# 1 Całki krzywoliniowe

Dotąd całkowaliśmy po $n-$ wymiarowych podzbiorach $\mathbb{R}^n$ – w praktyce, po dwuwymiarowych podzbiorach $\mathbb{R}^2$ oraz trójwymiarowych podzbiorach $\mathbb{R}^3$. Zapotrzebowanie ze strony fizyki, a także matematyki stymulowało modyfikację i rozszerzenie dotąd używanych pojęć tak, aby móc całkować także po innych obiektach – po *powierzchniach* w $\mathbb{R}^n$. Pozostając na razie na intuicyjnym poziomie (dokładniejsze definicje podamy później), będziemy mieli do czynienia z całkowaniem po *krzywych* (zbiorach jednowymiarowych) w $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, oraz powierzchniach dwuwymiarowych w $\mathbb{R}^3$. Zanim jednak przejdziemy do całkowania, przypomnimy, rozszerzymy znane oraz podamy nowe pojęcia dotyczące krzywych i powierzchni: wektorów stycznych i normalnych oraz prostych i płaszczyzn stycznych i normalnych.

## 1.1 Krzywe płaskie – podstawy opisu

**Def.** *Krzywą płaską* nazywamy odwzorowanie $\gamma : \mathbb{R} \ni [a,b] \to \mathbb{R}^2$ klasy $C^1$. ??? Plus jeszcze jakieś warunki ???

*Uwaga.* Czasem tę postać krzywej nazywamy *krzywą sparametryzowaną*. (Inne postaci, które – być może – Czytelnik pamięta: $y = f(x)$ – postać nieuwikłana; $F(x,y) = 0$ – postać uwikłana).

Często trzeba krzywą $\gamma$ zapisać w składowych:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{cases}$$

*Przykł.* Okrąg; elipsa; liść Kartezjusza; cykloida.

**Def.** *Wektorem stycznym* $\vec{v}$ do krzywej $\gamma(t)$ nazywamy *pochodną* odwzorowania $\gamma$:

$$\vec{v} = \dot{\gamma}(t) \equiv \frac{\mathsf{d}\gamma(t)}{\mathsf{d}t} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

**RYS.** *Interpretacja fizyczna*: Jeśli $s(t)$ jest trajektorią punktu materialnego w $\mathbb{R}^3$, to pochodna $s(t)$ jest *prędkością* punktu.

Z wzoru (1 widać, że długość wektora stycznego wynosi

$$|| \vec{v} || = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Łatwo znaleźć też kąty, jakie tworzy styczny wektor z osiami układu współrzędnych: Oznaczając przez $\alpha$ kąt tworzony przez $\vec{v}$ z osią $x$, zaś przez $\beta$ – z osią $y$, mamy

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

Tu pominiemy szereg interesujących wielkości geometrycznych takich jak płaszczyzna normalna, krzywizna i skręcenie krzywej, trójścian Freneta.

## 1.2 Długość krzywej

Niech będzie dana na płaszczyźnie krzywa $\gamma$ pomiędzy punktami $A$ i $B$, zadana parametrycznie równaniami

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad \text{gdzie} \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{2}$$

(mamy więc $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$). **RYS.**

Podzielmy przedział $[a, b]$ punktami: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ na $n$ dowolnych części. Oznaczmy przez $\delta_n$ średnicę podziału, tzn. największą z różnic $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, \dots, n)$. Będziemy rozpatrywać takie podziały, że $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Niech punktom podziału odcinka $[a, b]$ odpowiadają na krzywej punkty $A \equiv A_0 = \gamma(a)$, $A_1 = \gamma(t_1)$, $\dots, A_n = \gamma(b) \equiv B$. Łamaną $AA_1 \dots A_{n-1}B$ nazywamy *łamaną wpisaną w krzywą*, a punkty $A, A_1, \dots, A_{n-1}, B$ – jej *wierzchołkami*. Oznaczmy przez $d_n$ długość łamanej, tzn. sumę długości odcinków tworzących tę łamaną

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} |A_{i-1}A_i| \tag{3}$$

**Def.** Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} d_n$ oraz jeśli granica ta nie zależy od podziału, to krzywą $AB$ nazywamy *krzywą prostowalną*, a granicę $d = \lim_{n\to\infty} d_n$ nazywamy *długością* krzywej $\gamma$.

Analogicznie definiujemy długość krzywej przestrzennej, zadanej równaniami

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad , z = z(t), \quad \text{gdzie} \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{4}$$

*Uwaga.* Nie każda krzywa jest prostowalna; ale z takimi raczej się w fizyce nie spotkamy.

**Def.** Krzywą sparametryzowaną (2) czy (4) nazywamy *łukiem zwykłym* (lub *łukiem Jordana*), jeśli nie ma punktów wielokrotnych, tzn jeśli różnym wartościom parametru $t$ odpowiadają różne punkty na krzywej. **RYS.**

**Def.** Łuk zwykły nazywamy *regularnym*, jeśli funkcje $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ występujące w (2) bądź (4) mają ciągłe pochodne i spełniają $x'^2 + y'^2 > 0$ $(d = 2)$, bądź $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$ $(d = 3)$

**Def.** Krzywą sparametryzowaną (2) czy (4) nazywamy *krzywą regularną*, jeśli daje się podzielić na skończoną ilość części będących łukami regularnymi.

*Uwaga.* Może się zdarzyć, że krzywa nieregularna nie ma w jakichś punktach stycznej; ma jednak styczną lewo- i prawostronną.

Wykażemy teraz, że

**Tw.** Jeżeli krzywa 2) jest łukiem regularnym, to jest prostowalna i jej długość $d$ wyraża się wzorem

$$d = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} \mathrm{d}t \tag{5}$$

**Dow.** (Zasadniczo polega na zsumowaniu długości kawałeczków łamanej, korzystając z tw. Pitagorasa **RYS.** i następnie uzasadnieniu że przy przechodzeniu do coraz drobniejszych podziałów, długość dąży do (5).

Długość łamanej jest równa

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

gdzie $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$. Z twierdzenia o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej (sem. I) mamy

$$x_i - x_{i-1} = x'(\theta_i)\Delta t_i, \qquad y_i - y_{i-1} = y'(\tilde{\theta}_i)\Delta t_i$$

gdzie $\theta_i$ oraz $\tilde{\theta}_i$ należą do przedziału $t_{i-1}, t_i]$, tak więc

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(\theta_i)]^2 + [y'(\tilde{\theta}_i)]^2} \Delta t_i.$$

Zastąpmy w powyższej sumie $\tilde{\theta}_i$ przez $\theta_i$. Otrzymamy naówczas sumę przybliżoną dla całki (5):

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(\theta_i)]^2 + [y'(\tilde{\theta}_i)]^2} \Delta t_i;$$

gdy $n \to \infty$, to $\delta_n \to 0$ oraz $\underline{S}_n \to d$. Do tej samej granicy dąży też ciąg $\{d_n\}$ , gdyż sumy $d_n$ i $\underline{S}_n$ różnią się dowolnie mało, gdy średnica $\delta_n$ jest dostatecznie mała; jest tak, gdyż pochodna $y'(t)$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $[a, b]$. Wobec tego, długość łamanej $d_n$ dąży do całki (5).

**CBDO**

Gdy krzywa (2) jest krzywą regularną, to powyższe twierdzenie i wzór (5) pozostają prawdziwe, gdyż daną krzywą można podzielić na skończoną ilość łuków regularnych.

*Wniosek.* Krzywa $y = f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$ oraz funkcja $f$ jest klasy $C^1$ na $[a, b]$, jest prostowalna i jej długość wynosi

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \tag{6}$$

**Dow.** Wynika to natychmiast z powyższego twierdzenia, bowiem krzywą $y = f(x)$ można przedstawić równaniami parametrycznymi $x = t$, $y = f(t)$, gdzie $t \in [a, b]$.

**CBDO**

**Tw.** Jeżeli krzywa w trzech wymiarach: (4) jest regularna, to jej długość wyraża się wzorem

$$d = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \mathsf{d}t \tag{7}$$

**Dow.** jest analogiczny jak w przypadku krzywych płaskich.

**CBDO**

*Przykł.* Długość cykloidy; dł. łuku elipsy.

## 1.3 Całki krzywoliniowe nieskierowane

Niech krzywa $\gamma$, zadana równaniem (2), będzie *łukiem regularnym*; tak więc – jak to zobaczyliśmy przed chwilą – ma określoną długość $d$. Na krzywej $\gamma$ niech będzie określona funkcja $f(x, y)$. Podzielmy przedział $[a, b]$ punktami $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ na $n$ części. O tym podziale zakładamy (jak zwykle), że jego średnica $\delta_n$ dąży do 0, gdy $n \to \infty$. Oznaczmy przez $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ długości łuków częściowych, tzn.

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \mathsf{d}t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

a przez $f(A_i)$ – wartość funkcji $f(x, y)$ w dowolnym punkcie $A_i = (x_i, y_i)$ łuku $\Delta s_i$. Utwórzmy teraz sumę:

$$\kappa_n = \sum_{i=1}^{n} f(A_i) \Delta s_i. \tag{9}$$

**Def.** Jeżeli istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} \kappa_n$, przy czym granica ta nie zależy od wyboru punktów podziału $t_i$ oraz punktów $A_i$ na łukach $\Delta s_i$, to granicę tę oznaczamy jako

$$\int_\gamma f(x, y) \mathsf{d}s \tag{10}$$

i nazywamy *całką krzywoliniową nieskierowaną* funkcji $f(x, y)$ po krzywej $\gamma$.

