze wzoru na pochodną funkcji złożonej

$$\begin{aligned} (x^a)' &= (e^{a \ln x})' = \frac{de^{a \ln x}}{dx} = \frac{da \ln x}{dx} \cdot \frac{de^y}{dy} \Big|_{y=a \ln x} \\ &= a \frac{1}{x} e^y \Big|_{y=a \ln x} = ax^{-1} x^a = ax^{a-1} \end{aligned}$$

CBDO

Niejednokrotnie trzeba kilkakrotnie zastosować twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej. Mamy np. pochodną funkcji trzykrotnie złożonej:

$$h(g(f(x)))' = f'(x) \cdot g'(f(x)) \cdot h'(g(f(x)))$$

Sztuczka mnemotechniczna: Wzór powyższy można zapamiętać np. w następujący sposób: Oznaczmy: $y = f(x)$, $z = g(y)$, $w = h(z)$, oraz $W(x) = h(g(f(x)))$. Można wtedy napisać

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

pamiętając, w jakich punktach są liczone wszystkie pochodne.

W powyższym wzorze pochodne zachowują się jak *ułamki*. Ale UWAGA! Jest to zbieżność przypadkowa; inne pochodne (zwł. cząstkowe) już się tak nie zachowują!

Uwaga – wzór na pochodną funkcji odwrotnej z wzoru na pochodną funkcji złożonej

1.10 Związek między znakiem pochodnej a monotonicznością funkcji

Z tw. Lagrange'a wynika następujący związek pomiędzy znakiem pochodnej a tym, czy funkcja rośnie, czy maleje.

Tw. * Jeśli $\forall_{x \in [a, b]}$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$, to funkcja f jest w tym przedziale ściśle rosnąca. Jeśli mamy $f'(x) < 0$, to funkcja f jest ściśle malejąca.

Dow. Z wzoru (30) mamy, dla $h > 0$: $f(x + h) > f(x)$ jeśli w przedziale $[x, x + h]$ pochodna jest stale dodatnia, bądź $f(x + h) < f(x)$, jeśli pochodna jest stale ujemna. Czyli funkcja jest ściśle rosnąca w pierwszym przypadku, a ściśle malejąca w drugim.

CBDO

Uwaga. Jeśli założyć, że zachodzi nierówność nieostra $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), to w tezie mamy, że funkcja jest rosnąca (malejąca).

Zachodzi również twierdzenie odwrotne do powyższego:

Tw. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c i rośnie (maleje) w jakimś przedziale $]a, b[$ zawierającym ten punkt, to $f'(c) \geq 0$ (odpowiednio $f'(c) \leq 0$).

Dow. Jeśli f rośnie, to dla $h > 0$ mamy

$$f(c + h) - f(c) \geq 0 \implies \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

i przechodząc do granicy $\lim_{h \rightarrow 0}$ otrzymujemy $f'(c) \geq 0$.

Jeśli funkcja f maleje, to rozumowanie jest analogiczne.

CBDO

Z tw. * wynika

Tw. Jeśli $f'(c) > 0$ i pochodna $f'(x)$ jest ciągła w punkcie c , to funkcja f jest ściśle rosnąca w pewnym otoczeniu punktu c .

Analogicznie: Jeśli $f'(c) < 0$ i pochodna $f'(x)$ jest ciągła w punkcie c , to funkcja f jest ściśle malejąca w pewnym otoczeniu punktu c .

Dow. Ponieważ funkcja $f'(x)$ jest ciągła w c , to nierówność $f'(c) > 0$ mówi, że w pewnym otoczeniu punktu c funkcja $f'(x)$ jest dodatnia: $\exists_{\delta > 0} : \forall_{h < \delta} : f'(c + h) > 0$. Znaczy to, że pochodna f' jest dodatnia $\forall_x : c - h < x < c + h$. Na mocy Tw. *, funkcja f jest rosnąca w tym przedziale.

CBDO

Uwaga. Powyższe twierdzenie można przeformułować w następujący sposób:

i) Jeśli $f'(c) \neq 0$, to (przy założeniu ciągłości pochodnej) funkcja f jest różnowartościowa w pewnym otoczeniu punktu c , tzn. dla $]c-\delta, c+\delta[$ ($\delta > 0$). Skoro tak, to funkcja f posiada w tym przedziale funkcję odwrotną $x = g(y)$, czyli równanie: $y = f(x)$ posiada w tym przedziale dokładnie jedno rozwiązanie..

ii) Jak wiemy, pochodna tejże funkcji odwrotnej $g'(y)$ jest odwrotnością pochodnej funkcji $f'(x)$.

iii) Powyższe fakty: Przy założeniu $f'(c) \neq 0$ istnieje w otoczeniu punktu $f(c)$ funkcja odwrotna, lub że równanie: $y = f(x)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie o otoczeniu punktu c – przenoszą się na wyższe wymiary, tzn. zachodzą dla odwzorowań $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Oczywiście konieczne jest stosowne uogólnienie pojęć. Będzie o tym mowa w semestrze II.

1.11 Wyrażenia nieoznaczone i reguła de l'Hospitala

Często zdarza się konieczność obliczania granic postaci następującej:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{gdzie } f(a) = 0 = g(a). \quad (35)$$

Wyrażenia tego rodzaju noszą nazwę *wyrażeń nieoznaczonych typu $\frac{0}{0}$* .

Tw. Jeśli funkcje f i g są ciągłe w przedziale domkniętym $[a, b]$ i są różniczkowalne wewnątrz tego przedziału i jeśli $f(a) = 0 = g(a)$, to

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (36)$$

przy założeniu, że ta ostatnia granica istnieje.

Dow. Kluczem do dowodu jest twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej (2 strony wcześniej).

Oznaczmy: $x = a + h$. Należy dowieść, że

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h)}{g(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f'(x+h)}{g'(x+h)}. \quad (37)$$

Ale: Równości: $f(a) = 0 = g(a)$ i wzór Cauchy'ego (31) dają:

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

dla pewnego $\theta \in]0, 1[$.

Oznaczmy $F(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Z założenia $\lim_{h \rightarrow 0+} F(a+h)$ istnieje. Ponieważ zaś $\lim_{h \rightarrow 0+} h = 0$, to też $\lim_{\theta h \rightarrow 0+} \theta h = 0$ i, co za tym idzie, $\lim_{h \rightarrow 0+} F(a+\theta h)$ też istnieje

i jest równe $\lim_{h \rightarrow 0_+} F(a+h)$; mamy więc

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f'(x+h)}{g'(x+h)}$$

skąd otrzymujemy wzór (36).

CBDO

Analogiczne twierdzenie mamy w przypadku granicy lewostronnej.

W przypadku, gdy pochodne f' i g' są ciągłe w punkcie a , a ponadto $g'(a) \neq 0$, ze wzoru (36) (plus jego odpowiednika dla granicy lewostronnej) natychmiast wynika *wzór de l'Hospitala*:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (38)$$

Uwaga: Po prawej stronie powyższego wzoru nie ma granicy!

Analogiczne wzory mamy w przypadku granic jednostronnych i pochodnych jednostronnych.

Przykł.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Uwaga. Jeśli zdarzy się, że po prawej stronie wyrażenia (38) mamy $f'(a) = g'(a) = 0$, to tegoż wzoru *nie daje* się stosować. Ale można postępować rekurencyjnie! tzn. badać wyższe pochodne.

Uwaga. Powyższe twierdzenia dotyczyły wyrażeń typu $\frac{0}{0}$. Przez sztuczki z zamianą zmiennych i inne, można też liczyć inne wyrażenia nieoznaczone: $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0 .