Wykażemy, że:

**Tw.** Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła na krzywej $\gamma$, to całka (**??**) istnieje i jest równa zwykłej całce z funkcji jednej zmiennej

$$\int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathsf{d}t. \tag{11}$$

**Dow.** W sumie (**??**) niech punkt $A_i$ ma współrzędne $x(\theta_i), y(\theta_i)$, gdzie $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Oznaczając $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ możemy, wykorzystując tw. o wartości średniej, wyrazić całkę (8) wzorem

$$\Delta s_i = \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2}\Delta t_i, \qquad u_i \in [t_{i-1}, t_i],$$

więc

$$\kappa_n = \sum_{i=1}^{n} f(x(\theta_i), y(\theta_i))\sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2}\Delta t_i.$$

Gdy $n$ jest dostatecznie duże, to suma ta różni się dowolnie mało od sum wypunktowanych dla całki (11); tak więc sumy (9) dążą do całki (11.

**CBDO**

*Przykł.*

1. Długość łuku krzywej dana jest przez całkę (11), gdy $f(x, y) \equiv 1$.
2. Masa łuku o ciągłym rozkładzie gęstości
3. Potencjał pochodzący od rozkładu ładunku na krzywej

## 1.4 Całki krzywoliniowe skierowane

### 1.4.1 Definicja

Rozważmy krzywą $\gamma$ daną przez (2); niech na tej krzywej będą określone dwie funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$. Jak uprzednio, podzielmy przedział $[a, b]$ punktami: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ na $n$ dowolnych części. Oznaczmy przez $\delta_n$ średnicę podziału, tzn. największą z różnic $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Będziemy rozpatrywać takie podziały, że $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. W każdym z przedziałów $[t_{i-1}, t_i]$ wybierzmy dowolny punkt $\theta_i$. Utwórzmy sumę:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} [P(x(\theta_i), y(\theta_i))(x(t_i) - x(t_{i-1})) + Q(x(\theta_i), y(\theta_i))(y(t_i) - y(t_{i-1}))] \tag{12}$$

**RYS.** Niech teraz $n \to \infty$. (Mamy wtedy $\delta_n \to 0$).

**Def.** Jeśli dla $n \to \infty$ sumy w (**??**) dążą do granicy niezależnej od wyboru punktów $t_i$ oraz $\theta_i$, to granicę tę oznaczamy przez

$$\int_\gamma P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y \equiv \int_\gamma P(x, y)\mathsf{d}x + Q(x, y)\mathsf{d}y \tag{13}$$

i nazywamy *całką krzywoliniową*[1] z jednoformy $P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y$ po krzywej $\gamma$.

[1] W jęz. niemieckim nazywa się ona *Kurvenintegral*

Analogicznie, jeśli mamy krzywą $\gamma$ w trzech wymiarach, daną przez (4), oraz trzy funkcje: $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ określone na krzywej $\gamma$, to definiujemy całkę krzywoliniową

$$\int_\gamma P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y + R\mathsf{d}z \equiv \int_\gamma P(x,y,z)\mathsf{d}x + Q(x,y,z)\mathsf{d}y + R(x,y,z)\mathsf{d}z \tag{14}$$

Takie całki z jednoform pojawiają się w sposób naturalny w różnych problemach z fizyki (i matematyki).

### 1.4.2 Zamiana całki krzywoliniowej na całkę zwykłą

Całkę krzywoliniową skierowaną można zamienić na całkę zwykłą w następujący sposób.

**Tw.** Niech $P(x,y)$ będzie funkcjąciągłą na krzywej $\gamma$ danej równaniem

$$y = y(x), \qquad \text{dla} a \leqslant x \leqslant .b.$$

Wówczas pierwsza z całek (13) istnieje i jest równa całce zwykłej

$$\int_\gamma P(x,y)\mathsf{d}x = \int_a^b P(x,y(x))\mathsf{d}x. \tag{15}$$

**Dow.** W takiej sytuacji suma (12) definiująca całkę (13) sprowadza się do sumy $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, y(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$, gdzie $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ oraz $x_{i-1} \leqslant \xi_i < x_i$, tak więc suma (12) jest sumą przybliżoną dla całki po prawej stronie równości (15); całka ta zaś istnieje, bo funkcja podcałkowa jest ciągła.

**CBDO**

**Tw.** Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciągłe na łuku regularnym $\gamma$ , to całka (13) istnieje i jest równa całce oznaczonej

$$\int_\gamma P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y = \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathsf{d}t. \tag{16}$$

**Dow.** Sumę przybliżoną (12) można zapisać w postaci

$$s_n = \sum_{i=1}^n [P(x(\theta_i), y(\theta(i)]x'(u_i) + Q(x(\theta_i), y(\theta(i)]y'(v_i)]\Delta t_i,$$

gdzie $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, zaś $u_i, v_i$ są punktami przedziału $[t_{i-1}, t_i]$,– do różnic $x(t_i) - x(t_{i-1})$, $y(t_i) - y(t_{i-s})$ można zastosować tw. o wartości średniej. Całka po prawej stronie równości (16) istnieje (bo funkcja podcałkowa jest ciągła) i jest granicą ciągu sum wypunktowanych $\{\sigma_n\}$, gdzie

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n [P(x(\theta_i), y(\theta(i)]x'(\theta_i) + Q(x(\theta_i), y(\theta(i)]y'(\theta_i)]\Delta t_i,$$

Dalej: Różnice $|x'(\theta_i) - x'(u_i)|$ oraz $|y'(\theta_i) - y'(v_i)$ są dowolnie małe przy dostatecznie dużym $n$, co wynika z *jednostajnej* ciągłości pochodnych $x'(t)$, $y'(t)$. A stąd wynika, że umy $s_n$ i $\sigma_n$ różnią się dowolnie mało przy dostatecznie dużych $n$,

### 1.4.3 Kanoniczny przykład skierowanej całki krzywoliniowej: Praca w polu sił.

Załóżmy, że mamy w przestrzeni pole wektorowe sił: $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Załóżmy, że przesuwamy w polu sił po krzywej $\gamma$ punkt materialny. Przesuwamy od p. A do p. B, co odpowiada zmianie parametru $t$ od $t_A \equiv a$ do $t_B \equiv b$ Naówczas praca wykonana jest równa: $W = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathsf{d}\vec{s}$, co można też zapisać jako: $W = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{v} \frac{1}{||\vec{v}||} \mathsf{d}l$, gdzie $\vec{v}$ jest wektorem stycznym do $\gamma$. W tej ostatniej postaci wyrażenie podcałkowe to: $\frac{1}{||\vec{v}||}(F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z)$. Weźmy jakiś wyraz z tej sumy, np. $F_x v_x$; mamy: $F_x \mathsf{d}x = F_x \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}l} \mathsf{d}l = F_x \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} \mathsf{d}l = F_x \cos(x, v) \mathsf{d}l$, (co można symbolicznie zapisać jako $\mathsf{d}x = \cos(x, v)\mathsf{d}l$). Tak więc $F_x v_x \mathsf{d}l = F_x \mathsf{d}x$, i razem: $W = \int_a^b F_x \mathsf{d}x + F_y \mathsf{d}y + F_z \mathsf{d}z$, czyli praca jest dokładnie całką postaci (14).

Może się pojawić pytanie: Skoro całkę (14) można zapisać w postaci (10), to może te całki są *tym samym*? Otóż, jako pojęcia – *nie są* tym samym: Okazuje się, że całka nieskierowana (10) *nie zależy* od kierunku, w jakim przebiegamy krzywą $\gamma$, natomiast całka skierowana (14) *zmienia znak*, gdy zmieni się kierunek przebiegu krzywej.

**Przykł.**

**Morał.** Całki nieskierowane zachowują się jak długość krzywej – nie zależy ona od tego, czy liczy się ją od początku do końca, czy od końca do początku. Z pracą jest inaczej: Gdy wnosimy ciężar na górę, to wykonujemy pracę *dodatnią*, a gdy znosimy go na dół – to pracę *ujemną*.

## 1.5 Twierdzenie Greena na płaszczyźnie

### 1.5.1 Krzywe zamknięte. Obszary jedno- i wielospójne. Orientacja brzegu

**Def.** Krzywą sparametryzowaną (2) lub (4) nazywamy *zamkniętą*, jeśli jej początek pokrywa się z końcem. Jeśli ponadto punkty krzywej znajdują się we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z punktami odcinka parametryzującego krzywą, to mówimy, że taka krzywa nazywa się *krzywą Jordana*.

**Tw.** Krzywa Jordana na płaszczyźnie dzieli płaszczyznę na dwa obszary: jeden jest ograniczony (nazywa się go *wnętrzem* krzywej), a drugi – nieograniczony – jest *zewnętrzem* krzywej.

(bez dowodu. Twierdzenie wydaje się oczywiste, ale dowód nie jest trywialny!)

**Def.** Obszar płaski ograniczony jedną krzywą Jordana nazywamy *jednospójnym*, obszar zaś ograniczony $n$ nie przecinającymi się krzywymi Jordana nazywamy $n-$spójnym. **RYS.**

Okaże się pożyteczne pewne uogólnienie powyższego pojęcia: Za obszary jedno/ wielospójne będziemy też uważać takie, dla których pewne krzywe brzegowe redukują się do łuków zwykłych lub punktów.

**Def.** Niech $D$ będzie obszarem płaskim ograniczonym jedną lub kilkoma krzywymi Jordana. Mówimy, że brzeg $D$ (ozn. $\partial D$) jest *zorientowany dodatnio* (względem obszaru $D$), jeśli w czasie obiegu po krzywej $\partial D$ w danym kierunku (jednym z dwu możliwych) mamy obszar $D$ po *lewej* stronie. **RYS.**

## 1.6 Twierdzenie Greena

Rozważmy całkę (13) po krzywej *zamkniętej*. Okazuje się, że można ją zamienić na mocy następującego *twierdzenia Greena*:

**Tw.** (Greena). Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciągłe wraz z pochodnymi $P_y$ oraz $Q_x$ wewnątrz i na brzegu obszaru normalnego $D$, przy czym brzeg $\partial D$ obszaru $D$ jest zorientowany dodatnio, to zachodzi równość:

$$\int_\gamma P(x,y)\mathsf{d}x + Q(x,y)\mathsf{d}y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathsf{d}x\mathsf{d}y \tag{17}$$

**Dow.** Jeśli pokażemy, że

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y = -\int_\gamma P(x,y)\mathsf{d}x, \qquad \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_\gamma Q(x,y)\mathsf{d}y, \tag{18}$$

to twierdzenie będzie udowodnione, bo dodając powyższe równości stronami, dostaniemy (17).

Obszar $D$, jako normalny względem osi $x$, da się zdefiniować przez nierówności:

$$D: \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

gdzie funkcja $y = y_1(x)$ definiuje pewien łuk $AMB$, funkcja $y = y_2(x)$ definiuje pewien łuk $ANB$ oraz $\partial D = AMB \cup BNA$ (**RYS.**; pisząc kolejność literek w definicji łuku, zdefiniowaliśmy tym samym orientację $\partial D$). Zamieniając całkę podwójną na iterowaną i uwzględniając (15), otrzymamy

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_a^b \mathsf{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathsf{d}y$$

$$= \int_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]\mathsf{d}x = \int_{ANB} P(x,y)\mathsf{d}x - \int_{AMB} P(x,y)\mathsf{d}x$$
$$= -\int_{AMB} P(x,y)\mathsf{d}x - \int_{BNA} P(x,y)\mathsf{d}x = -\int_\gamma P(x,y)\mathsf{d}x.$$

Dla drugiej całki dowód jest analogiczny: Obszar $D$ można określić nierównościami:

$$c \leqslant y \leqslant d, \quad x_1(y) \leqslant y \leqslant x_2(y),$$

gdzie funkcja $x = x_1(y)$ definiuje łuk $MAN$, zaś $x = x_2(y)$ – łuk $MBN$ **RYS.**; tak więc

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_c^d \mathsf{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathsf{d}x$$

$$= \int_c^d [Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)]\mathsf{d}y = \int_{MBN} Q(x,y)\mathsf{d}y - \int_{MAN} Q(x,y)\mathsf{d}y$$
$$= \int_{MBN} Q(x,y)\mathsf{d}y + \int_{NAM} Q(x,y)\mathsf{d}y = \int_\gamma Q(x,y)\mathsf{d}y.$$

**CBDO**

**Obszary wielospójne**

## 1.7 Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania

Weźmy dwa punkty $A$ i $B$ na płaszczyźnie. Rozpatrzmy całkę krzywoliniową skierowaną

$$I_{AB} = \int_\gamma P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y \equiv \int\limits_{A}^{B} P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y \tag{19}$$

po krzywej $\gamma$. (W wyrażeniu końcowym jawniej zaznaczyliśmy, że droga całkowania jest skierowana od $A$ do $B$; symbol $\int$ jest niestandardowy i został przyjęty na użytek niniejszego podrozdziału). Całka ta na ogół zależy od krzywej $\gamma$, po której się całkuje. Czasem jednak okazuje się, że $I_{AB}$ skierowana *nie zależy* od drogi całkowania. (Jako przykład: Być może Czytelnik miał do czynienia w fizyce z sytuacją pracy w polu tzw. *sił potencjalnych*): Jeśli pole sił jest potencjalne, to praca nie zależy od drogi, a jedynie od punktu początkowego i końcowego). Poniższe twierdzenie mówi, kiedy całka krzywoliniowa nie zależy od drogi całkowania.

**Tw.** Niech funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ będą ciągłe wraz z pochodnymi $P_y$ oraz $Q_x$ w obszarze jednospójnym $D$. Rozważmy całkę (19) po krzywej $\gamma$ zawartej w $D$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby całka (19) nie zależała od drogi całkowania $\gamma$ jest, aby w całym obszarze $D$ spełniony był warunek

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{20}$$

**Dow.** • Warunek (20) jest *konieczny*: Załóżmy, że całka (19) nie zależy od drogi. Niech punkt $A$ będzie ustalony, a zmieniajmy punkt $B \equiv (x_B, y_B)$. Wówczas całka (19) będzie pewną funkcją współrzędnych $x_B, y_B$ punktu $B$; oznaczmy tę funkcję jako $F(x_B, y_B)$:

$$F(x_B, y_B) = \int\limits_{A}^{B} P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y = \int\limits_{A}^{(x_B,y_B)} P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y \tag{21}$$

Niech $C = (x_B + h, y_B)$ będzie punktem obszaru $D$. **RYS.** Wówczas

$$F(x_B + h, y_B) = \int\limits_{A}^{B} + \int\limits_{B}^{C} = F(x_B, y_B) + \int\limits_{(x_B,y_B)}^{(x_B+h,y_B)} P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y \tag{22}$$

Gdy $h$ jest dostatecznie małe, odcinek $BC$ należy do obszaru $D$; można więc całkować po nim. $BC$ jest *poziomy*, tzn. na nim współrzędna $y$ jest stała, więc ostatnia całka redukuje się do zwykłej całki $\int P_{x_B}^{x_B+h}\mathsf{d}x$, a ona, w myśl tw. o wartości średniej dla całek gdzieś z początku drugiego semestru redukuje się do $P(x_B + \theta h, y_B)$ dla pewnego $0 < \theta < 1$; stąd mamy

$$\frac{F(x_B + h, y_B) - F(x_B, y_B)}{h} = P(x_B + \theta h, y_B), \qquad \text{gdzie} \qquad 0 < \theta < 1.$$

Wynika stąd, że $F_x = P$, gdy $h \to 0$. Argumentując analogicznie otrzymujemy bliźniaczą równość $F_y = Q$. Zatem funkcja $F$ określona przez (21) ma w obszarze $D$ obie pochodne cząstkowe, wyrażone wzorami

$$F_x = P(x,y), \qquad F_y = Q(x,y). \tag{23}$$

Różniczkując te równości, otrzymamy $F_{yx} = P_y$, $F_{xy} = Q_x$; a że drugie pochodne mieszane są równe, to wynika stąd równość (20).

• • Pokażemy teraz, że warunek (20) jest *dostateczny.* Załóżmy, że obszar $D$ jest prostokątem o bokach równoległych do osi współrzędnych i niech $F(x_B, y_B)$ oznacza całkę (19) po łamanej $AFB$ **RYS.** łączącej punkty $A = (x_0, y_0)$, $F = (x_0, y_B)$, $B = (x_B, y_B)$. Na odcinku $AF$ współrzędna $x$ jest stała, zaś na odcinku $FB$ stała jest współrzędna $y$; tak więc

$$F(x_B, y_B) = \int_{y_0}^{y_B} Q(x_0, y_B)\mathsf{d}y + \int_{x_0}^{x_B} P(x, y_B)\mathsf{d}x$$

skąd (wykorzystując wzór na pochodną całki zależącej od parametru, z granicami też zależącymi od parametru)

Tu ten wzór i jego dowód

mamy $F_x(x_B, y_B) = P(x_B, y_B)$, $F_y(x_B, y_B) = Q(x_0, y_B) + \int_{x_0}^{x_B} P_y(x, y_B)\mathsf{d}x$. Ale w myśl założenia (20) jest: $P_y = Q_x$, zatem

$$F_y(x_B, y_B) = Q(x_0, y_B) + \int_{x_0}^{x_B} Q_x(x, y_B)\mathsf{d}x = Q(x_0, y_B) + Q(x_B, y_B) - Q(x_0, y_B),$$

zatem funkcja $F$ spełnia równania (23).

Niech teraz $\mathcal{J}$ oznacza całkę (19) po dowolnej krzywej regularnej. Z wzoru ... na całkę po krzywej sparametryzowanej, biorąc pod uwagę warunki (23), otrzymujemy

$$\mathcal{J} = \int_a^b (F_x x'(t) + F_y y'(t))\mathsf{d}t = \int_a^b \frac{\mathsf{d}F(x(t), y(t))}{\mathsf{d}t}\mathsf{d}t \equiv \int_a^b \mathsf{d}F(x(t), y(t)) = F(B) - F(A), \tag{24}$$

skąd widać, że całka (19) *nie zależy* od drogi łączącej punkty $A$ i $B$ w obszarach prostokątnych.

• Tu o tym, jak się to rozszerza na obszary wielościenne, a w granicy krzywe

**CBDO**

**Uwaga.** Konieczność założenia o jednospójności obszaru $D$

## 1.8 Sytuacja w 3 wymiarach

W tym: • Analogony warunków na niezależność całki krzywoliniowej w 3d od drogi całkowania; Aby dla 1-formy $\overset{1}{\omega} = P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y + R\mathsf{d}z$ całka była niezależna od drogi, muszą być spełnione warunki

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{25}$$

• Co to jest rotacja pola wekt.; • oraz że warunek na pochodne składowych oznacza *bezrotacyjność* pola; na razie nie ma nic o interpretacji rotacji – będzie to przy całkach powierzchniowych

## 1.9 Całka z różniczki zupełnej – potencjał

Niech funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ spełniają w obszarze jednospójnym $D$ założenia jak poprzednio (tzn. będą w $D$ ciągłe wraz z pochodnymi $P_y$ oraz $Q_x$).

**Def.** Mówimy, że określone na $D$ wyrażenie:

$$\overset{1}{\omega} = P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y \tag{26}$$

(zwane *jedno-formą*) jest *różniczką zupełną*, jeśli w obszarze $D$ istnieje funkcja $F(x,y)$ taka, że $\mathsf{d}F = P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y$ (tzn. $F_x = P$, $F_y = Q$). Funkcję taką nazywamy naówczas *funkcją pierwotną* dla 1-formy $\overset{1}{\omega}$ (26).

Zachodzi

**Tw.** Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by 1-forma (26) była różniczką zupełną w obszarze $D$, jest, aby w całym obszarze $D$ zachodziła równość

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{27}$$

**Dow.** Powyższy warunek jest konieczny, gdyż jeśli zachodzi równość: $\mathsf{d}F = P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y$, to znaczy to, że $F_x = P$, $F_y = Q$, skąd $Q_x = F_{xy} = F_{yx} = P_y$. I na odwrót: Jeśli spełniony jest warunek (27), to funkcja $F$ określona przez całkę (21) ma pochodne cząstkowe wyrażone wzorami (23), co jest innym zapisem tego, że $\mathsf{d}F = P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y$.

**CBDO**

*Uwaga.* Jeżeli $F(x,y)$ jest funkcją pierwotną dla 1-formy $P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y$, to funkcją pierwotną jest też funkcja różniąca się o stałą: $F(x,y) + C$. Jest też na odwrót: Dwie funkcje pierwotne $F$ i $\tilde{F}$ dla 1-formy $P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y$ różnią się co najwyżej o stałą, tak więc $\tilde{F} = F + C$.

*Przykł.* Weźmy $P = 3x^2 + y^2$, $Q = 2xy - y$; spełniają one warunek (27). Poszukajmy dla 1-formy $P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y$ funkcji pierwotnej.

**Odp:** $F = x^3 + xy^2 - \frac{1}{2}y^2 + C$.

Jak jest w trzech wymiarach? Pokazujemy analogicznie jak powyżej, że: Aby 1-forma $P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y + R\mathsf{d}z$ była różniczką zupełną, muszą być spełnione równości (25).

**Uwaga terminologiczna.** Kilka stron wcześniej pokazywaliśmy, że całka z 1-formy $F_x\mathsf{d}x + F_y\mathsf{d}y + F_z\mathsf{d}z$ to to samo, co całka $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\mathsf{d}s}$; można więc 1-formę $F_x\mathsf{d}x + F_y\mathsf{d}y + F_z\mathsf{d}z \equiv \overset{1}{\omega}_{\vec{F}}$ utożsamiać z wektorem $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Jeśli są spełnione warunki, będące przepisaniem warunków (25) dla powyższej postaci 1-formy: $F_{x,y} = F_{y,x}$; $F_{x,z} = F_{z,x}$; $F_{y,z} = F_{z,y}$ oznaczające, że pole $\vec{F}$ ma *znikającą rotację*, to 1-forma ma funkcję pierwotną; oznaczmy ją jako $\Phi$ i nazwijmy *potencjałem*. Zespół pochodnych cząstkowych funkcji $\Phi$, czyli $(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$, czyli *gradient* funkcji $\Phi$, to właśnie wektor $\vec{F}$. Mamy więc: *Aby pole wektorowe było potencjalne, jego rotacja musi być równa zeru.* Czy Czytelnicy pamiętają ten warunek z elektrostatyki?

# 2 Całki powierzchniowe

## 2.1 Opis powierzchni: wykresowy, parametryczny,uwikłany

Czytelnik zapewne ma jakąś intuicję na temat co to jest powierzchnia – zbiór dwuwymiarowy. Powierzchnie można zadawać na różne sposoby; najpopularniejsze z nich to:

1. Sposób najprostszy – zadawanie powierzchni jako *wykresu*:

   **Def.** Niech $D$ będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ oraz niech $f$ będzie funkcją określoną na $D$. Zbiór punktów $S \in \mathbb{R}^3 : S = \{x, y, f(x,y)\}$, gdzie $(x,y) \in D$, nazywamy powierzchnią (zanurzoną w $\mathbb{R}^3$), zadaną jako wykres funkcji $f$. O funkcji $f$ zakładamy, że jest klasy $C^1$ (tzn. istnieją pochodne cząstkowe $f$ i są one ciągłe).

2. *Postać uwikłana.* Zdarza się często, że powierzchnia jest przedstawiona równaniem postaci
$$F(x,y,z)=0. \tag{28}$$
Weźmy jakiś punkt $p_0=(x_0,y_0,z_0)$, spełniający równanie (28). Załóżmy, że choć jedna z pochodnych cząstkowych $F_x(p_0)$, $F_y(p_0)$, $F_z(p_0)$ jest różna od zera; taki punkt $p_0$ nazywamy *nieosobliwym*. Niech zachodzi np. $F_z(p_0)\neq 0$. Wówczas z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że w pewnym otoczeniu $p_0$ równanie (28) określa $z$ jako jednoznaczną funkcję $z=f(x,y)$, ciągłą i róńiczkowalną względem obu argumentów.

   Można zadać pytanie: Co się dzieje, gdy *wszystkie* pochodne cząstkowe $F$ znikają w jakimś punkcie? Dziać mogą się różne rzeczy: Może tam być punkt samoprzecięcia, może być niegładkość, może tam wreszcie wszystko być dobrze.

3. *Postać parametryczna.* Określenie położenia punktu $p=(x,y,z)$ na powierzchni wymaga dwóch parametrów; nazwijmy je $u,v$. Przypuśćmy, że dane są równania
$$p\equiv p(u,v)=\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \phi(u,v)\\ y & = & \psi(u,v)\\ z & = & \chi(u,v)\end{array}\right. \tag{29}$$
   załóżmy ponadto, że macierz pochodnych cząstkowych
$$Dp=\begin{bmatrix}\phi_u & \phi_v\\ \psi_u & \psi_v\\ \chi_u & \chi_v\end{bmatrix} \tag{30}$$
   jest nieosobliwa, tzn. w jakimś punkcie $(u_0,v_0)$ przynajmniej jeden z podwyznaczników tej macierzy jest różny od zera. Niech zachodzi np.
$$\begin{vmatrix}\phi_u & \phi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}\neq 0.$$
   Napiszmy teraz dwa pierwsze równania spośród (29) jako
$$\phi(u,v)-x=0;\qquad \psi(u,v)-y=0$$
   Z tw. o funkcji uwikłanej wynika teraz, że w otoczeniu punktu $(u_0,v_0)$ można wyznaczyć $u,v$ jako jednoznaczne funkcje $x,y$:
$$u=g(x,y);\qquad v=h(x,y).$$
   Podstawiając tak wyznaczone $u$ i $v$ do trzeciego z równań (29) otrzymujemy zwykłe (wykresowe) przedstawienie powierzchni:
$$z=\chi(g(x,y),h(x,y))\equiv f(x,y);$$
   funkcja $f$ jest przy tym ciągła i różniczkowalna.

**Morał**: W otoczeniu punktu nieosobliwego, wszystkie trzy przedstawienia: 'wykresowe', 'uwikłane' i 'parametryczne' są równoważne.

**Przykł.**

1. *Sfera.* Najczęściej mamy do czynienia z równaniem uwikłanym: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, gdzie $R$ – promień sfery. Pochodna $F$ jest: $[2x, 2y, 2z]$ i nigdzie na sferze nie mogą być równe zeru jednocześnie *wszystkie trzy* pochodne cząstkowe. Tak więc sfera jest powierzchnią.

   Łatwo przejść do postaci wykresowej: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; każdy z tych opisów jest dobry dla górnej lub dolnej połówki sfery. A co z równikiem? Na równiku $F_z = 0$; pokazuje to, że coś złego dzieje się na równiku – w otoczeniu żadnego punktu z równika $z$ nie może być wyrażone jako funkcja $x, y$. Ale łatwo temu zaradzić, wyrażając np. $x$ jako funkcję $y$ oraz $z$; wtedy prawie cały równik będzie podpadał pod jedną lub drugą gałąź funkcji $x = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

   Jeszcze przedstawienie parametryczne:

   $$x = R\sin\theta\cos\phi; \qquad y = R\sin\theta\sin\phi; \qquad z = R\cos\theta.$$

2. *Stożek.* Zadany jest on przez równanie: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$. $F$ jest: $[2x, 2y, -2z]$; wszystkie trzy pochodne są równe zeru w punkcie $(0, 0, 0)$; sprawia to, że stożek *nie jest* powierzchnią, natomiast stanie się nią, gdy wyrzucimy zeń punkt $(0, 0, 0)$.

   Łatwo przejść do 'wykresowej' postaci stożka: $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. *Helikoida.* Jest to powierzchnia zadana parametrycznie: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = a\phi$, gdzie $r \geqslant 0$, $\phi \geqslant 0$ oraz $a > 0$. Macierz Jacobiego jest:

   $$\begin{bmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

## 2.2 Całki powierzchniowe nieskierowane tzn. całki skalarne

### 2.2.1 Pole powierzchni

### 2.2.2 Całka pow. nieskierowana

Niech $F(x, y, z)$ będzie funkcją określoną na *płacie powierzchniowym regularnym* $S$, zadanym jako wykres:

$$z = f(x, y), \qquad \text{gdzie} \quad (x, y) \in D. \tag{31}$$

Podzielmy obszar $D$ na $n$ prostokątów, zadając tym samym podział $\pi_n = \{\Delta D_1, \Delta D_2, \ldots, \Delta D_n\}$. Przez $\delta_n$ oznaczmy średnicę podziału $\pi_n$, tzn. dł. najdłuższego boku spośród wszystkich prostokątów. Oznaczmy przez $\Delta S_1$, $\Delta S_2$, …, $\Delta S_n$ części płata $S$ odpowiadające podziałowi (tzn. będące wykresami $f$ nad obszarami $\Delta D_i$); pole powierzchni $\Delta S_i$ oznaczymy $|\Delta S_i|$. Przez $A_i$ oznaczmy dowolny punkt płata $\Delta S_i$ (tzn. $A_i = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$, gdzie $(x_i, y_i) \in D_i$). Utwórzmy sumę

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} F(A_i)|\Delta S_i| \tag{32}$$

Weźmy teraz jakiś *ciąg* podziałów $\{\pi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. O tym ciągu zakładamy, że średnica $n-$tego podziału dąży 0, gdy $n \to \infty$.

**Def.** Jeżeli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma$ i granica ta nie zależy od wyboru ciągu podziałów ani od wyboru wypunktowania, to granicę tę oznaczamy przez

$$\int\!\!\int_S F(x,y,z)\mathsf{d}^2S \tag{33}$$

i nazywamy *całką powierzchniową nieskierowaną* funkcji $F$ po płacie $S$.

Podobnie jak dla całek krzywoliniowych nieskierowanych dowodzi się następującego faktu i wzorów:

**Tw.** Jeżeli funkcja $F$ jest ciągła na płacie $S$, to całka (34) istnieje i wyraża się wzorem:

$$\int\!\!\int_S F(x,y,z)\mathsf{d}^2S = \int\!\!\int_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y \tag{34}$$

w przypadku, gdy $S$ jest zadana jako wykres $z = f(x,y)$.

**Szkic uzupełnienia dowodu.** Większość rzeczy w dowodzie 'idzie' jak w przypadku jednowymiarowym; uzasadnienia jednakże wymaga wyrażenie na 'pole powierzchni' $\mathsf{d}^2S$. Niech $\vec{v}_x, \vec{v}_y$ będą wektorami stycznymi do powierzchni $S$ **RYS.** Wektory te są proporcjonalne do: $\vec{v}_x \approx [1,0,f_x]\Delta x$, $\vec{v}_y \approx [0,1,f_y]\Delta y$. Pole powierzchni $\Delta^2 S$ równoległoboku, rozpiętego na wektorach $\vec{v}_x, \vec{v}_y$ jest równe:

$$\Delta^2 S = ||\vec{v}_x \times \vec{v}_y|| = ||[f_x, f_y, 1]||\Delta x\Delta y = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\Delta x\Delta y$$

**Przykł.**

1. *Pole powierzchni.* Do wyliczenia pola powierzchni kładziemy $F(x,y,z) \equiv 1$ w całce (34). Policzmy np. pole powierzchni $\mathcal{A}$ wykresu paraboloidy $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ nad kołem $D : x^2+y^2 \leqslant 1$. Mamy:

$$\mathcal{A} = \int\!\!\int_S \mathsf{d}^2S = \int\!\!\int_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_0^{2\pi}\mathsf{d}\phi\int_0^1 \mathsf{d}r\,\sqrt{1+r^2}\,r$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

2. Masa powłoki o zadanym rozkładzie gęstości
3. Potencjał pochodzący od rozkładu ładunku na dwuwymiarowej powierzchni
4. Współrzędne środka masy powierzchni dwuwymiarowej

## 2.3 Orientacja

### 2.3.1 Powierzchnie dwu- i jednostronne tzn. orientowalne i nie

### 2.3.2 Orientacja bazy przestrzeni wektorowej

### 2.3.3 Orientacja powierzchni

## 2.4 Całki powierzchniowe skierowane tzn. całki z 2-form

## 2.5 Tw. Gaussa-Ostrogradskiego

Niech będzie dany w $\mathbb{R}^3$ obszar normalny $V$, ograniczony jedną powierzchnią regularną $S$. Zachodzi:

**Tw.** Gaussa – Ostrogradskiego Jeżeli funkcje $P$, $Q$, $R$ są ciągłe wraz z pochodnymi $P_x$, $Q_y$, $R_z$ wewnątrz obszaru $V$ i na jego brzegu $S$, przy czym brzeg jest powierzchnią regularną o orientacji zewnętrznej, to zachodzi równość

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z = \iint\limits_S (P\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + Q\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x + R\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y) \quad (35)$$

**Dow.** Obszar $V$, jako normalny względem płaszczyzny $xy$, daje się określić nierównościami

$$f_1(x, y) \leqslant z \leqslant f_2(x, y), \quad \text{gdzie } (x, y) \in D$$

(tu $D$ jest rzutem $V$ na płaszczyznę $xy$).

Stosując wzór na zamianę całki potrójnej na iterowaną i fakt, że całkujemy pochodną, dostajemy

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z = \iint\limits_D R(x, y, f_2(x, y))\mathsf{d}x\mathsf{d}y - \iint\limits_D R(x, y, f_1(x, y))\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

Oznaczmy przez $S_1$ powierzchnię $z = f_1(x, y)$ (dolną) zorientowaną w dół, a przez $S_2$ – powierzchnię $z = f_2(x, y)$ (górną) zorientowaną ku górze. Wówczas, wykorzystując wzory o tym, jak się wyraża całka powierzchniowa skierowana przez całkę podwójną, oraz fakt, że przy zmianie orientacji powierzchni całka zmienia znak, mamy

$$\iint\limits_D R(x, y, f_1(x, y))\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \iint\limits_{-S_1} R(x, y, z)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = -\iint\limits_{S_1} R(x, y, z)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

i analogicznie

$$\iint\limits_D R(x, y, f_2(x, y))\mathsf{d}x\mathsf{d}y = +\iint\limits_{S_2} R(x, y, z)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

tak więc

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \wedge \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y\mathsf{d}z = \iint\limits_{S_1} R(x, y, z)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y + \iint\limits_{S_2} R(x, y, z)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

i ostatecznie

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z = \iint\limits_S R\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = \iint\limits_S R\cos\gamma\, \mathsf{d}^2 S.$$

W analogiczny sposób (rzutując $S$ na pozostałe płaszczyzny: $xz$ oraz $yz$) otrzymamy

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} \mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z = \iint\limits_S P\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z = \iint\limits_S P\cos\alpha\, \mathsf{d}^2 S,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} \mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z = \iint\limits_S Q\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x = \iint\limits_S Q\cos\beta\, \mathsf{d}^2 S,$$

Po zsumowaniu powyższych trzech wzorów otrzymujemy (35).

**CBDO**

### 2.5.1 Interpretacja dywergencji

## 2.6 Tw. Stokesa

Niech w $\mathbb{R}^3$ będzie zadana orientowalna powierzchnia $S$ z brzegiem $\partial S$. Niech powierzchnia $S$ będzie rzutowalna na płaszczyznę $xy$ (to założenie jest chwilowe – zaraz zostanie usunięte). Niech $S$ będzie zorientowana tak, by dodatni obieg na krzywek $\partial S$ dookoła prostej normalnej do powierzchni $S$ był taki sam, jak obieg na płaszczyźnie $xy$ dookoła osi $z$. **RYS.**

Niech w otoczeniu powierzchni $S$ będą określone funkcje $P, Q, R$, ciągłe wraz z pochodnymi.

Zachodzi

**Tw.** (Stokesa).

$$\int\limits_{\partial S} P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y + R\mathsf{d}z = \int\int\limits_{S} (R_y - Q_z)\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + (P_z - R_x)\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + (Q_x - P_y)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y. \quad (36)$$

**Dow.** Załóżmy, że $S$ dana jest jako wykres funkcji $f$: $z = f(x, y)$, gdzie $(x, y) \in D$. Niech $\partial D$ będzie brzegiem obszaru $D$. Wówczas

$$\int\limits_{\partial S} P(x, y, z)\mathsf{d}x = \int\limits_{\partial D} P(x, y, f(x, y))\mathsf{d}x.$$

Całkę po prawej stronie przekształćmy, wykorzystując tw. Greena:

$$\int\limits_{\partial D} P(x, y, f(x, y))\mathsf{d}x = -\int\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) \mathsf{d}x\mathsf{d}y = -\int\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial y}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y - \int\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z} f_y \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y,$$

a tę ostatnią całkę zamieniamy na całkę powierzchniową nieskierowaną:

$$I \equiv \int\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z} f_y \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = \int\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z} f_y \cos\gamma \mathsf{d}^2 S,$$

gdzie $\gamma$ jest kątem pomiędzy wektorem normalnym do powierzchni $S$ a osią $z$. Mamy jednak zależność między kątami $\gamma$ i $\beta$:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad \Longrightarrow \quad \cos\beta = -f_y \cos\gamma,$$

tak więc

$$I = -\int\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta \mathsf{d}^2 S = -\int\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z}\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x$$

i ostatecznie

$$\int\limits_{\partial S} P\mathsf{d}x = \int\int\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z}\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y.$$

Analogicznie można przekształcić całki $\int\limits_{\partial S} Q\mathsf{d}y$ oraz $\int\limits_{\partial S} R\mathsf{d}z$. Przez dodanie stronami tych wyrażeń otrzymamy wzór (36).

**CBDO**

### 2.6.1 Interpretacja rotacji

Całkę po lewej stronie równości (36) można zapisać w postaci: $\int\limits_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{t} \mathsf{d}s$, gdzie $\vec{t}$ oznacza jednostkowy wektor styczny do krzywej $\partial S$, zaś $\vec{F} = (P, Q, R)$. (Był taki wzór na przekształcenie całki krzywoliniowej skierowanej na nieskierowaną).

*Rotacją* pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ nazywamy pole wektorowe o składowych: $\operatorname{rot} \vec{F} = (F_{y,z} - F_{z,y}, F_{z,x} - F_{x,z}, F_{x,y} - F_{y,x})$. Wyrażenie podcałkowe po prawej stronie równości (36) można, używając symbolu rotacji, zapisać jako

$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} = (R_y - Q_z)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_x - P_y)\cos\gamma.$$

(tu $\vec{n}$ jest wektorem normalnym do powierzchni $S$). Ostatecznie równość (36) można zapisać jako

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{t} \, \mathsf{d}s = \iint\limits_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathsf{d}^2 S.$$

Całkę po lewej stronie powyższej równości nazywamy *krążeniem* pola wektorowego $\vec{F}$ po krzywej $\partial S$. Po prawej stronie zaś mamy strumień pola wektorowego $\operatorname{rot} \vec{F}$ przez powierzchnię $S$.

### 2.6.2 Wielka Unifikacja

$$\int_C \mathsf{d}\omega = \int_{\partial C} \omega \tag{37}$$

(zwane **tw. Stokesa** – ogólna wersja). Jest to '3 w 1' (zawierające – jako szczególne przypadki – tw. Greena, G-0, Stokesa).

Te 3 tw. (tw. Greena, G-0, Stokesa) są bardzo intuicyjne fizycznie, ale kiepsko poddają się uogólnieniom (np. na wyższe wymiary). Ogólne tw. Stokesa (37), z kolei, jest słuszne dla dowolnego wymiaru; ale jest mniej intuicyjne i wymaga wprowadzenia szeregu pojęć.

1. *Co to jest $k-$forma różniczkowa:* Coś, co sie wsadza do całki $k-$wymiarowej i co zależy od orientacji.

2. *Formy na* $\mathbb{R}^3$.

   (a) $0-$formy to funkcje: $\overset{0}{\omega} = f$, gdzie $f$ jest funkcją trzech zmiennych $x, y, z$.

   (b) $1-$formy są postaci: $\overset{1}{\omega} = P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y + R\mathsf{d}z$, gdzie $P, Q, R$ – funkcje trzech zmiennych $x, y, z$.

   (c) $2-$formy są postaci: $\overset{2}{\omega} = P\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + Q\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + R\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$, gdzie znowu $P, Q, R$ – funkcje trzech zmiennych $x, y, z$.

   (d) $3-$ formy mają postać: $\overset{3}{\omega} = F\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$, gdzie $F$ jest funkcją trzech zmiennych $x, y, z$.

   Formy stopnia większego niż 1 mają własności:

$$\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^j = -\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i \tag{38}$$

   co w szczególności pociąga za sobą $\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^i = 0$.

Formom można nadać bardziej wyraziste znaczenie geometryczne, ale nie będziemy tego tu robić i poprzestaniemy na ich znaczeniu jako symboli mających własności (38).

3. *Formy na* $\mathbb{R}^n$. Ogólna postać $k-$formy na $\mathbb{R}^n$ jest:

$$\overset{k}{\omega}= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} a_{i_1 i_2 \dots i_k} \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \tag{39}$$

gdzie $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ jest funkcją $n$ zmiennych: $x^1, x^2, \dots, x^n$ klasy $C^2$.

4. *Iloczyn zewnętrzny.* Używając znaku '$\wedge$' ('iloczyn zewnętrzny') można tworzyć nie tylko iloczyny $\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^j$, ale też ogólniejsze *iloczyny zewnętrzne* form: Np. jeśli $\overset{1}{\omega}= P\mathsf{d}x+Q\mathsf{d}y+R\mathsf{d}z$, $\overset{1}{\eta}= a\mathsf{d}x+b\mathsf{d}y+c\mathsf{d}z$, to $\overset{1}{\omega} \wedge \overset{1}{\eta}= (Pb-Qa)\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y+(Ra-Pc)\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x+(Qc-Rb)\mathsf{d}y\mathsf{d}z$; wykorzystaliśmy tu rozdzielność mnożenia (zewnętrznego) względem dodawania i własności antysymetrii iloczynów zewnętrznych.

5. *Przyporządkowanie wektorowi z* $\mathbb{R}^3$ *1-formy i 2-formy.* Większość rachunków na wektorach można wyrazić w języku form. Najsampierw jednak zdefiniujmy przyporządkowanie wektorom form. Otóż w zależności od zapotrzebowania, wektorowi $\vec{F} = (P, Q, R)$ przyporządkowuje się w następujący sposób jedno- albo dwuformę:

$$\vec{F} = (P, Q, R) \ \leftrightarrow \overset{1}{\omega}_{\vec{F}}= P\mathsf{d}x + Q\mathsf{d}y + R\mathsf{d}z; \tag{40}$$

$$\vec{F} = (P, Q, R) \ \leftrightarrow \overset{1}{\omega}_{\vec{F}}= P\mathsf{d} \wedge y\mathsf{d}z + Q\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + R\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y; \tag{41}$$

6. *Wyrażenie il. skalarnego i wektorowego przez powyższe formy.* Niech będą zadane dwa wektory: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ oraz $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Bezpośrednim rachunkiem można przekonać się, że:

$$\overset{1}{\omega}_{\vec{a}} \wedge \overset{1}{\omega}_{\vec{b}}=\overset{2}{\omega}_{\vec{a}\times\vec{b}} \tag{42}$$

(z tego wzoru od razu, dzięki antysymetrii przy mnożeniu $1-$form, wynika antysymetria iloczynu wektorowego) oraz

$$\overset{1}{\omega}_{\vec{a}} \wedge \overset{2}{\omega}_{\vec{b}}= (\vec{a}\cdot\vec{b})\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z. \tag{43}$$

7. *Przypomnienie + uogólnienie: Całkowanie $k-$formy tzn. sprowadzenie jej do całki $k-$wymiarowej.*

Całkę z $k-$formy (39) po $k-$wymiarowej powierzchni $S$ określa się następująco:

Niech powierzchnia $S$ będzie sparametryzowana przez $y = (y^1, y^2, \dots, y^k) \in D \subset \mathbb{R}^k$. Całka z całej $k-$formy (39) będzie sumą całek z jednomianów $k-$formowych. Rozpatrzmy całkę z jakiegoś jednego jednomianu $k-$formowego. Definiujemy całkę z $k-$formy jako całkę $k-$wymiarową:

$$\int_S a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x^1, x^2, \dots, x^n)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} =$$

$$Or \int_D a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x^1(y^1, \dots, y^k), x^2(y^1, \dots, y^k), \dots, x^n(y^1, \dots, y^k)) \frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})}{\partial(y^1, y^2, \dots, y^k)} \mathsf{d}y^1\mathsf{d}y^2 \dots \mathsf{d}y^k.$$

8. *Różniczka zewnętrzna d.* Dla form mamy określoną jeszcze jedną operację, a mianowicie operację *różniczki zewnętrznej d*, przeprowadzającej $k-$formę w $k+1-$formę. Działa ona następująco:

   (a) Na $0-$ formach czyli funkcjach $f \equiv f(x^1, \ldots, x^n)$:

   $$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathsf{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathsf{d}x^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\mathsf{d}x^n; \qquad (44)$$

   (b) Na $k-$formach: Weźmy jakąś $k-$formę proporcjonalną do którejś bazowej tzn. jednomian formowy:

   $$\overset{k}{\eta} = F\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge x^{i_k};$$

   tu różniczka zewnętrzna działa tak:

   $$\mathsf{d}\overset{k}{\eta} = \mathsf{d}F \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge x^{i_k};$$

   gdzie $\mathsf{d}F$ oblicza się zgodnie z wzorem (44)

9. *Gradient, dywergencja i rotacja.* W ten sposób można zdefiniować operacje różniczkowe: gradient, dywergencję i rotację:

   (a) Gradient funkcji $f$:

   $$\mathsf{d}f = \overset{1}{\omega}_{\mathrm{grad}\, f};$$

   (b) Rotacja: Dla pola wektorowego $\vec{F}$:

   $$\mathsf{d}\overset{1}{\omega}_{\vec{F}} = \overset{2}{\omega}_{\mathrm{rot}\vec{F}};$$

   (c) Dywergencja: Dla pola wektorowego $\vec{F}$:

   $$\mathsf{d}\overset{2}{\omega}_{\vec{F}} = \mathrm{div}\, \vec{F}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$$

10. $\mathsf{d}$ *ma własność*: $\mathsf{d} \circ \mathsf{d} = 0$; *sprawdzenie tego na* $0-$*formach i* $1-$*formach.*

    (a) $0-$formy: $\overset{0}{\omega} = f(x^1, x^2, x^3)$,

    $$\mathsf{d}f = \sum_{i=1}^{3} f_{,i}\mathsf{d}x^i;$$

    $$\mathsf{d}(\mathsf{d}f) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{d}(f_{,i})\mathsf{d}x^i = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} f_{,ij}\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^j = \sum_{i<j}^{3}(f_{,ij} - f_{,ji})\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^j = 0;$$

    ostatnia równość wynika z faktu, że pochodne mieszane drugiego rzędu są równe.

    W przełożeniu na język wektorów oznacza to, że *rotacja gradientu jest równa zeru.*

(b) 1−formy: $\overset{1}{\omega} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathsf{d}x^i$, gdzie $a_1, a_2, a_3$ są funkcjami $x^1, x^2, x^3$; weźmy pojedynczy jednomian 1−formowy $a_i \mathsf{d}x^i$ i obliczmy jego pochodną zewnętrzną:

$$\mathsf{d}(a_i \mathsf{d}x^i) = \mathsf{d}a_i \wedge \mathsf{d}x^i = \sum_{j=1}^{3} a_{i,j} \mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i$$

i licząc jeszcze raz różniczkę zewnętrzną otrzymanego wyrażenia,

$$\mathsf{d}(\mathsf{d}(a_i \mathsf{d}x^i)) = \mathsf{d}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{i,j} \mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i\right) = \sum_{j=1}^{3} \mathsf{d}a_{i,j} \mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i = \left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{i,kj} \mathsf{d}x^k \wedge \mathsf{d}x^j\right) \wedge \mathsf{d}x^i$$

$$= \left(\sum_{k<j} (a_{i,kj} - a_{i,jk}) \mathsf{d}x^k \wedge \mathsf{d}x^j\right) \wedge \mathsf{d}x^i = 0,$$

znów ze względu na to, że drugie pochodne mieszane funkcji $a_i$ są sobie równe.

W przełożeniu na język wektorowy oznacza to, że *dywergencja rotacji jest równa zeru.*

W fizyce (przede wszystkim elektrodynamice, ale nie tylko) korzysta się z tego faktu, wprowadzając *potencjał wektorowy* dla pola magnetycznego: Wiadomo, że dywergencja pola magnetycznego jest równa zeru (nieistnienie pojedynczych ładunków magnetycznych). Skoro tak, to pole magnetyczne $\vec{B}$ daje się zapisać jako rotacja pewnego pola wektorowego $\vec{A}$, zwanego *potencjałem wektorowym dla pola magnetycznego*:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}.$$

Podobnie jak wprowadzenie potencjału elektrostatycznego upraszcza wiele rachunków dla pola elektrycznego, tak wprowadzenie potencjału wektorowego upraszcza rachunki dla pola magnetycznego.

*Uwaga.* Własność $\mathsf{d} \circ \mathsf{d} = 0$ jest prawdziwa dla dowolnych form w dowolnym wymiarze, natomiast wyrażenie tej własności w języku wektorowym, tzn. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) \equiv 0$ oraz $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{F} \equiv 0)$ są prawdziwe tylko w $\mathbb{R}^3$.

11. *Powierzchnia z brzegiem; orientacja przestrzeni i orientacja brzegu.* Było omówione; agitacja, że przenosi się to na wyższe wymiary.

12. Twierdzenie Stokesa.

# 3 Zadania

## 3.1 Całki krzywoliniowe nieskierowane

1. Obliczyć długość jednego łuku cykloidy (tzn. krzywej danej parametrycznie przez: $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$). **Odp.** $8R$.

2. Obliczyć długość elipsy o półosiach $a$ i $b$. **Odp.** wyraża się przez całkę eliptyczną.

3. Obliczyć długość łuku paraboli $y = ax^2$ pomiędzy punktami $x_1$ i $x_2$.

4. Obliczyć długość *krzywej łańcuchowej*, tzn. odcinka linii $y = \cosh x$ pomiędzy $x = 0$ a $x = x^*$.

5. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma \frac{\mathsf{d}s}{x-y}$, gdzie $\gamma$ jest odcinkiem łączącym punkty $A = (0, -2)$ i $B = (4, 0)$.

6. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma xy\mathsf{d}s$, gdzie $\gamma$ jest prostokątem o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (6, 3)$ i $D = (0, 3)$.

7. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma xy\mathsf{d}s$, gdzie $\gamma$ jest ćwiartką elipsy o półosiach $a$ i $b$, leżącą w pierwszej ćwiartce. **Odp.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

8. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma \sqrt{2y}\mathsf{d}s$, gdzie $\gamma$ jest łukiem cykloidy (jeśli ktoś nie wie co to jest to p. zad. 1) dla $t \in [0, 2\pi]$. **Odp.** $4\pi\sqrt{R^3}$.

9. Niech krzywa $\gamma$ będzie opisana parametrycznie we współrzędnych *biegunowych*: $r = r(t)$, $\phi = \phi(t)$ dla $t \in [a, b]$. Pokazać, że całka krzywoliniowa nieskierowana $I = \int_\gamma f(x, y)\mathsf{d}s$ wyraża się wzorem:

$$I = \int_a^b f(r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t))\sqrt{r(t)^2\phi'(t)^2 + r'(t)^2}\mathsf{d}t$$

gdzie primy oznaczają pochodne po $t$.

10. Pokazać, że w przypadku, gdy opis krzywej jako: $r = r(\phi)$, to całka krzywoliniowa nieskierowana $I = \int_\gamma f(x, y)\mathsf{d}s$ wyraża się wzorem:

$$I = \int_a^b f(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi)\sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\mathsf{d}\phi$$

gdzie prim oznaczają pochodną po $\phi$: $r' = \frac{\mathsf{d}r}{\mathsf{d}\phi}$.

11. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma x\sqrt{x^2 - y^2}\mathsf{d}s$, gdzie $\gamma$ jest połówką lemniskaty Bernoulliego: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ dla $x \geqslant 0$.

12. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\mathsf{d}s$, gdzie $\gamma$ jest kawałkiem spirali Archimedesa $r = 2\phi$, położonym wewnątrz okręgu o promieniu $R$ i środku w punkcie $(0, 0)$. **Odp.** $\frac{2}{3}[(1 + \frac{R^2}{4})^{3/2} - 1]$.

13. Obliczyć długość łuku spirali Archimedesa w sytuacji z poprzedniego zadania.

14. Obliczyć współrzędne środka ciężkości połówki okręgu o stałej liniowej gęstości masy i promieniu $R$, znajdującego się w górnej półpłaszczyźnie.

15. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma \frac{z^2 \mathsf{d}s}{x^2+y^2}$, gdzie $\gamma$ jest fragmentem linii śrubowej: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = Rt$ dla $t \in [0, \pi]$. **Odp.** $\frac{1}{3}a\sqrt{2}(2\pi)^3$.

16. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma xyz\mathsf{d}s$, gdzie $\gamma$ jest ćwiartką okręgu danego równaniami: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ dla $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

## 3.2 Całki krzywoliniowe skierowane (tzn. z 1−form) & tw. Greena

17. Obliczyć całkę: $\int_\gamma (x^2 - y^2)\mathsf{d}y$, gdzie $\gamma$ jest fragmentem paraboli $y = x^2$ pomiędzy punktami $(0,0)$ a $(3,9)$.

18. Obliczyć całkę: $\int_\gamma -x\cos y\mathsf{d}x + y\sin x\mathsf{d}y$, gdzie $\gamma$ jest odcinkiem łączącym punkty $(0,0)$ oraz $\pi, 2\pi$.

19. Obliczyć całkę: $\int_\gamma yz\mathsf{d}x + zx\mathsf{d}y + xy\mathsf{d}z$, gdzie $\gamma$ jest jednym zwitkiem linii śrubowej $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ (tzn. $t$ się zmienia od 0 do $2\pi$).

20. Obliczyć całkę: $\int_\gamma y^2\mathsf{d}x + z^2\mathsf{d}y + x^2\mathsf{d}z$, gdzie $\gamma$ jest krzywą, będącą przecięciem sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ z cylindrem $x^2 + y^2 = Rx$ (tu $R > 0$, $z \geqslant 0$). (Jest to tzw. *krzywa Vivianiego*). Kierunek obiegu $\gamma$ jest taki, że startując z punktu $(R, 0, 0)$ idzie się najsampierw przez punkty o wszystkich współrzędnych dodatnich.

21. Obliczyć całkę: $\int_\gamma \frac{y^2\mathsf{d}x - x^2\mathsf{d}y}{x^2+y^2}$, gdzie $\gamma$ jest półokręgiem $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, przebieganym od $t = 0$ do $t = \pi$.

22. Obliczyć całkę: $\int_\gamma \frac{y^2\mathsf{d}x - x^2\mathsf{d}y}{x^2+y^2}$, gdzie $\gamma$ jest połówką elipsy: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, przebieganą od $t = 0$ do $t = \pi$.

23. Obliczyć całkę: $\int_\gamma x\mathsf{d}y$, gdzie $\gamma$ jest brzegiem trójkąta utworzonego przez osie współrzędnych oraz prostą: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Krzywa $\gamma$ jest obiegana w dodatnim (tzn. antyzegarowym) kierunku.

24. To samo ogólniej: Obliczyć całkę: $\int_\gamma x\mathsf{d}y$, gdzie $\gamma$ jest brzegiem trójkąta utworzonego przez osie współrzędnych oraz prostą: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a, b > 0$. Krzywa $\gamma$ jest obiegana w dodatnim (tzn. antyzegarowym) kierunku. Całkę tę niezależnie obliczyć z tw. Greena; zinterpretować wynik.

25. **a)** Obliczyć całkę: $\int_\gamma x\mathsf{d}x + y\mathsf{d}y$, gdzie $\gamma$ jest fragmentem wykresu funkcji $y = e^x$, łączącym punkty $A = (0,1)$ i $B = (2, e^2)$. **b)** Obliczyć to samo wzdłuż odcinka łączącego $A$ i $B$. Zinterpretować wynik wykorzystując tw. Greena.

26. **a)** Obliczyć całkę: $\int_\gamma x\mathsf{d}x + y\mathsf{d}y$, gdzie $\gamma$ jest ćwiartką okręgu $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, przebieganą od $t = 0$ do $t = \frac{\pi}{2}$. **b)** Obliczyć to samo wzdłuż odcinka łączącego $(0, R)$ i $(R, 0)$. Zinterpretować wynik wykorzystując tw. Greena.

27. Obliczyć pole powierzchni figury ograniczonej osią $y = 0$ oraz jednym łukiem cykloidy. Wsk. Użyć tw. Greena.

## 3.3 Szukanie funkcji pierwotnych dla $1-$form

28. Sprawdzić, że całki po krzywych zamkniętych $\gamma$ są równe zeru niezależnie od postaci funkcji, które występują w całkowanych $1-$formach. (Oczywiście jeśli są spełnione założenia nt. różniczkowalności tychże funkcji). Znaleźć funkcje pierwotne dla całkowanych poniżej $1-$form.

    (a) $\int_\gamma \varphi(x)\mathsf{d}x + \psi(y)\mathsf{d}y$.

    (b) $\int_\gamma f(xy)(y\mathsf{d}x + x\mathsf{d}y)$.

    (c) $\int_\gamma f(\frac{x}{y})\frac{x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x}{x^2}$.

    (d) $\int_\gamma [f(x+y) + f(x-y)]\mathsf{d}x + [f(x+y) - f(x-y)]\mathsf{d}y$.

    (e) $\int_\gamma f(x^2 + y^2 + z^2)(x\mathsf{d}x + y\mathsf{d}y + z\mathsf{d}z)$.

29. Sprawdzić, że całkowane poniżej formy są różniczkami, i obliczyć całki z tych jednoform po (dowolnych) krzywych łączących punkt początkowy $A$ z punktem końcowym $B$.

    (a) $\int_A^B y\mathsf{d}x + x\mathsf{d}y$, $A = (-1, 2)$, $B = (2, 3)$.

    (b) $\int_A^B 3x^2y\mathsf{d}x + x^3\mathsf{d}y$, $A = (0, 0)$, $B = (2, 3)$.

    (c) $\int_A^B \frac{x\mathsf{d}x + y\mathsf{d}y}{x^2+y^2}$, $A = (3, 4)$, $B = (5, 12)$; zakładamy, że kontur całkowania *nie przechodzi* przez punkt $(0, 0)$ oraz, że się nie nawija wokół tego punktu.

    (d) $\int_A^B \frac{x\mathsf{d}x + y\mathsf{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A = (4, 3)$, $B = (12, 5)$; zakładamy, że kontur całkowania *nie przechodzi* przez punkt $(0, 0)$ oraz, że się nie nawija wokół tego punktu.

    (e) $\int_A^B yz\mathsf{d}x + zx\mathsf{d}y + xy\mathsf{d}z$; $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$.

    (f) $\int_A^B \frac{zx\mathsf{d}y + xy\mathsf{d}z - yz\mathsf{d}x}{(x-yz)^2}$, $A = (7, 2, 3)$, $B = (5, 3, 1)$; zakładamy, że kontur całkowania *nie przechodzi* przez powierzchnię $z = \frac{x}{y}$.

30. W poniższych zadaniach znaleźć funkcję pierwotną dla podanych $1-$form, sprawdziwszy uprzednio, że taka funkcja istnieje.

    (a) $\overset{1}{\omega} = x^2\mathsf{d}x + y^2\mathsf{d}y$.

    (b) $\overset{1}{\omega} = (x^2 - y^2)(x\mathsf{d}x - y\mathsf{d})$.

    (c) $\overset{1}{\omega} = \frac{(x+2y)\mathsf{d}x + y\mathsf{d}y}{(x+y)^2}$.

    (d) $\overset{1}{\omega} = (2x\cos y - y^2\sin x)\mathsf{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\mathsf{d}y$.

    (e) $\overset{1}{\omega} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\mathsf{d}x + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)\mathsf{d}y$

31. Znaleźć liczbę $n$ taką, aby poniższa $1-$forma $\overset{1}{\omega}$ była różniczką. Znaleźć dla tego przypadku funkcję pierwotną dla $1-$formy.

$$\overset{1}{\omega} = \frac{(x-y)\mathsf{d}x + (x+y)\mathsf{d}y}{(x^2+y^2)^n}.$$

32. W poniższych zadaniach znaleźć funkcję pierwotną dla podanych 1−form, sprawdziwszy uprzednio, że taka funkcja istnieje.

   (a) $\overset{1}{\omega}= \frac{\mathsf{d}x+\mathsf{d}y+\mathsf{d}z}{x+y+z}$.

   (b) $\overset{1}{\omega}= \frac{x\mathsf{d}x+y\mathsf{d}y+z\mathsf{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

   (c) $\overset{1}{\omega}= \frac{yz\mathsf{d}x+xz\mathsf{d}y+xy\mathsf{d}z}{1+x^2y^2z^2}$.

   (d) $\overset{1}{\omega}= \frac{zx\mathsf{d}y+xy\mathsf{d}z-yz\mathsf{d}x}{(x-yz)^2}$.

   (e) $\overset{1}{\omega}= \frac{\mathsf{d}x-3\mathsf{d}y}{z} + \frac{3y-x+z^3}{z^2}\mathsf{d}z$.

## 3.4 Całki powierzchniowe nieskierowane

33. Znaleźć pole powierzchni wyciętej:

   (a) walcem $x^2 + y^2 = R^2$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = xy$;

   (b) walcem $\frac{x^2}{a^2} + y^2b^2 = c^2$ z paraboloidy eliptycznej $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$;

   (c) 'walcem' $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = \frac{1}{a}xy$;

   (d) walcem $x^2 + y^2 = \rho^2$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (zakładamy, że $R > \rho$).

34. Znaleźć pole powierzchni części sfery $x^2+y^2+z^2 = R^2$ wyciętej przez walec $x^2+y^2 = Rx$ (tzw. powierzchnia Vivianiego).

35. Znaleźć pole powierzchni walca $x^2+y^2 = Rx$ zawartej wewnątrz kuli $x^2+y^2+z^2 = R^2$ (tzn. powierzchni bocznej bryły Vivianiego).

36. Znaleźć pole powierzchni utworzonej przez obrót krzywej $y = f(x)$ wokół osi $x$. Zakładamy, że $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$.

37. Niech powierzchnia będzie zadana we współrzędnych sferycznych jako:

$$r = r(\theta, \phi).$$

   Znaleźć wyrażenie na pole tej powierzchni.

38. Wykorzystując otrzymany wyżej wzór, obliczyć pole powierzchni: $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2xy$.

39. Rozważmy powierzchnię kuli: $x^2+y^2+z^2 = Rz$. Znaleźć pole części tej sfery zawartej wewnątrz stożka $z^2 = Ax^2 + By^2$; zakładamy, że $z \geqslant 0$.

## 3.5 Całki powierzchniowe skierowane tzn. z 2−form

40. Obliczyć całkę: $\int\int_S x^2 + y^2\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$, gdzie $S$ jest kołem $x^2 + y^2 = R^2$, zorientowanym przez wektor normalny skierowany w dół.

41. Obliczyć całkę: $\int\int_S x^2y^2z\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y$, gdzie $S$ jest dolną połówką sfery $x^2+y^2+z^2=R^2$, zorientowaną przez wektor $\vec{n}=(0,0,1)$ zaczepiony w punkcie $(0,0,-R)$. **Odp.** $-\frac{2\pi}{105}R^7$.

42. Obliczyć całki:

    (a) $I_0=\int\int_S \mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y$,

    (b) $I_1=\int\int_S z\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y$,

    (c) $I_2=\int\int_S z^2\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y$

    gdzie $S$ jest elipsoidą o półosiach $a,b,c$, zorientowaną na zewnątrz. **Odp.** a) $I_0=0$, b) $I_1=\frac{4}{3}\pi abc$, c) $I_2=0$.

43. Obliczyć całki

    (a) $I_a=\int\int_S x^3\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z$,

    (b) $I_b=\int\int_S yz\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x$

    po górnej połowie tejże elipsoidy, zorientowanej przez wektor normalny $\vec{n}=(0,0,1)$ zaczepiony w punkcie $(0,0,c)$. **Odp.** a) $I_a=\frac{2}{5}\pi a^3bc$, b) $I_b=\frac{1}{4}\pi abc^2$.

44. Znaleźć strumień pola wektorowego $\vec{a}=(0,yz,0)$ przez powierzchnię $S$, ograniczającą obszar zadany nierównościami: $z\geqslant 1-x^2-y^2$, $z\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Orientacja $S$ jest zadana przez wektor normalny skierowany na zewnątrz. Strumień policzyć: **a)** bezpośrednio, **b)** z tw. Gaussa – Ostrogradskiego. **Odp.** $\frac{\pi}{12}$.

45. Sprawdzić tw. Stokesa dla: $\overset{1}{\omega}=x^2y^3\mathsf{d}x+\mathsf{d}y+z\mathsf{d}z$. Konturem $\gamma$, po którym ta forma jest całkowana, jest okrąg $x^2+y^2=a^2$ zorientowany dodatnio.

46. Sprawdzić tw. Stokesa dla: $\overset{1}{\omega}=y\mathsf{d}x+z\mathsf{d}y+x\mathsf{d}z$, całkowanej po krzywej $\gamma=(x(t),y(t),z(t))$: $x(t)=a\sin^2 t$, $y(t)=\sqrt{2}a\sin t\cos t$, $z(t)=a\cos^2 t$, gdzie $t$ zmienia się od 0 do $\pi$. **Odp.** $\int\int_{Int\,\gamma}\mathsf{d}\overset{1}{\omega}=\int_\gamma\overset{1}{\omega}=\frac{1}{\sqrt{2}}a^2\pi$.

47. Sprawdzić tw. Stokesa dla: $\overset{2}{\omega}=x\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z+y\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x+z\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y$, całkowanej po brzegu sześcianu o długości boku 1, którego wierzchołki są w punktach: $(0,0,0$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ itd.